高等数学教程

第四卷　第二分册

В.И.斯米尔诺夫著
谷超豪　金福临译

人民教育出版社

统一书号　13012·0336
定价　1.28 元

高 等 数 学 教 程

第四卷　第二分册

В. И. 斯米尔诺夫著
谷超豪　金福临译

本书系根据苏联国立技术理论书籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的、斯米尔诺夫（В. И. Смирнов）著“高等数学教程”（Курс высшей математики）第四卷 1953 年第三版译出的。

本书（第四卷）中译本暂分二分册出版。

简装本说明

目前 850×1168 毫米规格纸张较少，本书暂以 787×1092 毫米规格纸张印刷，定价相应减少20%。希鉴谅。

高等数学教程

第四卷 第二分册

В. И. 斯米尔诺夫著

谷超豪 金福临译

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

国营五二三厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·0336 开本 787×1092 1/32 印张 16 15/16

字数 [illegible] 印数 39,001-119,000 定价 1.23 元

1958 年 7 月第 1 版 1979 年 8 月陕西第 12 次印刷

目　录

第三章　偏微分方程的一般理論

§1．一阶方程(313)

99．具有两个自变量的綫性方程(313)　100．柯西問題和特征綫(316)　101．任意多个自变量的情形(321)　102．例(328)　103．輔助定理(329)　104．非綫性一阶方程(333)　105．特征流形(337)　106．柯西方法(338)　107．柯西問題(341)　108．解的唯一性(343)　109．奇异情形(346)　110．任意个数自变量(348)　111．全积分，通积分和奇积分(351)　112．全积分和柯西問題(354)　113．例(356)　114．任意个数自变量的情形(360)　115．雅可比定理(363)　116．两个一阶方程的方程組(364)　117．拉格朗日-夏比方法(366)　118．綫性方程組(369)　119．完全組和雅可比組(371)　120．完全組的积分法(373)　121．普阿松括号(375)　122．雅可比方法(377)　123．标准組(379)　124．例(380)　125．优級数法(381)　126．柯瓦列夫斯卡娅定理(385)　127．高阶方程(391)

§2．高阶方程(393)

128．二阶方程的类型(393)　129．常系数方程(395)　130．两个自变量时的标准形式(397)　131．柯西問題(400)　132．特征長条(403)　133．高阶导数(405)　134．实的和虚的特征(409)　135．基本定理(410)　136．中間积分(412)　137．孟日-安培尔方程(414)　138．任意个数自变量时的特征(414)　139．双特征(417)　140．与变分問題的联系(422)　141．間断曲面的傳播(424)　142．弱性間断(427)　143．黎曼方法(430)　144．特征的初始条件(435)　145．存在定理(436)　146．逐次逼近法(438)　147．格林公式(440)　148．索伯列夫公式(447)　149．索伯列夫公式(續)(450)　150．函数 σ 的作出(453)　151．初始条件的一般情形(458)　152．推广的波动方程(461)　153．任意个数自变量的情形(463)　154．基本不等式(466)　155．解的唯一性和連續相关性的定理(471)　156．波动方程的情形(475)　157．輔助命題(479)　158．波动方程的广义解(484)　159．橢圓型方程(487)　160．普阿松方程的广义解(491)

§3．方程組(494)

161．方程組的特征(494)　162．运动学的相容条件(499)　163．动力

学的相容条件(502) 164．流体动力学方程(503) 165．彈性学方程(506) 166．各向异性彈性体(507) 167．电磁波(510) 168．彈性学中的强性間断(514) 169．特征和高频率(519) 170．兩个自变量的情形(521) 171．例(523)

第四章 边値問題

§1．常微分方程的边値問題(526)

172．二阶綫性方程的格林函数(526) 173．边値問題化为积分方程(530) 174．格林函数的对称性(533) 175．边値問題的特征値与特征函数(534) 176．特征値的符号(537) 177．例(539) 178．推广的格林函数(541) 179．勒让特多项式(547) 180．埃尔密脫函数与勒盖尔函数(550) 181．四阶的方程(552) 182．B．A．斯捷克洛夫的精确化的展开定理(554) 183．热傳导方程的富里埃方法的有效性(559) 184．振动方程的富里埃方法的有效性(561) 185．唯一性定理(564) 186．特征値与特征函数的極値性質(567) 187．柯朗定理(571) 188．特征値的漸近表示(573) 189．特征函数的漸近表示(577) 190．李茨方法(580) 191．李茨的例子(582)

§2．椭圓型方程(584)

192．牛頓势函数(584) 193．双層势函数(588) 194．單層势函数的性質(597) 195．單層势函数的法綫导数(598) 196．單層势函数的法綫导数(續)(602) 197．法綫导数的平均値(604) 198．單層势函数沿任何方向的导数(607) 199．对数势函数(611) 200．积分公式与平行曲面(614) 201．調和函数序列(619) 202．拉普拉斯方程的内部边値問題的提法(623) 203．平面上的外部問題(625) 204．凯尔文变换(629) 205．諾伊曼問題解的唯一性(633) 206．三維空間边値問題的解法(637) 207．积分方程的研究(639) 208．关于解边値問題的結果的綜述(645) 209．平面上的边値問題(648) 210．球函数的积分方程(650) 211．輻射着的物体的热平衡(651) 212．許瓦茲方法(653) 213．引理的証明(655) 214．許瓦茲方法(續)(658) 215．次調和函数与优調和函数(662) 216．輔助的命題(665) 217．上函数与下函数法(666) 218．边界値的研究(670) 219．n維空間中的拉普拉斯方程(675) 220．拉普拉斯算子的格林函数(677) 221．格林函数的性質(680) 222．平面上的格林函数(683) 223．例(687) 224．格林函数与非齐次方程(689) 225．特征値与特征函数(694) 226．特征函数的法綫导数(698) 227．特征値与特征函数的極値性質(700) 228．赫姆霍茲方程与輻射原理(702) 229．唯一性定理(705) 230．極限振幅原理(707) 231．赫姆霍茲方程的边値問題(708) 232．电磁波的繞射(714) 233．磁場强度向量(716) 234．椭圓型方程狄义赫利問題解的

唯一性(718)　235．方程 $\Delta v - v\lambda = 0$ (721)　236．特征值的渐近表示(726)　237．輔助定理的証明(731)　238．更一般形式的綫性方程(740)　239．二阶綫性椭圆型方程(742)　240．格林張量(746)　241．弹性理論的平面靜力学問題(748)

§3　拋物型与双曲型方程(751)

242．热傳导方程的解对初始条件、边値条件与自由項的相关性(751)　243．一維情形中的热傳导方程的势函数(753)　244．多維情形的热源(756)　245．热傳导方程的格林函数(758)　246．拉普拉斯变換的应用(759)　247．有限差分的应用(763)　248．富里埃方法(767)　249．非齐次方程(769)　250．热傳导方程解的性質(773)　251．在一維情形下的广义單層势函数与双層势函数(776)　252．次拋物函数与优拋物函数(782)　253．波动方程解的基本不等式(783)　254．非齐次方程的情形(787)　255．富里埃方法与广义解(793)　256．富里埃級数的研究(798)　257．关于週道的假設(805)　258．輔助的命題(806)　259．週道积分的变換(809)　260．基本不等式的証明(831)　261．特征函数的导数(814)　262．輔助命題的証明(815)　263．球的边値問題(820)　264．球内部的振动(824)　265．解的研究(828)　266．电报方程的边値問題(831)

俄汉名詞索引(834)

第三章　偏微分方程的一般理論

§1. 一阶方程

99　具有兩个自变量的綫性方程　我們已不止一次地遇到含有未知函数偏导数的各种类型的微分方程，它們常是一些形狀很特殊的方程，是从数学物理的具体問題中产生的。本章的目的，要闡明偏微分方程的一般理論；而我們的叙述就从一阶方程的理論的研究开始。

一个含自变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的一个未知函数 u 的一阶方程的形狀为

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n)=0,$$

其中 $x_1, \cdots, x_n$ 是自变量，而 $p_k=u_{x_k}$ 是未知函数 u 关于各自变量的偏导数。我們首先研究关于偏导数 p_k 是綫性的方程，也就是下面形狀的方程：

$$(1)\qquad a_1(x_1, \cdots, x_n, u)p_1+\cdots+a_n(x_1, \cdots, x_n,)p_n= =c(x_1, \cdots, x_n, u),$$

而系数 a_k 和自由項 c 都是所有自变量 x_k 和未知函数 u 的給定的函数。因为函数 u 本身在系数和自由項中可以任意方式出現，有时說这样的方程不是綫性的，而叫做拟綫性方程。这一段我們只对兩个自变量的情形来考虑形狀（1）的方程。在这一特別情形，自变量通常用字母 x 和 y 来記，而偏导数照常以下面方式来記：$p=u_x$ 及 $q=u_y$。因此，本段研究的对象就是下面形狀的方程：

$$(2)\qquad a(x, y, u)p+b(x, y, u)q=c(x, y, u)。$$

回忆一下我们很早就曾见到过线性偏微分方程[II; 21],并且知道形状(2)的方程的积分问题和某一常微分方程组的积分问题是等价的。我们将对过去所得的结果,补充一些新的事项,它们对于进一步研究更复杂的问题是有益的。

给定的函数 $a(x, y, u)$, $b(x, y, u)$, 和 $c(x, y, u)$ 在空间 (x, y, u) 确定了某个方向场,就是说,在空间的每一定点有一个方向,它的方向余弦与 a, b, c 成比例。方向场确定这样的曲线族,其中任何一条曲线,它的每一点的切线合于在这点的场中的方向。这曲线族的获得,是下面常微分方程组积分的结果:

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)}, \tag{3}$$

或者,如果用 ds 来记写出的这三个比的公共值,就有:

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y, u); \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y, u); \quad \frac{du}{ds} = c(x, y, u)。 \tag{4}$$

量 p, q 及 -1 和所求曲面的法线的方向余弦成比例,于是方程(2)表示所求曲面的法线和场中方向正交的条件:

$$ap + bq + c(-1) = 0,$$

就是说,方程(2)归结到这样的要求,使得在所求曲面 $u = u(x, y)$ 上的每一点,由上述方向场所确定的方向落在曲面的切平面上。由方程组(4)所确定的曲线称为方程(2)的特征曲线或特征。若某一曲面 $u = u(x, y)$ 是方程(2)的特征曲线的几何轨迹,就是说,若曲面由满足方程组(4)的曲线 l' 所构成,则过这曲面上每一点的曲线 l' 的切线都落在曲面的切平面上,于是推知,这曲面满足方程(2),就是说,是这方程的积分曲面。因此,如果曲面 $u = u(x, y)$ 由方程(2)的特征曲线所构成,则这曲面是此方程的积分曲面。

我们假设曲面 $u = u(x, y)$ 在每一点有切平面,并且曲面的法线方向沿曲面连续地变动。也就是假设 $u(x, y)$ 的一阶偏导数是

存在和連續的。

以后說到积分曲面，我們就假定这个曲面具有上述性質。通常簡称这样的曲面为光滑的。

以上我們証明了，具有方程 $u=u(x, y)$ 且由特征曲綫組成的光滑曲面是积分曲面。倒过来說，不难看出，若某一光滑曲面滿足方程(2)，即它为积分曲面，那末它可用特征曲綫来遮盖。

实际上，若某曲面 S 滿足方程(2)，則在它的每一点、方向 (a, b, c) 在 S 的切平面上。因此，我們在 S 上有了方向場。把这方向場所对应的一阶常微分方程积出来，我們就得到在曲面 S 上并且滿足方程組(4)的曲綫 l'。例如，方程

$$\frac{dx}{a(x, y, u)}=\frac{dy}{b(x, y, u)}$$

能作为这一阶方程，其中 u 用它在曲面 S 的方程中的表达式 $u=u(x, y)$ 替代。假定說，积分所写出的方程，我們得到 y 的通过 x 和任意常数 C 的表达式；把这个表达式代入公式 $u=u(x, y)$，对于 u 我們也得到通过 x 和 C 的表达式，这样便有了遮盖曲面 S 的曲綫族 l' 的方程。

在一阶常微分方程的研究中，我們見到过，若对应于自变量的給定值，給定了未知函数所取的初值，未知函数就能完全确定 [II; 50, 51]。如果能够求出一般积分的話，由这些初值就可以确定一般积分所含的任意常数。可是只要借助于証明存在性与唯一性定理时所用过的逐次逼近法 [II; 51]，就是不知道一般积分，也可以由初始值来确定解。方程(2)的通解所含的已經不是任意常数，而是任意函数 [II; 22]，在这情形下按初始条件的定解問題可表述为以下方式：确定方程(2)的积分曲面，使它通过空間 (x, y, u) 的某給定曲綫 l。如果我們用 λ 記曲綫 l 在平面 (x, y) 上的投影，于是上述問題化为求方程(2)的这样的解，使它在曲綫 λ 上各

点取給定值的問題。先来拟定所提出的問題的解法 [II; 22]。設 M_0 是曲綫 l 上的某一点，把它的坐标看作由方程組（4）所确定的函数的初始值。按照存在性与唯一性定理，得到通过这点 M_0 的完全确定的特征綫。对曲綫 l 的每一点皆这样做，我們得到一族特征綫；假定它們構成某曲面 S。它就通过曲綫 l，且按上面所說，就是方程（2）的积分曲面。反之，如前面所說的一样，方程（2）的每一积分曲面，可由特征綫組成，也就是由滿足方程組（4）的曲綫所組成。由于取 l 上的点的坐标作为这些解的初始条件，因此，我們可以肯定，用上面所述方法来确定通过曲綫 l 的积分曲面是唯一可能的；严格地說，就是問題的解是唯一的，并且所求积分曲面是通过曲綫 l 上各点的特征綫的几何軌迹。

为严格地推导問題的解的存在性与唯一性的証明，需要对方程（4）的右边作某些假定，并且也要对曲綫 l 加上某些重要的附加条件。例如，若給定的曲綫 l 本身就是特征綫，則按上述方法，从 l 上的各点引特征綫不能导出曲面而仍只是曲綫 l。在这种情形下，解將有無穷多 [II; 23]。实际上，若过曲綫 l 上的某一点引曲綫 l_1，它就不是特征綫。通过这曲綫上的各点引特征綫（給定的曲綫 l 也在其中），我們得到通过已給曲綫 l 的积分曲面。注意到选取 l_1 时的任意性，我們就看出：如果給定的曲綫 l 是特征綫，問題就有無穷多的解。也可能發生問題根本沒有解的情况。当通过曲綫 l 上点的特征綫在这曲綫的鄰域并不構成有显式方程 $u=u(x, y)$ 的曲面时，其中 $u(x, y)$ 是單值連續，且有連續的一阶偏导数，就屬于这种情形。例如，要是所說到的特征綫形成母綫平行于 u 軸的柱面就是如此。在下一段，我們就来講述所提出的問題有一个确定解的解析条件。

100. 柯西問題和特征綫 柯西問題通常指的是前面列出的关于确定通过已給曲綫 l 的方程（2）的积分曲面的問題。为了深

入研究这个問題的解的存在性与唯一性問題，我們必需利用常微分方程論中的一个定理，这就是：

定理 設微分方程組

(5) $$\frac{dy_k}{dx}=f_k(x, y_1, \cdots, y_n) \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

的右边是其所有变量的在某一区域内的連續函数，这区域由下面不等式所确定：

(6) $$|x-a|\leqslant A; \quad |y_k-b_k|\leqslant B \quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

此外，若 f_k 在这区域内有連續偏导数 $\frac{\partial f_k}{\partial y_s}$ 存在，則由于存在性与唯一性定理，对区域（6）内的任意初始値 $(x_0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0)$ 所确定的方程組（5）的解

$$y_k=\varphi_k(x, x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0) \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

有关于初始値的偏导数 $\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_s^0}$，它們是其所含变量 $(x, x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0)$ 的連續函数。

为了不中断叙述，我們把这个定理的証明延到后一段去。

現在来解决柯西問題。假定曲綫 l 的方程以参数的形式給出：

(7) $$x_0=x_0(t); \quad y_0=y_0(t); \quad u_0=u_0(t) \quad (t_0\leqslant t\leqslant t_1)$$

且設方程（4）的右边在空間 (x, y, u) 的含曲綫 l 在内的某一区域内滿足上述定理中的条件。取 l 上的点的坐标作为在 $s=0$ 的初始値，則对充分接近于零的 s，得到方程組（4）的解：

$$x=x(s, x_0, y_0, u_0); \quad y=y(s, x_0, y_0, u_0);$$
$$u=u(s, x_0, y_0, u_0),$$

或者，由于（7）：

(8) $$x=x(s, t); \quad y=y(s, t); \quad u=u(s, t)。$$

假設方程（7）的右边关于 t 連續可微，并利用上面的定理，我

們可以肯定函数(8)不仅对 s 而且对 t 也有連續导数。对区間 $t_0<t<t_1$ 中任意給定的 t，函数(8)对于充分接近于零的所有 s 是确定的。作出这些函数中的前面兩个关于 s 和 t 的函数行列式：

$$\Delta=x_s y_t-x_t y_s。\tag{9}$$

对以后重要的是这个行列式异于零还是等于零这件事。我們首先考虑沿曲綫 l 当 $\Delta\neq0$ 的情形，其次，再考虑沿曲綫 l 当 $\Delta=0$ 的情形。从第一种情形开始：

$$\Delta\neq0\quad(\text{沿曲綫 } l),\tag{10}$$

就是說，当 $s=0$ 时 $\Delta\neq0$，不仅如此，由于导数的連續性，在初始值 $s=0$ 与值 t 的某一鄰域內 $\Delta\neq0$ 也成立，而 t 对应于曲綫 l 的某一点 M。此时，从(8)中的前兩个方程，对曲綫 l 上点 M 的坐标 (x, y) 的某一鄰域中的一切 x 及 y，可以关于 s 及 t 解出，这解是唯一的，并且得到的函数 $s(x, y)$，$t(x, y)$ 有一阶連續导数 [**III**; **19**]。將所得的函数 $s(x, y)$ 及 $t(x, y)$ 代入(8)中的第三个方程，則在所述的鄰域中得到函数 $u(x, y)$，它有連續一阶导数，并且曲面 $u=u(x, y)$ 在 M 的鄰域含有曲綫 l 的一段。从前段所說的几何学上的看法，直接推出 $u(x, y)$ 滿足方程(2)。我們以下也要用分析的方法来檢驗这事实。

应当指出，我們仅在曲綫 l 上任一給定点 M 的某一鄰域內作出解 $u(x, y)$，或者說，得到了問題的局部解。在加上某些条件到 a, b, c 及曲綫 l 上时，可以相信，在整个曲綫 l 的某一鄰域內，即对平面 (x, y) 上所有充分接近于 $x=x_0(t)$，$y=y_0(t)$ 的一切 x 和 y，是可能作出积分曲面来的。这里假設 $x_0'(t)$，$y_0'(t)$ 不同时为零。类似这种結論的确切說法將在下段指出。

关于在平面 (x, y) 上的某一預先指定的区域內，方程的解的存在問題是很难决定的。可以作出平面 (x, y) 上的一个区域 B，和在其上有任何阶导数的函数 $b(x, y)$，使得对于方程

$$u_x+b(x, y)u_y=0,$$

在全区域 B 上有連續一阶导数的解，仅仅是 $u=$常数。

現在驗証，所作函数 $u(x, y)$ 确实是方程(2)的解。利用复合函数的求导数法則及方程(4)，可以写出：

$$\frac{du}{ds}=u_xa+u_yb。$$

但是 $\frac{du}{ds}=c$，由此推知，$u(x, y)$ 确实滿足方程(2)。

問題的解的唯一性，直接从每个积分曲面由特征曲綫所構成的这个事实推出。現在我們从解析上来証明它。設 $u=u(x, y)$ 是某一积分曲面，并且 $u(x, y)$ 有一阶連續导数。对常微分方程組

(11) $$\frac{dx}{ds}=a[x, y, u(x, y)];\quad \frac{dy}{ds}=b[x, y, u(x, y)]。$$

求积分，并將所得的解代入函数 $u=u(x, y)$，在我們的积分曲面上就得到一族曲綫。

不难驗証，这时函数 u 滿足(4)中第三个方程。实际上，由于(11)：

$$\frac{du}{ds}=u_xa+u_yb。$$

但是 $u=u(x, y)$ 是积分曲面，就是說，$u_xa+u_yb=c$，因此，$\frac{du}{ds}=c$。这样，上面所講的遮盖曲面 $u=u(x, y)$ 的曲綫确实是特征綫。于是，在条件(10)之下，柯西問題有唯一的解。我們在考虑非綫性一阶方程时还要回到唯一性問題。

現在假定沿曲綫 l，即当 $s=0$ 时，我們有：

(12) $$\Delta=x_sy_t-x_ty_s=0。$$

在这种情况下要証明，如果通过曲綫 l 且有一阶連續导数的积分曲面 $u=u(x, y)$ 存在，則这曲綫一定是特征綫。在这里和以前一样，要是我們說曲面 $u=u(x, y)$ 通过曲綫 l，那末应了解为是

局部的，就是說，只考慮 l 的某一段。

將假設 a 及 b 沿 l 不等于零。考慮到方程（4）中的前兩个，我們可写条件(12)为形狀：

$$\frac{x_t}{a}=\frac{y_t}{b}=k \quad (s=0), \tag{13}$$

其中字母 k 用来記所写比式的公共値。設 $u=u(x, y)$ 是通过 l 的积分曲面，將式子 $x=x_0(t)$ 及 $y=y_0(t)$ 代入 $u(x, y)$，关于 t 求导并利用(13)，我們得到：$\frac{du}{dt}=u_x ka+u_y kb$。注意到 $u=u(x, y)$ 是方程（2）的解并利用这个方程，更可写出 $\frac{du}{dt}=kc$，这样我們就导出方程組：

$$\frac{x_t}{a}=\frac{y_t}{b}=\frac{u_t}{c} \quad (s=0),$$

于是推出曲綫 l 是特征綫。因此，若 $\Delta=0$，則为了要使通过 l 的积分曲面存在，这曲綫就必須是特征綫。这时，如在前段見过的一样，通过曲綫 l 有無穷多积分曲面。在上面推导証明时，对我們来說，通过 l 的积分曲面 $u=u(x, y)$，在这綫上各点有連續导数当然是重要的；可能有这种情形，像我們將要在例題中見到的一样，l 不是特征綫，而沿着它 $\Delta=0$，并且竟还存在着通过 l 的积分曲面，可是 $u(x, y)$ 的偏导数在 l 的各点不复連續，換句話說，曲綫 l 是积分曲面的奇綫。若 l 不是特征綫，而沿着它 $\Delta=0$，那末就是說，沿曲綫 l

$$\frac{x_t}{a}=\frac{y_t}{b}\neq\frac{u_t}{c}。$$

应当指出方程組（4）的一个特性。輔助参数 s 在方程的右边不出現，并且任意常数之一是作为 s 的附加項而出現的。这个任意常数不起主要作用而归結为选 s 初始値的任意性。因此，我們在求这方程組的积分时有兩个实质任意常数。要是写方程組（4）为形狀（3），这事实便立即清楚了。

回忆起，若是求隐式 [II; 21]：

$$\varphi(x, y, u)=C \tag{14}$$

的解，其中 C 是某一任意常数，则拟綫性非齐次方程（2）可化为純綫性齐次方程。按照隐函数求导的法則，我們有

$$u_x=-\frac{\varphi_x}{\varphi_u};\quad u_y=-\frac{\varphi_y}{\varphi_u},$$

方程（2）化为純綫性齐次方程：

$$a(x, y, u)\varphi_x+b(x, y, u)\varphi_y+c(x, y, u)\varphi_u=0。\tag{15}$$

对应的常微分方程組是（3）。若

$$\varphi_1(x, y, u)=C_1;\quad \varphi_2(x, y, u)=C_2$$

是这方程組的兩个独立的解，則

$$\varphi=F(\varphi_1, \varphi_2)$$

也是方程(15)的解，其中 F 为 φ_1 及 φ_2 的任意函数。我們曾見到如何从柯西問題的条件来确定这函数的形狀 [II; 23]。

上面的説明引起以下的問題。我們求方程（2）的解时，把这解看作是屬于具隐式方程 (14)，而含有任意常数 C 的这一类解中的。不难証明，用这样的方法，我們并未丟失方程的任何一个解。簡單地說，由于柯西問題初始条件的任意性，这里的問題归結到，我們可把方程的任何解看作是屬于含任意常数的整个解族中的；关于这个任意常数解出来，我們就确信任何解可从形狀 (14) 的式子得到。我們可能丟失的仅是那些不能由上述柯西問題解法的过程中得到的解（奇解）。如果函数 a，b 及 c 滿足某些一般的条件，这样的解就不会有了。至于詳細的証明，我們不去講它。

101. 任意多个自变量的情形 考虑有任意个数自变量的綫性方程：

$$a_1(x_1, \cdots, x_n, u)p_1+\cdots+a_n(x_1, \cdots, x_n, u)p_n= \\ =c(x_1, \cdots, x_n, u)。\tag{16}$$

以后我們常常假設系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 对所考慮的变数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, u$ 之値来說不同时为零，就是說，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2>0$。在方程(16)的研究中，我們將利用类似于三維空間的几何术語；在这种情形下，我們有坐标是$(x_1,\cdots,x_n, u)$ 的 $(n+1)$維空間。m 維流形是指这空間中的一个点集，其中的点的坐标能用 m 个任意参数来表示：

$$x_k=x_k(t_1, \cdots, t_m);\ u=u(t_1, \cdots, t_m) \quad (k=1, 2,\cdots,n);$$

并且我們假設从写出方程中的某 m 个能关于 $t_1, \cdots, t_m$ 解出。当 $m=n$，我們有 n 維流形，將称之为曲面。若参数取为 $x_1, \cdots, x_n$，則有曲面的显式方程：$u=u(x_1, \cdots, x_n)$。方程(16)的积分曲面的方程正应有这样的形狀。当 $m=1$ 时，对应的一維流形称为 $(n+1)$維空間的曲綫。

方程(16)的特征曲綫由以下方程組确定：

$$\frac{dx_k}{ds}=a_k(x_1, \cdots, x_n, u);\ \frac{du}{ds}=c(x_1, \cdots, x_n, u), \tag{17}$$

其中 s 是輔助参数。除了所有的 x_k 及 u 皆为常数的解而外，这方程組的任一解都給出$(n+1)$維空間的曲綫。由于 $a_1^2+\cdots+a_n^2>0$，因而所有 x_k 和 u 皆为常数的解不可能存在。这曲綫的坐标可用参数 s 表示；为了从这些曲綫作出曲面，我們必須取和$(n-1)$个任意参数有关的这种曲綫的一族。得到总共与 n 个参数有关的点集。若某一光滑曲面 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$ 是由与 $(n-1)$ 个参数有关的特征曲綫族所構成，則它是方程(16)的积分曲面。实际上，$u(x_1, \cdots, x_n)$ 关于 s 求导数并利用方程(17)得：

$$\frac{du}{ds}=\sum_{k=1}^{n} u_{x_k}a_k。$$

但是，由于(17)中的最末一个方程，$\frac{du}{ds}=c$，就推出方程(16)。反之，任一积分曲面可由与$(n-1)$个参数有关的特征綫族所組成。

实际上,有了积分曲面 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$,我們可从方程組

$$(18) \quad \frac{dx_k}{ds}=a_k[x_1, \cdots, x_n, u(x_1, \cdots, x_n)] \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

确定 x_k,并給出 $(n-1)$ 个任意常数。作为 s 的附加項的一个任意常数不起重要作用。將方程組(18)的解代入 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$ 的右边,关于 s 求导数并利用方程(16)和(18),我們看到 u 就滿足方程(17)中的最末一个。

和在[100]中的一样,我們假設 $u(x_1, \cdots, x_n)$ 及方程(17)的右边都有連續一阶导数。

方程(16)的柯西問題是:确定积分曲面使含有給定的 $(n-1)$ 維流形:

$$(19) \quad x_k=x_k(t_1, \cdots, t_{n-1}); \quad u=u(t_1, \cdots, t_{n-1}), \quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

而这些等式的右边,在 $(n-1)$ 維空間 $(t_1, \cdots, t_{n-1})$ 的某一区域 D 內連續且有連續一阶偏导数。

假設由导数 $\frac{\partial x_k}{\partial t_l}$ 所形成的矩陣的秩等于 $(n-1)$,并且不同的值組 $(t_1, \cdots, t_{n-1})$ 有不同的点 $(x_1, \cdots, x_n)$ 对应。其次,如上面提过的一样,假設系数 $a_k(x_1, \cdots, x_n, u)$ 及 $c(x_1, \cdots, x_n, u)$ 在含有流形(19)在內的空間某区域 D 中有連續一阶导数。

在特殊情形下,柯西問題中的这一条件可以是:当自变量之一取給定的数值时,給出未知函数 u 作为其余变量的函数:

$$(20) \quad u|_{x_1=x_1^{(0)}}=\varphi(x_2, \cdots, x_n)。$$

問題的解法完全和两个自变量情形类似。表达式(19)当作求方程組(17)积分时的初始条件。这样,我們得到下面形狀的解:

$$(21) \quad x_k=x_k(s, t_1, \cdots, t_{n-1}); \quad u=u(s, t_1, \cdots, t_{n-1})。$$

往后,行列式:

$$(22)\qquad \Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s}, & \frac{\partial x_2}{\partial s}, & \cdots, & \frac{\partial x_n}{\partial s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial t_1}, & \cdots, & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}}, & \frac{\partial x_2}{\partial t_{n-1}}, & \cdots, & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}$$

要起重要作用，考慮到方程(17)，我們能將它改写为形狀：

$$(23)\qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & \cdots, & a_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial t_1}, & \cdots, & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}}, & \frac{\partial x_2}{\partial t_{n-1}}, & \cdots, & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix},$$

若这行列式在流形(19)上(即当 $s=0$ 时)异于零，則从方程(21)中前面 n 个可关于 $s, t_1, \cdots, t_{n-1}$ 解出，并且代入方程(21)中的最末一个，我們得到方程(16)的积分曲面。在这情形，柯西問題就不会有任何其他的解。所有这些可以完全和兩个自变量的情况一样地来証明。考慮初始条件为形狀(20)的情形，又假定 $x_2, \cdots, x_n$ 起參数 $t_1, \cdots, t_{n-1}$ 的作用。取綫性方程并假定行列式(23)在我們的流形上异于零。注意到，当 $p\neq q$ 时 $\frac{\partial x_p}{\partial x_q}=0$，而 $\frac{\partial x_p}{\partial x_p}=1$，即得 $\Delta=a_1\neq 0$。用系数 a_1 来除方程，得到下面形狀的方程：

$$(24)\qquad p_1+a_2(x_1, \cdots, x_n)p_2+\cdots+a_n(x_1, \cdots, x_n)p_n= \\ =b(x_1, \cdots, x_n)u+c(x_1, \cdots, x_n).$$

設 a_k, b 及 c 对 $\alpha\leqslant x_1\leqslant\beta$ 与任何实数 $x_2, \cdots, x_n$ 为連續且关于 $x_2, \cdots, x_n$ 有連續一阶偏导数。此外，并假定在这些条件下，所述的函数都有界：$|a_k|\leqslant M$; $|b|\leqslant M$; $|c|\leqslant M$。

选取 x_1 为自变量，写方程組(17)为形狀：

(25) $$\frac{dx_k}{dx_1}=a_k(x_1, \cdots, x_n) \quad (k=2, \cdots, n),$$

(26) $$\frac{du}{dx_1}=b(x_1, \cdots, x_n)u+c(x_1, \cdots, x_n)。$$

設 $x_1^{(0)}$ 是区間 $[\alpha, \beta]$ 中 x_1 的初始值。在下列初始条件下：

$$x_k|_{x_1=x_1^{(0)}}=x_k^{(0)} \quad (k=2, \cdots, n)$$

求方程組(25)的积分。

从 $|a_k|\leqslant M$ 可推出方程組(25)的解 x_k 有有界导数 $\left|\frac{dx_k}{dx_1}\right|\leqslant \leqslant M$，因之，量 x_k 本身的絕对値也是有界的：$|x_k|\leqslant M(\beta-\alpha)$。应用逐次逼近法 [II; 51]，我們容易断定，对任意初始値 $x_k^{(0)}(k= =2, \cdots, n)$ 所說的解

(27) $$x_k=\varphi_k(x_1, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) \quad (k=2, \cdots, n)$$

在全区間 $\alpha\leqslant x_1\leqslant\beta$ 上存在。我們可以說，通过点 $A_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ 的积分曲綫也通过点 $A(x_1, \cdots, x_n)$，A 点的坐标則由公式(27)确定。根据唯一性定理，可以肯定，如果取 A 点为初始点，則对应的积分曲綫也要經过点 A_0。由此推出，方程(27)对任何 x_k 关于 $x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}$ 可解，而且解的形狀为：

(27₁) $$x_k^{(0)}=\varphi_k(x_1^{(0)}, x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (k=2, \cdots, n)。$$

假定說，我們要在初始条件(20)下解柯西問題。我們必須按照上面所說在初始条件：

$$x_k|_{x_1=x_1^{(0)}}=x_k^{(0)} \quad (k=2, \cdots, n);$$

$$u|_{x_1=x_1^{(0)}}=\varphi(x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$$

之下积分出方程(25)和(26)，其中任意值 $x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}$ 起 $t_1, \cdots, t_{n-1}$ 的作用。將(27)代入(26)，积分所得方程：

(28) $$u=e^{\omega}\left[\varphi(x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})+\int_{x_1^{(0)}}^{x_1} c(x_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)e^{-\omega}dx_1\right],$$

其中 $$\omega=\int_{x_1^{(0)}}^{x_1} b(x_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)dx_1$$

且 b 和 c 中有 $\varphi_k(x_1, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ 作为它們的自变量。代 (27_1) 到 (28) 的右边，得到所求柯西問題的解 $u(x_1, \cdots, x_n)$。它在全区間 $\alpha \leqslant x_1 \leqslant \beta$ 及对任何 $x_2, \cdots, x_n$ 存在。这与方程的綫性以及我們对于 a_k, b 及 c 所作的假設有关。

对于拟綫性方程(16)，关于 a_k 及 c 作某些假定后，能够指出解的存在区域。我們来推导相应的結果。

設 $a_1=1$, a_k 及 c 在

$$|x_1 - x_1^{(0)}| \leqslant a; \tag{29}$$

$$b_k < x_k < c_k \quad (k=2, \cdots, n) \tag{30}$$

和任意实数 u 的条件下連續、有界且有連續导数，这些导数的絕对值不超过某一常数 A。設 $\varphi(x_2, \cdots, x_n)$ 在条件 (30) 之下連續、有界且有連續一阶导数，其絕对值不超过某常数 B；此时方程(16) $(a_1=1)$ 在条件 (20) 之下在由不等式：

$$|x_1 - x_1^{(0)}| < a; \quad |x_1 - x_1^{(0)}| < \frac{1}{nA} \lg\left[1 + \frac{n}{(n-1)(B+1)}\right]$$

和不等式 (30) 所确定的区域中有解［康姆凱 (Kamke)，实函数的微分方程 Differentialgleichungen reeller Funktionen, 335 頁］。

現在考慮在流形(19) 上 $\Delta=0$ 的情形。將假設行列式 Δ 的第一列元素余因子当中有一个异于零。等式 $\Delta=0$ 表明第一列的元素是其他各列中相当元素的綫性組合，就是說，成立关系式：

$$a_k = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial x_k}{\partial t_j}, \tag{31}$$

其中 λ_j 是参数 $(t_1, \cdots, t_{n-1})$ 的确定函数。若在流形(19)上函数 c 也表示为公式：

$$c = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial u}{\partial t_j}, \tag{32}$$

則在这情形下，流形 (19) 称为我們方程的特征流形。假定在流形 (19) 上 $\Delta=0$，并且存在含有这流形的积分曲面 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$。在 $u(x_1, \cdots, x_n)$ 中將 x_k 用它的关于 $t_1, \cdots, t_{n-1}$ 的表达式代替，我們得到当 $s=0$ 时 (21) 中最后一个函数。把这个函数关于 t_j 求导，并且考慮到公式 (31) 和函数 u 滿足方程(16)的事实，我們就有：

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial u}{\partial t_j} = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial x_k}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} a_k = c,$$

就是說，在所考慮的情况下，对在 $s=0$ 时 (21) 中末一函数必須有关系式 (32)。換句話說，我們的流形应当是特征流形。因此，若要在 $\Delta=0$ 的条件下，存在含有流形(19)的积分曲面，这流形必須是特征流形。相反的，現在假定流形(19)是特征流形，即滿足条件(31)和(32)。由微分方程組：

$$\frac{dt_j}{ds}=\lambda_j(t_1, \cdots, t_{n-1}) \quad (j=1, 2, \cdots, n-1) \tag{33}$$

确定参数 t_j 为輔助变数 s 的函数。

积分这方程組，通过 s 和 $(n-2)$ 个任意参数(任意常数)表示出 t_j。当作 s 的附加項而出現的一个任意常数不起主要作用。把 t_j 的表达式代入 (19)，x_k 及 u 就通过 s 和所說的 $(n-2)$ 个参数表出，这时，不难驗証，x_k 及 u 看为 s 的函数満足方程(17)，就是說，是方程(16)的特征。实際上，由于(33)：

$$\frac{dx_k}{ds}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial x_k}{\partial t_j}\lambda_j; \quad \frac{du}{ds}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial t_j}\lambda_j,$$

或者，由于(31)及(32)：

$$\frac{dx_k}{ds}=a_k; \quad \frac{du}{ds}=c。$$

上面的議論表明，方程(16)的任何特征流形可由这方程的特征組成。

現設特征流形(19)与某一別的 $(n-1)$ 維流形 M_{n-1} 相交，沿着 M_{n-1}，$\Delta\neq 0$。从这流形 M_{n-1} 上各点引特征，我們便得到方程 (16) 的积分曲面。另一方面由以上的証明推知从特征流形(19)与流形 M_{n-1} 的交綫上各点出發的特征，構成特征流形(19)；因此，所作的积分曲面确实含有我們的特征流形。由于輔助流形 M_{n-1} 选取的任意性，存在無穷多个积分曲面包含給定的特征流形，这就是所要証明的。

如果求方程(16)的隐式的解：

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n, u)=C$$

其中 C 是任意常数，就完全像在兩个自变量的情形一样，可以化拟綫性非齐次方程(16)为純綫性齐次方程。对于函数 φ 得到方程：

$$a_1\varphi_{x_1}+\cdots+a_n\varphi_{x_n}+c\varphi_u=0。$$

对应的常微分方程組为

$$\frac{dx_1}{a_1}=\cdots=\frac{dx_n}{a_n}=\frac{du}{c}。$$

若

$$\varphi_1(x_1, \cdots, x_n, u)=C_1; \cdots; \varphi_n(x_1, \cdots, x_n, u)=C_n \tag{34}$$

是它的独立的积分，那末方程

$$F(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)=0$$

給出方程(16)的隐式的解，其中 F 是它的变量的任何函数。在最后等式的右边，我們写零来替代任意常数，就因为 F 是它的变量的任何函数的緣故。为了作出含給定流形(19)的积分曲面，我們將(19)式代入积分(34)的左边。从这样得到的 n 个方程消去 $(n-1)$ 个参数 $t_1, \cdots, t_{n-1}$，我們就有任意常数之間的关系式：

$$F(C_1, \cdots, C_n)=0。$$

这关系式的左边使我們得以确定函数 F 的形狀。簡單些說，就是以函数 $\varphi_k(x_1, \cdots, x_n, u)$ 来代最后方程中的 C_k，我們就得到所求积分曲面的方程。

102. 例. 1. 考虑方程：

$$3(u-y)^2p-q=0。\tag{35}$$

方程組(4)有形狀：

$$\frac{dx}{ds}=3(u-y)^2;\quad \frac{dy}{ds}=-1;\quad \frac{du}{ds}=0,\tag{36}$$

于是它的解用变量(x, y, u)的初始値表示为

$$x=(u_0-y_0+s)^3+x_0-(u_0-y_0)^3;\quad y=-s+y_0;\quad u=u_0。\tag{37}$$

假定說，所求积分曲面所必須經过的曲綫 l 的方程(7)具形狀：

$$x=0;\quad y=t;\quad u=t。\tag{38}$$

以 $x_0=0$; $y_0=u_0=t$ 代入(37)得：

$$x=s^3;\quad y=-s+t;\quad u=t;$$

行列式

$$\Delta=x_sy_t-x_ty_s=3s^2$$

当 $s=0$ (即沿 l) 时为零。曲綫(38)不是方程(35)的特征，因为根据方程(36)的最后一式，u 沿着特征必須是常数。方程(35)却有通过曲綫(38)的积分曲面，就是：

$$u=\sqrt[3]{x}+y。$$

在这情形 $p=u_x=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$，并且这偏导数沿曲綫(38)成为無穷大。

2. 考虑三个自变量的函数 u 的方程：

$$p_1+p_2+p_3=u。$$

作方程組(17)并对它求积分，得到以下的由变量的初始値 x_k^0 及 u_0 表出的解：

$$x_k=s+x_k^0;\quad u=u_0e^s\quad (k=1, 2, 3)。\tag{39}$$

假需要求出积分曲面而包含流形：

$$x_1=t_1+t_2;\ x_2=t_1-t_2;\ x_3=1;\ u=t_1t_2。$$

以这些式子代替方程(39)中的初始值，得到：

$$x_1=s+t_1+t_2;\ x_2=s+t_1-t_2;\ x_3=s+1;\ u=t_1t_2e^s。\tag{40}$$

由前面三个方程解出 s, t_1 及 t_2 ($\Delta\neq0$ 的情形)：

$$s=x_3-1;\ t_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2-2x_3+2);\ \ t_2=\frac{1}{2}(x_1-x_2);$$

將这些式子代到方程(40)的最后一个，得到所求积分曲面的方程：

$$u=\frac{1}{4}(x_1+x_2-2x_3+2)(x_1-x_2)e^{x_3-1}。$$

3. 要求方程：

$$u_x-u_y=f(x+y)$$

的連同一阶导数为連續且滿足条件当 $x=0$ 时 $u=0$ 的解。我們可以作变数变換

$$x=x_1;\quad x+y=y_1,$$

利用它我們不难得到下面的解答：

$$u(x,\ y)=xf(x+y)。$$

只要函数 $f(t)$ 有連續导数，这公式实际上就給出所列問題的解。若 $f(t)$ 沒有連續导数，則所列問題決不能有解。可以証明，处处無导数而連續的函数 $f(t)$ 是存在的。所举的例子显出，方程(2)中关于 c 的导数存在和連續这一假設的重要性。[彼я (Perron), Math. Zeitschr. Bd. 27, Heft 4; 1928]。

103. 輔助定理 本段推导在[100]中所叙述的定理的証明。首先要証明一个輔助命題。假定說，方程組：

$$\frac{dy_k}{dx}=f_k(x,\ y_1,\ \cdots,\ y_n,\ \lambda)\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{41}$$

的右边含参数 λ。并且假設当

$$|x-a|\leqslant A;\ \ |y_k-b_k|\leqslant B\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{42}$$

以及 λ 在某一区間 $\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$ 变动时，右方这些函数是連續函数，关于所有变数 y_k 有連續导数，而 a 与 b_k 是給定的数。

設 M 是絕对値

$$|f_k(x,\ y_1,\ \cdots,\ y_n,\ \lambda)|\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

对所指的变数値的最大値。此时方程組(41)有唯一的解滿足初始条件：

$$y_k|_{x=a}=b_k\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。\tag{43}$$

这个解在区間 $|x-a|\leqslant h$ 上存在，其中 h 是兩数 A 及 $\frac{B}{M}$ 中較小的一个，并且它在这区間中可由逐次逼近法得到 [II; 51]。按在 [II; 51] 所述公式計算的逐次逼近是关于 x 及 λ 的連續函数，并由于逐次逼近关于 x 及 λ 的一致收斂性 [II; 51]，我們可以肯定，給出方程組(41)滿足初始条件(43)的解是变数 x 及 λ 的連續函数。当然，我們也可以假設方程(41)的右边含有不止一个而是許多参数。

因此，我們可算証明了下面的引理：

引理 若方程 (41) 的右边含有某些参数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 且滿足上述的条件，則方程組的滿足初始条件(43)的解是关于 x 与 λ_s 为連續的函数：$y_k=\psi_k(x, \lambda_1, \cdots, \lambda_k)$，(43) 中的 a 及 b_k 是給定的数。

附注 設 x_0 及 y_k^0 是区域(42)內部的值。滿足初始条件 $y_k(x_0)=y_k^0$ 的解是这些初始值的函数：

$$y_k=\psi_k(x, x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0), \tag{44}$$

而这些函数确定在 $x=x_0$ 的某一鄰域內。如果导入新自变量 $\xi=x-x_0$ 和新函数 $\eta_k=y_k-y_k^0$，則方程組可改写为形狀：

$$\frac{d\eta_k}{dx}=f_k(\xi+x_0, \eta_1+y_1^0, \eta_2+y_2^0, \cdots, \eta_n+y_n^0, \lambda),$$

就是說，初始值作为参数在右边出現，而初始条件 $\eta_k(0)=0$ 仅为确定的数。由于上述引理，我們可以断定函数(44)是它們的变数的連續函数。

現在轉而証明在[100]中所列出的定理；为了叙述簡單起見，先考慮一个方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{45}$$

的情形。假定右边当

$$|x-a|\leqslant A; \quad |y-b|\leqslant B \tag{46}$$

为連續且有关于 y 的連續导数。

考慮方程 (45) 的滿足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解，其中 x_0 及 y_0 在区域(46)的內部。这解將是 x_0 与 y_0 的函数

$$y=\varphi(x, x_0, y_0) \tag{47}$$

且对充分鄰近于 x_0 的 x 确定。稍为变动函数的初始值而考慮新的解：

$$y^1=\varphi(x, x_0, y_0+\Delta y_0). \tag{48}$$

若 Δy_0 的絕对值充分小，則解(47)及(48)在値 $x=x_0$ 的某一确定的鄰域內都

存在。

从方程(45)推出：

$$\frac{d(y^+-y)}{dx}=f(x,\ y^+)-f(x,\ y),$$

这个方程也可以改写为形狀：

(49) $$\frac{d(y^+-y)}{dx}=a(x,\ \Delta y_0)(y^+-y),$$

其中

(50) $$a(x,\ \Delta y_0)=\frac{f(x,\ y^+)-f(x,\ y)}{y^+-y}。$$

因为我們假設解(47)及(48)为已知，所以这个比式可看成是 x 及 Δy_0 的已知函数。不难看出，函数 $a(x,\ \Delta y_0)$ 是其变量的連續函数。对于那些使 $y^+-y\neq0$ 的 x 及 Δy_0 的值，这是很明显的。若是当 $x\to x'$ 及 $\Delta y_0\to 0$ 时 y^+ 与 y 有共同極限 y'，則从連續导数存在的条件直接推出：

$$\frac{f(x,\ y^+)-f(x,\ y)}{y^+-y}=f_y[x,\ y+\theta(y^+-y)]\to f_y(x,\ y'),$$

就是説，卽使在这个場合，函数(50)也是連續的。以 Δy_0 除(49)的兩边，得到关于比 $(y^+-y):\Delta y_0$ 的微分方程：

(51) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{y^+-y}{\Delta y_0}\right)=a(x,\ \Delta y_0)\frac{y^+-y}{\Delta y_0}。$$

当 $x=x_0$ 我們有：$y^+|_{x=x_0}=y_0+\Delta y_0$ 及 $y|_{x=x_0}=y_0$，即

(52) $$\left.\frac{y^+-y}{\Delta y_0}\right|_{x=x_0}=1。$$

因此，比 $(y^+-y):\Delta y_0$ 是微分方程

(53) $$\frac{du}{dx}=a(x,\ \Delta y_0)u$$

的解，滿足初始条件：

(54) $$u|_{x=x_0}=1。$$

由于方程(53)的右边对充分接近于零的 Δy_0 的一切値，是参数 Δy_0 的連續函数，因之，满足条件(54)的解 u 是 Δy_0 的連續函数，且特别，所提到的比式，当 $\Delta y_0\to 0$ 时的極限存在，也就是函数(47)有关于 y_0 的偏导数 $\varphi_{y_0}(x,\ x_0,\ y_0)$。这偏导数应当是方程(53)在 $\Delta y_0=0$ 时的解。但是由于(50)，$a(x,\ 0)=f_y[x,\ \varphi(x,\ x_0,\ y_0)]$，因之，我們可以断定，偏导数 $\varphi_{y_0}(x,\ x_0,\ y_0)$ 是方程：

(55) $$\frac{du}{dx}=f_y[x,\ \varphi(x,\ x_0,\ y_0)]u$$

滿足条件(54)的解。因为方程(55)的右边是参数 x_0 与 y_0 的連續函数，我們再应用引理一次，可以断定偏导数 $\varphi_{y_0}(x, x_0, y_0)$ 是其所含变量的連續函数，因而定理証得。

附注 1. 給 x_0 以某一增量 Δx_0，并重复前面的議論；我們可以証明函数(47)有連續偏导数 $\varphi_{x_0}(x, x_0, y_0)$ 的那个事实。这偏导数一样应当适合方程(55)，但初始条件已經不是(54)，而是条件：

$$u|_{x=x_0}=-f(x_0, y_0)。$$

这条件能够直接得到，只要把初始条件为 $y(x_0)=y_0$ 的方程(45)写成积分方程的形狀[II; 51]：

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y)dx。$$

兩边关于 x_0 求导数，就得到上面所說的对于 $u=\varphi_{x_0}(x, x_0, y_0)$ 的初始条件。

附注 2. 前面的証明对方程組(5)也有效。我們就有这方程組的解：

$$y_k=\varphi_k(x, x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0) \quad (k=1, 2, \cdots, n)。\tag{56}$$

給 y_i^0 以增量 Δy_i^0 得到别的解：

$$y_k^+=\varphi_k(x, x_0, y_1^0, \cdots, y_{i-1}^0, y_i^0+\Delta y_i^0, y_{i+1}^0, \cdots, y_n^0)。$$

写出关于 y_k 及 y_k^+ 的方程組(5)，并逐項相减所得的方程，改写右边所得差式为形狀：

$$\begin{aligned} f_k(x, y_1^+, \cdots, y_n^+)-f_k(x, y_1, \cdots, y_n)= \\ =[f_k(x, y_1^+, y_2^+, y_3^+, \cdots, y_n^+)-f_k(x, y_1, y_2^+, y_3^+, \cdots, y_n^+)]+ \\ +[f_k(x, y_1, y_2^+, y_3^+, \cdots, y_n^+)-f_k(x, y_1, y_2, y_3^+, \cdots, y_n^+)]+ \\ +\cdots+[f_k(x, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n^+)-f_k(x, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n)] \end{aligned}$$

对于比式 $u_k=(y_k^+-y_k):\Delta y_i^0$ 得到綫性方程組：

$$\frac{du_k}{dx}=\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x, \Delta y_i^0)u_j,$$

其中

$$a_{kj}=\frac{f_k(x, y_1, \cdots, y_{j-1}, y_j^+, \cdots, y_n^+)-f_k(x, y_1, \cdots, y_{j-1}, y_j, y_{j+1}^+, \cdots, y_n^+)}{y_j^+-y_j},$$

且初始条件：

$$u_k|_{x=x_0}=0 \ (k\neq i); \quad u_i|_{x=x_0}=1。\tag{57}$$

証明的其余部分可以同样得到，我們就可断定函数(56)关于 y_i^0 的偏导数存在。代替方程(55)，我們得到对这些偏导数的方程組：

$$\frac{du_k}{dx}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_k(x, y_1, \cdots, y_n)}{\partial y_j}u_j,\tag{58}$$

而这綫性方程組的系数中的 y_k 必須代以函数(56)。初始条件照旧由公式(57)确定。应当指出，把函数(56)代入方程(5)并关于 y_i^0 求兩边的导数，就可以直接得出方程組(58)。但是若預先沒有証明，我們还不可能断定关于 y_i^0 偏导数的存在，并且严格地說，不能改变左边关于 x 和 y_i^0 求导数的顺序。仍应指出，对于一个方程的情形，綫性齐次方程(55)能积分为有限形式。

附注 3. 若方程(5)的右边 f_k 在条件(6)之下有关于 y_s 到某 m 阶为止的連續偏导数，則函数 $\varphi_k(x, x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0)$ 也有关于 y_s^0 到 m 阶为止的連續偏导数。若 f_k 有关于 x 的連續偏导数，則由方程(5)本身推知，φ_k 有关于 x 到二阶为止的連續导数。

104. 非綫性一阶方程 我們轉到在一般情形的一阶偏微分方程的討論。如同对綫性方程的情形一样，我們先假定只有兩个自变量。兩个自变量的函数的一阶偏微分方程有形狀：

$$F(x, y, u, p, q)=0。\tag{59}$$

首先解释所写方程的几何意义。在任意一定点 (x, y, u) 方程(59)表示 p 同 q 間的关系式，也就是曲面的法綫方向余弦間的关系式。滿足这关系式的所有法綫，形成以 (x, y, u) 为頂点的錐面。通过点 (x, y, u) 而垂直于这錐面母綫的平面，是所求积分曲面在这定点的切平面的可能位置。这平面族和法綫錐面的母綫族同样是和一个参数有关。这平面族的包絡是一个新的錐面，称为錐面 T。因此，方程(59)相当于在空間的每一点給出錐面 T，而方程(59)的所求积分曲面应具有以下特性，在它的每一点的切平面应当切于这点所对应的錐面 T。

写出在給定点 (x, y, u) 的錐面 T 的方程。設在定点 (x, y, u) 滿足方程(59)的 p 和 q 是参数 a 的函数。錐面 T 是平面族

$$p(a)(X-x)+q(a)(Y-y)-(U-u)=0\tag{60}$$

的包絡。对参数 a 微分，得到添加的方程：

$$\frac{dp}{da}(X-x)+\frac{dq}{da}(Y-y)=0。\tag{61}$$

关于 a 微分关系式(59)，我們得到：

(62) $$P\frac{dp}{da}+Q\frac{dq}{da}=0,$$

其中

(63) $$P=F_p;\ \ Q=F_q。$$

以后我們假設对所考慮的变量之値 F_p 和 F_q 不同时为零，卽 F_p^2+ $+F_q^2>0$。所除去的只是方程(59)的奇解情形。假定 $\frac{dp}{da}$ 和 $\frac{dq}{da}$ 二者不同时为零，从齐次方程(61)及(62)得到：

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q},$$

而最后，方程(60)終于使我們有錐面母綫的方程：

(64) $$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{U-u}{pP+qQ}。$$

为了得到錐面的不同母綫，我們应当在分母中代入在定点 $(x,\ y,\ u)$ 滿足关系式(59)的不同的 p 和 q 之值。

在綫性方程(2)的情形，我們在每一点有一个确定的方向，所求积分曲面的切平面必須含有这个方向。在目前的情形下，在每一点替代一个确定的方向而有錐面 T，并且所求积分曲面的切平面应切于此錐面。这样一来，我們对于非綫性方程(59)不可能像对有确定方向場的綫性方程(2)那样来直接作出特征曲綫。在当前的情形，替代方向場我們有錐面 T 場。然而，我們現在指出，設方程(59)有了积分曲面 $S: u=u(x,\ y)$，我們可以用一族曲綫来遮蓋，它們完全类似于綫性方程(2)的特征曲綫。实际上，积分曲面在每一点的切平面必須和这一点所对应的錐面 T 相切，因此也必須含这錐面的一条母綫，沿着它和錐面相切。在曲面不同点的这些錐面 T 的母綫，在积分曲面上構成某一方向場，从而求对应于这方向場的一阶方程的积分，我們就得到和一个参数有关的一族

曲綫 l' 来遮盖了这曲面。上述方向場的方向余弦应当和方程(64)的分母成比例，其中 p 与 q 直接由所考虑的积分曲面的方程确定。因此，沿着所說的遮盖給定的积分曲面的曲綫，必須满足关系：

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{pP+qQ}, \tag{65}$$

或

$$\frac{dx}{ds}=P;\quad \frac{dy}{ds}=Q;\quad \frac{du}{ds}=pP+qQ。 \tag{66}$$

为了求出在給定积分曲面上的上述曲綫，积分一阶方程：

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q} \tag{67}$$

就够了，因为函数 u 及其偏导数 p 与 q 在給定曲面上是 x 和 y 的已知函数，所写分式的分母只含有变量 x 及 y。求方程(67)的积分，并且利用曲面方程 $u=u(x, y)$，我們得到所提到的曲綫 l'。方程(66)的右边只在选定了积分曲面 $u=u(x, y)$ 时才有意义。知道了积分曲面使我們能把 p 和 q 当作 (x, y) 的函数。現在我們对方程組(66)再添上兩个含微分 dp 与 dq 的方程，使所得到的微分方程組和(59)的积分曲面的选取無关。以 r、σ 和 t 記 u 的二阶导数：

$$r=u_{xx};\quad \sigma=u_{xy};\quad t=u_{yy},$$

并以 X、Y 和 U 記方程(59)的左边关于 x、y 和 u 的导数：

$$X=F_x;\quad Y=F_y;\quad U=F_u。$$

將方程(59)的左边关于 x 和 y 求全导数，我們得到：

$$X+Up+Pr+Q\sigma=0;\ Y+Uq+P\sigma+Qt=0。$$

另一方面，显然我們有：

$$\frac{dp}{ds}=r\frac{dx}{ds}+\sigma\frac{dy}{ds}=Pr+Q\sigma;$$

$$\frac{dq}{ds}=\sigma\frac{dx}{ds}+t\frac{dy}{ds}=P\sigma+Qt。$$

从所写的方程直接推出：

$$\frac{dp}{ds}=-(X+Up); \quad \frac{dq}{ds}=-(Y+Uq),$$

于是，我們可以对方程(66)再补充这兩个方程。这样，我們得到下面由輔助参数 s 的五个函数的五个微分方程所組成的方程組：

$$\frac{dx}{ds}=P; \quad \frac{dy}{ds}=Q; \quad \frac{du}{ds}=pP+qQ;$$

(68)

$$\frac{dp}{ds}=-(X+Up); \quad \frac{dq}{ds}=-(Y+Uq).$$

因此，我們可以断定，在任何积分曲面上，沿每一条如上所作的曲綫 l'，必須滿足方程(68)。我們可以單独考虑微分方程組(68)的本身面和方程(59)的积分曲面無关。这方程組称为方程(59)的特征組。

应指出，在推导方程(68)时，我們利用了函数 u 的二阶导数。此外，在求(68)的积分时，对于我們重要的是右边有一阶連續导数。注意到这一些，我們来叙述所得的結果。設 $u(x, y)$ 是方程(59)的解，在某点 (x_0, y_0) 的鄰域内有到二阶为止的連續偏导数。記：$u_0=u(x_0, y_0)$；$p_0=u_x(x_0, y_0)$；$q_0=u_y(x_0, y_0)$。我們假設 $F(x, y, u, p, q)$ 为單值，在值 $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$ 的某鄰域内連續且有到二阶为止的連續导数。这时，方程組(68)有一个确定的解

$$x_0(s),\ y_0(s),\ u_0(s),\ p_0(s),\ q_0(s),$$

当 $s=0$ 时以 $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$ 为初始条件。从上面所进行的討論推知，积分曲面 $u=u(x, y)$ 含有方程組(68)的上述的解，其中 s 是充分接近于零的一切值，就是說：

$$u_0(s)=u[x_0(s), y_0(s)]; \quad p_0(s)=u_x[x_0(s), y_0(s)];$$
$$q_0(s)=u_y[x_0(s), y_0(s)].$$

如前面所說，我們可以單独考虑方程組(68)本身而和方程(59)無

关，它是关于函数 (x, y, u, p, q) 的一阶方程組。不难証明，它有积分

$$F(x, y, u, p, q)=C。\tag{69}$$

实际上，將所写方程的左边关于 s 微分，并利用方程 (68)，我們得到：

$$\frac{dF}{ds}=XP+YQ+U(pP+qQ)-P(X+Up)-Q(Y+Uq)\equiv 0。$$

105. 特征流形 方程組 (68) 的每个解是輔助參数的五个函数：

$$x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)。\tag{70}$$

我們只取方程組的那些代入积分 (69) 使常数 C 等于零的解。称方程組 (68) 的这种解为方程 (59) 的特征長条，就是說，方程 (59) 的特征長条是指滿足方程組 (68) 和关系式

$$F(x, y, u, p, q)=0\tag{71}$$

的函数組 (70)。(70) 中前三个函数确定某空間曲綫，而后面的兩个函数确定沿这曲綫的某些切平面。作为特征長条的組成部分而出現的空間曲綫通常称为方程 (59) 的特征曲綫。前段中我們証过，每一积分曲面可用特征長条遮盖，因而，也由对应于这些特征長条的特征曲綫遮盖。如果我們在某积分曲面上取点 (x_0, y_0, u_0) 和对应于这点的值 $p=p_0$ 及 $q=q_0$，則按方程組 (68) 的存在性和唯一性定理，对初始值 $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$ 确定了唯一特征長条，而这特征長条应当整个屬于所說的积分曲面，就是說，如果特征長条有某元素屬于积分曲面，則它整个屬于这积分曲面。从这个論断直接推出，如果兩个积分曲面在某点相切，就是說，如果在这点有公共的 p 和 q，則对应于这初始值的特征長条应同屬于这二积分曲面。換句話說，如果二积分曲面在某点相切，那末它們沿着在曲面切点处具有初始元素的整个特征長条相切。不待說，在所有

这些議論中，我們假設积分曲面和函数 F 滿足前段所述条件，幷且关于某点 (x_0, y_0) 的鄰域的一切假定也成立。

还要指出，为了方程組(68)的解滿足关系式(71)，就是説，它是特征長条，由于(69)，只要驗証所説的解的初始条件 $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$ 滿足这关系式就够了，也就是只要驗証

(72) $$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)=0。$$

106. 柯西方法 我們已講明方程組(68)和方程(59)的联系。特別，我們講明了，每一积分曲面是与一个参数有关的特征長条族。現在假定説，我們已能够求方程組(68)的积分，因而也求到所有可能的特征長条。要指出我們怎样能从这些特征長条作出方程(59)的积分曲面。將假設方程組(68)的解已用参数 s 和在方程組中所出現的函数的初始值表示：

(73) $$\begin{aligned} x&=x(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0),\\ y&=y(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0),\\ u&=u(\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots),\\ p&=p(\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots),\\ q&=q(\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots)。\end{aligned}$$

为了想得到特征長条族，我們假設初始条件 $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$ 已取为某参数 t 的函数：

(74) $$x_0(t),\ y_0(t),\ u_0(t),\ p_0(t),\ q_0(t),$$

而这些函数应滿足关系式(72)。此外，我們假定它們在 $t_0<t<t_1$ 时有連續导数，幷設方程(68)的右边在含流形(74)在内的某区域中关于 (x, y, u, p, q) 有連續导数。如在前段見过的，对任何值 s 关系式(71)也要滿足。

把函数(74)代入公式(73)的右边，我們得到：

(75) $$x=x(s, t);\quad y=y(s, t);\quad u=u(s, t),$$

(76) $$p=p(s, t);\quad q=q(s, t)。$$

方程(75)确定了在参数形式下的某曲面。若是行列式

$$\Delta = x_s y_t - x_t y_s \tag{77}$$

异于零，我們以后常假定是这样的，那末完全同对綫性方程一样，我們可以确定这曲面的显式方程 $u=u(x, y)$。如我們以前見过的，方程(71)是满足的，可是剩下的問題是由公式(76)所确定的 p 和 q 是否为函数 $u(x, y)$ 关于 x 和 y 的偏导数。如果这种情况發生，那末关于 s 和 t 微分函数 $u(x, y)$，卽得：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial s} - p\frac{\partial x}{\partial s} - q\frac{\partial y}{\partial s} = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial t} - p\frac{\partial x}{\partial t} - q\frac{\partial y}{\partial t} = 0。\end{aligned} \tag{78}$$

按条件，由 p 及 q 的系数組成的二阶行列式异于零，相反的，我們可以断定，如果由(76)确定的 p 与 q 满足关系(78)，那末它們是 $u(x, y)$ 对 x 和 y 的偏导数。关系式(78)的第一个方程直接从組(68)的前三个方程推出。剩下只要說明在什么情况下关系式(78)的第二个满足。我們假設 $F(x, y, u, p, q)$ 在点 $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$ 的鄰域內有到二阶为止的連續导数。同时方程(68)的右边有一阶連續导数，并且从这些方程推出 x_s, y_s, u_s 关于 t 有連續导数，就是說，連續导数 x_{st}, y_{st}, u_{st} 存在。同时連續导数 x_{ts}, y_{ts}, u_{ts} 也存在而等于上述的导数。这是由于：若函数 $f(x, y)$ 在某区域內有連續导数 f_{xy}，則亦有导数 f_{yx}，且 $f_{yx}=f_{xy}$。可以把[I; **155**]中的論断作少許改变就可証明这个定理(例如，參考 Г. М. 費赫金戈尔茨，微积分学教程，卷 1)。

用 L 記(78)中第二方程的左边，并对 s 微分，我們得到：

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial s} - p\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial s} - q\frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}。$$

另一方面，关于 t 微分(78)中前一关系式，如剛才所見到的这

关系式一定成立，就有：

$$0=\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial t}-p\frac{\partial^2 x}{\partial s\,\partial t}-q\frac{\partial^2 y}{\partial s\,\partial t}-\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}-\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}。$$

从前一式逐項減去最后的等式，可写 $\frac{\partial L}{\partial s}$ 为形狀：

$$\frac{\partial L}{\partial s}=\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial q}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t},$$

或者，利用方程組(68)：

$$\frac{\partial L}{\partial s}=P\frac{\partial p}{\partial t}+Q\frac{\partial q}{\partial t}+(X+Up)\frac{\partial x}{\partial t}+(Y+Uq)\frac{\partial y}{\partial t}。$$

关于 t 微分函数(75)和(76)所滿足的关系式(71)，我們得到：

$$0=X\frac{\partial x}{\partial t}+Y\frac{\partial y}{\partial t}+U\frac{\partial u}{\partial t}+P\frac{\partial p}{\partial t}+Q\frac{\partial q}{\partial t}。$$

从前一式減去这个等式，我們可以改变 $\frac{\partial L}{\partial s}$ 的表达式为形狀：

$$\frac{\partial L}{\partial s}=U\left(p\frac{\partial x}{\partial t}+q\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial t}\right),$$

或

$$\frac{\partial L}{\partial s}=-UL,$$

于是推出：

$$L=L_0e^{-\int_0^s U\,ds},$$

其中 L_0 是当 $s=0$ 时关系式(78)左边的值：

$$L_0=\frac{\partial u_0}{\partial t}-p_0\frac{\partial x_0}{\partial t}-q_0\frac{\partial y_0}{\partial t}$$

从所写公式直接推得，关系式 $L=0$ 对每一个 s 是成立的，只要当 $s=0$ 时是成立的話，就是說，为了滿足(78)的第二个关系式；必要而且只要函数(74)适合关系式：

$$\frac{du_0}{dt}=p_0\frac{dx_0}{dt}+q_0\frac{dy_0}{dt}。\tag{79}$$

因此，我們可以肯定，如果当 $s=0$ 及 $t=t'(t_0<t'<t_1)$ 时行列式异于零，且若函数(74)滿足关系式：

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)=0$$

(80)

$$\frac{du_0}{dt}=p_0\frac{dx_0}{dt}+q_0\frac{dy_0}{dt},$$

則当 s 和 t 接近于 $s=0$ 及 $t=t'$ 时方程(75)給出方程(59)的积分曲面 $u=u(x, y)$。方程 (75) 的前兩个方程給出連續可导函数 $s(x, y)$, $t(x, y)$。把它們代入 $u(s, t)$, $p(s, t)$, $q(s, t)$, 得到 x 和 y 的連續可导函数,而且 $p=u_x$, $q=u_y$, 由此可見,函数 $u(x, y)$ 有連續二阶导数。对于所得到的解,在 $s=0$ 和鄰近于 t' 的 t, 我們有:$u(t)=u[x(t), y(t)]$,就是說,曲面 $u=u(x,y)$ 含曲綫 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $u=u(t)$ 对应于值 $t=t'$ 的鄰域的某一段。由于这样,我們在下一段建立的柯西問題的解,正如在 [**100**] 中的一样,具有局部性。

107. 柯西問題 对于方程 (59) 的柯西問題能和綫性方程的情形一样来叙述:需要求出通过給定曲綫 l 的积分曲面。首先考慮問題的特殊情形,当給定的曲綫在平行于 (y, u) 平面的平面 $x=x_0$ 上,并且在这平面上有显式方程 $u=\psi(y)$,就是說,假定需要求出滿足以下条件

$$u|_{x=x_0}=\psi(y) \tag{81}$$

的积分曲面;对所考慮的柯西問題,除了証明解的存在性与唯一性以外,还要証明解与初始条件的連續相关性。設 u_1 是在初始条件 (81)中 $\psi(y)$ 換为 $\psi(y)+\delta(y)$ 时的解。所說的連續相关性归結为以下方式:在 (x, y) 的某个有限的变动区域中,只要 $|\delta(y)|$ 充分小,就可使量 $|u-u_1|$ 为任意小。解对于初始条件的这种連續相关性通常称为柯西問題提法的恰当性。我們假設方程(59)已写为关于 p 解出的形式:

$$p=f(x, y, u, q)。 \tag{82}$$

由柯西条件(81)直接推知,我們可取变量 y 作参数,而曲綫 l 的方

程就有形狀：$x=x_0$；$y=y$；$u=\psi(y)$。沿这条曲綫我們仍須确定 p 及 q 为参数 y 的函数使它們滿足(80)的兩个条件。在所給的情形下，这些条件改写为形狀：

(83) $$p_0=f(x_0, y, \psi(y), q_0); \quad \psi'(y)=q_0,$$

于是看出，p_0 及 q_0 沿曲綫 l 按唯一方式确定，并且应用前一段所述的方法，我們就得到問題的解。

为了适合前一段所指出的条件，我們一定需要函数 $\psi(y)$ 的連續二阶导数存在。对于 f 的条件能从 [106] 中所說关于 F 的条件推出。

現在考虑更一般的初始条件，就是說：假設需要导出通过方程为

(84) $$x=\varphi(y); \quad u=\psi(y)$$

的曲綫的积分曲面。这个問題借助于自变量的变換可以化为前面的問題，就是說：替代 (x, y)，按照公式：

$$x=x'+\varphi(y'); \quad y=y',$$

引进新自变量 (x', y')，并用对原来变量的导数来表示关于新变量的导数：

$$u_{x'}=p; \quad u_{y'}=p\varphi'(y')+q,$$

于是 $$p=u_{x'}; \quad q=u_{y'}-u_{x'}\varphi'(y'),$$

而对于新自变量方程(69)取形狀：

(85) $$F[x'+\varphi(y'), y', u, u_{x'}, u_{y'}-u_{x'}\varphi'(y')]=0。$$

曲綫(84)在新变量之下写为形狀：

$$x'=0; \quad u=\psi(y'),$$

就是說，我們有上面所考虑过的形狀的柯西問題。解决它的可能性归結到方程(85)关于 $u_{y'}$ 的可解性。

在曲綫 l 是由参数形式：

$$x=x_0(t); \quad y=y_0(t); \quad u=u_0(t)$$

給定的情形,那末我們应当从兩个方程:

$$
(86)\qquad \begin{cases} F[x_0(t), y_0(t), u_0(t), p_0(t), q_0(t)]=0, \\ u_0'(t)-p_0(t)x_0'(t)-q_0(t)y_0'(t)=0 \end{cases}
$$

来确定函数 $p_0(t)$ 与 $q_0(t)$。这些方程左边关于 p_0 及 q_0 的函数行列式:

$$
(87)\qquad \Delta_0=y_0'(t)F_{p_0}-x_0'(t)F_{q_0}
$$

恰好和当 $s=0$ 时的行列式(77)一致,这可从組(68)的前面兩个方程推出。我們假設行列式(77)沿曲綫 l 异于零,又方程組(86)給出 p_0 与 q_0 沿曲綫 l 的完全确定的值。这时可以应用前一段所述作出解的方法,还应指出,行列式(87)不仅在 $s=0$ 时异于零,就对充分接近于零的 s 也是如此。为了使函数 $p_0(t)$, $q_0(t)$ 有連續的一阶导数,我們一定需要函数 $x_0(t)$, $y_0(t)$, $u_0(t)$ 的連續二阶导数存在。这从(86)的第二个方程可以看出。

108. 解的唯一性 在解柯西問題时,我們用特征長条来作出积分曲面。問題的解的唯一性明显地由每一积分曲面能用特征長条遮蓋这一事实而直接得到。但是在証明这一事实时,我們利用了函数 $u(x, y)$ 的連續二阶导数的存在性。在上面所作的假設之下,我們在[**107**]中得到問題的解,在那里 $u(x, y)$ 有連續二阶导数。然而,如果只假設函数 $u(x, y)$ 有連續一阶导数,所說唯一性的簡單証明就不中用了。

不难在只是一阶連續导数存在的假定下証明唯一性定理。我們現在在柯西条件(81)之下来对方程(82)进行証明。

証明是以下面的引理为基础:

引理 設函数 $u(x, y)$ 在由直綫

$$
(88)\qquad x=x_0;\quad x-x_0=\frac{1}{A}(y-y_1);\quad x-x_0=-\frac{1}{A}(y-y_2)\quad (y_1<y_2)
$$

所組成的閉三角形 $\triangle$ 上連續,并对 $x>x_0$,在更寬的由直綫

(89) $$x=x_0;\ x-x_0=\frac{1}{A}(y-y_3);\quad x-x_0=-\frac{1}{A}(y-y_4)$$

$$(y_3<y_1<y_2<y_4)$$

所構成的三角形內定义和有連續的一阶导数。更假設这导数在除底边而外的整个三角形 $\triangle$ 内满足条件

(90) $$|u_x|\leqslant A|u_y|+B|u|,$$

而在底边 $x=x_0$ 上成立不等式

(91) $$|u(x_0,\ y)|\leqslant M。$$

这时在整个三角形 $\triangle$ 上成立不等式

(92) $$|u(x,\ y)|\leqslant Me^{B(x-x_0)}。$$

首先对 $A=B=1$ 証明引理。我們从反方面来进行討論。假設在$\triangle$内有一点，对于它 $|u(x,\ y)|>Me^{x-x_0}$。这时函数 $u(x,\ y)e^{x_0-x}$ 不能在底边上有最大的絕对值。

因为所有的条件只含函数 $u(x,\ y)$ 的絕对值及其导数，如有需要，就改变 $u(x,\ y)$ 的符号，而可以假設乘积 $u(x,\ y)e^{x_0-x}$ 不在 $\triangle$ 的底上到达最大正值。同时我們可以确定一个充分小的正数 λ，使函数

(93) $$v(x,\ y)=u(x,\ y)e^{-(1+\lambda)(x-x_0)}$$

不在 $\triangle$ 的底边上到达最大正値。我們从这个假設来引出矛盾。如果最大值在 $\triangle$ 内部，在对应点应有 $v_x=v_y=0$，于是推出：$u_x-(1+\lambda)u=0,\ u_y=0\ (u>0)$，而这与在 $A=B=1$ 时的 (90) 相矛盾。若最大値出現在边 $x-x_0=y-y_1$ 上（不在 $\triangle$ 的頂点），則在对应点应当有 $v_y\leqslant 0$，并沿这一边微分，得 $v_x+v_y=0$。这样引出式子：

(94) $$u_y\leqslant 0;\ u_x=-u_y+(1+\lambda)u\quad (u>0),$$

仍然和当 $A=B=1$ 时的 (90) 相矛盾。若它發生在边 $x-x_0=-(y-y_2)$ 上，类似的可得 $v_y\geqslant 0,\ v_x-v_y=0$，于是

(95) $$u_y \geqslant 0;\quad u_x = u_y + (1+\lambda)u \quad (u>0),$$

仍和在 $A=B=1$ 时的(90)相矛盾。最后，假定說，函数(93)在三角形 $\triangle$ 的頂点达到最大正値。在任何情况下，我們必須在这点有 $v_x \geqslant 0$，即 $u_x \geqslant (1+\lambda)u$。若同时 $u_y=0$，我們仍导致和(90)相矛盾。若在頂点 $u_y<0$，則沿着边 $x-x_0=y-y_1$ 微分，得 $v_x+v_y \geqslant 0$，引出不等式：

$$u_y<0,\quad u_x \geqslant -u_y+(1+\lambda)u,$$

与 $A=B=1$ 时的(90)相矛盾。若在頂点 $u_y>0$，則沿着边 $x-x_0= -(y-y_2)$ 微分，也像上面一样得出矛盾。因此，引理当 $A=B=1$ 时得証。推广到一般情形，在三边为(88)的三角形上，我們有条件(90)及(91)。引入新的自变量 $x'=Bx$，$y'=\frac{B}{A}y$。三角形 $\triangle$ 变为三角形 $\triangle'$，其边为：

$$x'=Bx_0;\quad x'-Bx_0=y'-y_1';\quad x-Bx_0=-(y'-y_2')$$

$$\left(y_k'=\frac{B}{A}y_k\right),$$

又替代(90)我們有：

$$|u_{x'}| \leqslant |u_{y'}| + |u|,$$

而条件(91)仍旧有形狀 $|u(Bx_0, y')| \leqslant M$。由于上面的証明，我們得到在 $\triangle'$ 上 $|u(x', y')| \leqslant Me^{(x'-Bx_0)}$，或者回到原来的自变量，就得到在 $\triangle$ 上的不等式(92)。

轉到在条件(81)以及前面所作的假定下方程(82)的解的唯一性的証明。假設在上述的三角形 $\triangle$ 上有兩个解 $u_1(x, y)$，$u_2(x, y)$，而这兩个解也在 f 有連續导数的那样的区域內。此时我們能写出不等式：

$$|f(x, y, u_2, q_2)-f(x, y, u_1, q_1)| \leqslant B|u_2-u_1| + A|q_2-q_1|,$$

其中 A 和 B 是某个常数。以 p_1, p_2, q_1, q_2 来記关于 u_1 和 u_2 的相应的偏导数。因此

$$|p_2-p_1|\leqslant A|q_2-q_1|+B|u_2-u_1|。$$

对差 u_2-u_1 应用所証明的引理，并且注意到这差式在 $x=x_0$ 时为零(即 $M=0$)，我們从(92)可看到在整个三角形 △ 上 $u_2(x, y)-u_1(x, y)=0$，就是說，解的唯一性得証。方程(59)在柯西条件是任意曲綫的一般情形，可以用变数变换和关于一个导数解出微分方程的方法化为以上的研究。在[107]中我們也曾这样做过。

現在考虑在三角形 △ 上的方程(82)在不同条件

$$u_1|_{x=x_0}=\psi_1(y)；\quad u_2|_{x=x_0}=\psi_2(y)$$

下的兩个解 $u_1(x, y)$ 和 $u_2(x, y)$。对差式 (u_2-u_1) 应用引理，得到以下的在三角形 △ 上的不等式：

$$|u_2(x, y)-u_1(x, y)|\leqslant\max_{y_1<y<y_2}|\psi_2(y)-\psi_1(y)|e^{B(x-x_0)}$$

这不等式証明了解对于出現在公式(81)中的初始条件 $\psi(y)$ 的連續相关性。

还要指出与解柯西問題有关的一种情况。若函数 $\psi(y)$ 沒有連續的二阶导数，則应用柯西方法可以引出曲面 $u=u(x, y)$，而 $u(x, y)$ 沒有导数，能証明，在这种情形問題沒有有連續导数的解[赫尔，(Haar)，Acta Szeged, t. IV, fasc. II, 1928]。上述引理在更一般情形的証明，和它在偏微分方程的唯一性定理証明中的应用，可以在下面的牟希克斯的論文中找到："柯西問題解的唯一性"，数学科学的进展，卷 III，2 期 (A. Мышикс, "Единственность решения задачи Коши", Успехи Математических наук, том III, вып. 2)。

109. 奇异情形 假定說，我們已給定适合(80)的兩个关系式的長条，并且沿这長条行列式(87)等于零：

$$\Delta_0=x_sy_t-x_ty_s|_{s=0}=y_0'(t)F_{p_0}-x_0'(t)F_{q_0}=0。\tag{96}$$

假設存在通过这長条的积分曲面 $u=u(x, y)$，而 $u(x, y)$ 有到二

阶为止的連續导数。若 F_{p_0} 及 F_{q_0} 不同时等于零，則由(96)和(80)的第二个关系式推知我們的長条适合方程(66)，而参数 s 用字母 t 来記。然而在 [104] 中所推导的計算向我們指明，这長条滿足(68)中所有的方程。就是說，是特征長条。因此，当满足条件(96)时，如果存在积分曲面含有給定的長条，則这長条必須是特征長条，这里設 F_{p_0} 及 F_{q_0} 不同时等于零。此时完全和綫性方程的情形一样，通过这長条可引無穷多积分曲面。最后断言的証明和对綫性方程所做的一样。需要引某一長条 ω 与長条(74)有某公共点 (x_0, y_0, u_0) 以及在这一点的公共 p_0 和 q_0，并且沿新的長条 ω，行列式(87)异于零。通过这長条有确定的积分曲面，它含整个的特征長条(74)，因为它已含有后者的初始元素的緣故。由于長条 ω 选取的任意性，我們就有問題的無穷多个解。

如果沿給定的長条 $\Delta_0=0$，而長条不是特征的，若是要函数 $u(x, y)$ 有到二阶为止的連續导数的話，則問題就不可能解决。可是能够發生，長条所对应的曲綫是积分曲面的奇异曲綫的情形。同时要指出，在推导柯西方法时，我們曾經利用到函数 $u(x, y)$ 的二阶导数。若是等式(96)滿足，且長条不是特征的，則沿这長条只适合方程組(68)的前三个方程。

上面的議論有簡單的几何意义。如果給定了某曲綫 l，那末条件(80)的前一个表明沿这曲綫由量 $p_0(t)$ 和 $q_0(t)$ 所确定的平面应切于錐面 T，而第二条件等价于这平面应含有 l 的切綫。回忆起錐面母綫的方程(64)，我們看到，条件 $\Delta_0\neq 0$ 相当于那样的事实，沿曲綫 l，l 的切綫不和錐面 T 的母綫相合。方程(86)关于 $p_0(t)$ 和 $q_0(t)$ 的可解性归結为引包含 l 的切綫且与錐面 T 相切的那些平面的可能性。假定說，通过 l 的切綫我們能够引切于錐面 T 且沿 l 連續変动的平面（$p_0(t)$ 及 $q_0(t)$ 必須有連續导数）。

这样一来，我們把曲綫 l 补充成長条，并取这長条为解(73)的

初始值，就有了积分曲面。若 l 的切綫是錐面 T 的母綫，沿相应的母綫引錐面的切平面，則沿 T 我們有值 p_0 及 q_0。因此所得的長条能成为特征長条。在这种情形問題有無穷多个解。只要以另一曲綫 l_1 与曲綫 l 相交就行了，使 l_1 在交点的切綫落在切于 l 的同一平面上，但不和 l 的切綫相重合，因之，沿 l_1 的切綫不和錐面 T 的母綫相合。通过 l_1 所引的积分曲面將含有 l。最后可能發生，曲綫 l 的切綫重合于錐面 T 的母綫，但这曲綫不是特征的，就是說，依照上述方法补充而成的長条不是特征長条。在这情形下，从 l 的每一点我們始終能引具初始值 $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$ 的特征長条。若是这些特征長条形成有显式方程 $u=u(x, y)$ 的积分曲面，則曲綫 l 是所作的积分曲面上的奇綫。在这些討論中，我們假設在每一点有确定的錐面 T。

我們指出方程(59)的积分曲面的一个重要类型。我們固定了某一点 (x_0, y_0, u_0)。这时(80)的第二个关系式对于任何值 p_0 及 q_0 成立，因为在这种情形下，出現在关系式中的所有导数值等于零。我們只得到(80)的前一个方程，一般說来，它使我們对 p_0 及 q_0 有無穷多組值。这些恰好是在固定点 (x_0, y_0, u_0) 用来确定切平面的可能位置的值 p_0, q_0。我們可以像前面一样，假定 $p_0(t)$ 及 $q_0(t)$ 是某参数 t 的函数。把固定值 (x_0, y_0, u_0) 和上述的表示式 $p_0(t)$ 及 $q_0(t)$ 代入公式(73)，我們得到方程(59)的积分曲面，具有以 (x_0, y_0, u_0) 为頂点的錐面的形狀。一般說来，这曲面有曲的母綫，在頂点 (x_0, y_0, u_0) 和錐面 T 的母綫相切。这曲面通常称为方程(59)的以 (x_0, y_0, u_0) 为頂点的积分角錐。可以指出，柯西問題的解決能归結为以下的構圖。作頂点在給定曲綫 l 上的积分角錐，取它們的包絡就是問題的解。所有末尾的这些斷言，当然需要严格的分析証明，我們不去講它了。

110. 任意个数自变量。 考虑在任意个数自变量情形的一阶

方程：

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n)=0_{\circ} \tag{97}$$

求这样方程的积分的柯西方法，能完全像兩个自变量情形一样来推导，而我們只限于說明結果。对应于方程(97)的特征組有形狀：

$$\frac{dx_1}{P_1}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{du}{p_1P_1+\cdots+p_nP_n}=\frac{dp_1}{-(X_1+Up_1)}=\cdots=$$
$$=\frac{dp_n}{-(X_n+Up_n)}=ds \tag{98}$$
$$(X_k=F_{x_k};\ P_k=F_{p_k};\ U=F_u)_{\circ}$$

我們要指出推导方程組(98)形式上的步驟。假設有了方程(97)的解 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$，它有到二阶为止的連續导数。同时 X_k，P_k 及 U 經代換 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$ 和 $p_k=u_{x_k}(x_1, \cdots, x_n)$ 之后是 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的函数。

写出一阶方程組：

$$\frac{dx_k}{ds}=P_k \quad (k=1, \cdots, n),$$

其中 s 是輔助变数。將这方程組的解代入方程 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$，就有：

$$\frac{du}{ds}=\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{dx_i}{ds}=\sum_{i=1}^{n} p_iP_i,$$

并且恰恰一样：

$$\frac{dp_k}{ds}=\sum_{i=1}^{n} u_{x_kx_i}P_{i\circ}$$

然而关于 x_k 微分(97)，得到：

$$X_k+Up_k+\sum_{i=1}^{n} P_i\frac{\partial p_i}{\partial x_k}=X_k+Up_k+\sum_{i=1}^{n} u_{x_kx_i}P_i=0,$$

于是

$$\frac{dp_k}{ds}=-(X_k+Up_k)_{\circ}$$

这样，我們得到組 (98) 中所有方程。我們来仔細研究一下方程組 (98)，把它看作是关于輔助变数 s 的函数 x_k, u, p_k 的方程組。

它容有明显的积分：

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n)=C。$$

假定說，我們能求得所說方程組的积分：

$$\begin{cases} x_k=x_k(s, x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{(0)}) \\ u=u(s, x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{(0)}) \\ p_k=p_k(s, x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{(0)}), \end{cases} \tag{99}$$

其中 $x_k^{(0)}$, $u^{(0)}$, $p_k^{(0)}$ 是当 $s=0$ 时函数的初始值。將假設这些初始値是 $(n-1)$ 个参数的函数：

$$x_k^{(0)}(t_1, \cdots, t_{n-1}), \quad u^{(0)}(t_1, \cdots, t_{n-1}), \quad p_k^{(0)}(t_1, \cdots, t_{n-1})。 \tag{100}$$

把这些代入公式 (99)，我們就有变量 x_k 和 u 通过 n 个参数的表达式。考虑函数行列式

$$\Delta=\frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{D(s, t_1, \cdots, t_{n-1})},$$

由于組中第一个方程，我們可把它写为形狀：

$$\Delta=\begin{vmatrix} P_1, & \cdots, & P_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1}, & \cdots, & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}}, & \cdots, & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}。 \tag{101}$$

如果这行列式在初始値 $s=0$ 的鄰域内异于零，那末方程 (99) 使我們有积分曲面，它可以表示为显式 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$。为了这曲面是积分曲面，必需而且只需函数 (100) 滿足下面的 n 个关系式：

$$F(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}, u^{(0)}, p_1^{(0)}, \cdots, p_n^{(0)})=0 \tag{102}$$

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t_j}=\sum_{s=1}^{n} p_s^{(0)} \frac{\partial x_s^{(0)}}{\partial t_j} \quad (j=1, 2, \cdots, n-1)。 \tag{103}$$

柯西問題在于寻求方程(97)的含有給定的$(n-1)$維流形:

$$x_k^{(0)}(t_1, \cdots, t_{n-1}), \quad u^{(0)}(t_1, \cdots, t_{n-1})$$

的积分曲面,我們假設这流形已补充为流形(100),这就是說,滿足关系式(102)及(103)。这时,若是沿着这流形行列式(101)异于零,那末上述的方法就引出柯西問題的解,而且这解是唯一的。

完全同兩个自变量的情形一样,我們可以作方程(97)的积分角錐,固定某点$(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}, u^{(0)})$并选取$p_1^{(0)}, \cdots, p_n^{(0)}$为$(n-1)$个參数的函数,使滿足关系式(102)。

若方程(97)已关于p_1解出:

$$p_1 = f(x_1, \cdots, x_n, u, p_2, \cdots, p_n) \tag{104}$$

并且柯西条件有形狀:

$$u|_{x_1=x_1^{(0)}} = \psi(x_2, \cdots, x_n), \tag{105}$$

則柯西問題有一个确定的解。

我們不在这里引入对于f和ψ的連續性的及导数存在的一切条件。这可以和$n=2$时一样来做。对于有初始条件(105)的方程(104),在关于f和ψ的某些确定的条件下,可以判定积分曲面的存在区域。假設函数f对$|x_1-x_1^{(0)}|\leqslant a$和任意的$x_k$, p_k及u为連續且有連續导数f_{x_k}, f_{p_k}及f_u($k=2, \cdots, n$)。此外,假定这些导数有关于x_1, x_k, u及p_k的連續导数,并且对所述变量之值导数f_{x_1}, f_{x_k}, f_u, f_{p_k}, $f_{x_kx_l}$, f_{x_ku}, $f_{x_kt_l}$, f_{uu}, f_{up_k}, $f_{p_kp_l}$的絕对值不大于数A。更假定$\psi(x_2, \cdots, x_n)$有到二阶为止的連續导数,并且成立不等式:

$$|\psi_{x_k}| + \sum_{l=2}^{n} |\psi_{x_kx_l}| \leqslant B \quad (k=2, \cdots, n)。$$

这时,在$|x_1-x_1^{(0)}|\leqslant \alpha$和任意的$x_k$($k=2, \cdots, n$)的区域內,方程(104)在条件(105)之下的二次連續可微的解存在,其中$\alpha\leqslant a$,此外,且須滿足条件:

$$\alpha < \frac{1}{A}\lg\left[1+\frac{\lg 3}{2(n-1)(B+1)}\right]$$

[參看康姆凱(Kamke), Math. Zeitschr. Bd. 49, Heft 3, 1943]。

111. 全积分,通积分和奇积分 在这一段和下一段我們指出方程

(106)
$$F(x, y, u, p, q)=0$$
其他的求积分方法，特别是，柯西問題的解法。在具体的例子中，飞常常容易导出問題的解。在柯西方法的叙述中，我們講过应用这个方法的条件以及柯西問題的解的存在性和唯一性的条件。現在我們主要是注意問題形式上的一面，并且广泛利用与一个或兩个參变数有关的曲面族的包絡論。

在应用柯西方法求方程(106)的积分时，我們要能完全积分出对应的常微分方程組：

(107)
$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{pP+qQ}=\frac{dp}{-(X+Up)}=\frac{dq}{-(Y+Uq)}。$$
現在我們指出，方程(106)的积分問題只需要知道这个方程的与兩个任意常数有关的解。假設我們有这样的解：

(108)
$$u=\varphi(x, y, a, b),$$
其中 a 与 b 是任意常数。偏导数 p 及 q 將表示为公式：

(109)
$$p=\varphi_x(x, y, a, b);\quad q=\varphi_y(x, y, a, b),$$
由此推知，我們將有以下关系式：

(110)
$$F[x, y, \varphi(x, y, a, b), \varphi_x(x, y, a, b), \varphi_y(x, y, a, b)]=0,$$
此式不仅对 (x, y) 而且对 (a, b) 必須恒为满足。我們假設从(108)及(109)的三个关系式能消去 a 及 b，并且这样消去后就引出方程(106)。在这种情形，方程(106)的解(108)称为这个方程的全积分。不难从全积分得到方程的其他解。假定說，在公式(108)中常数 b 是常数 a 的某函数，即 $b=\omega(a)$。这样，我們引出一族积分曲面，和一个參数有关：

(111)
$$u=\varphi[x, y, a, \omega(a)]。$$
从方程(111)和方程

(112)
$$\varphi_a[x, y, a, \omega(a)]+\varphi_b[x, y, a, \omega(a)]\omega'(a)=0$$
消去 a 而得的族的包絡沿与被包曲面的切綫有同样的 p 及 q，所

以包络也是方程 (106) 的积分曲面。当任意选取可微函数 $\omega(a)$ 时,所有这种积分曲面的全体組成方程(106)的通积分。如我們見到的这积分就含任意函数 $\omega(a)$。我們甚至可以作出与兩个参数 a 及 b 相关的积分曲面族 (108) 的包絡。这要从方程 (108) 及方程:

$$(113)\qquad \varphi_a(x, y, a, b)=0;\quad \varphi_b(x, y, a, b)=0$$

消去 a 和 b。所得积分曲面不含任何任意的元素,而通常称为方程 (106) 的奇积分。当然,这时我們假設所有上述的消去是可能的,并且导出的函数有連續导数。

代替所述几何上的考察,我們利用任意常数变易法也可以得到通积分和奇积分。要求出方程(106)的形狀(108)的解,把 a 及 b 視为 (x, y) 的未知函数。函数 u 的偏导数就不再依公式 (109) 来計算,而是照下面公式:

$$p=\varphi_x+\varphi_a a_x+\varphi_b b_x;\quad q=\varphi_y+\varphi_a a_y+\varphi_b b_y.$$

若对未知函数 a 和 b 添加兩个关系式:

$$(114)\qquad \varphi_a a_x+\varphi_b b_x=0;\quad \varphi_a a_y+\varphi_b b_y=0,$$

于是偏导数的表达式仍如以前,而函数(108)也像过去一样給出积分曲面。一切問題归結到方程 (114) 的研究。这兩方程有明显的解:$a=$常数和 $b=$常数,这仍然导出全积分。第二个明显的解只要 a 和 b 滿足关系式:

$$\varphi_a=0;\quad \varphi_b=0$$

就可得到。这样引出奇积分。若这些等式至少有一个不滿足,那末关于 φ_a 及 φ_b 的齐次方程組(114)的行列式必須为零:

$$\begin{vmatrix} a_x, & b_x \\ a_y, & b_y \end{vmatrix}=0.$$

这时我們假設 a 和 b 不同时为常数。这个函数行列式等于零使我們能引出 a 与 b 間的关系式 [III$_1$; 18]。假定説,这关系有形狀

$b=\omega(a)$。这时方程(114)化为一个，而能写成

$$\varphi_a+\varphi_b\omega'(a)=0,$$

这样得到通积分。可以証明，在某些条件下，上述的解包括了方程(106)的一切解。实質上，問題归結为有了全积分，我們就能解柯西問題。

112．全积分和柯西問題　現在指出，怎样从全积分推出柯西問題的解。假設需要求出积分曲面使通过曲綫：

$$x=x(t);\quad y=y(t);\quad u=u(t)。\tag{115}$$

問題归結到寻求由等式(111)和(112)所确定的通积分中的函数 $b=\omega(a)$，使所得的积分曲面通过曲綫(115)。預先講明包絡面的一个性質。設有單参数曲面族：

$$\psi(x,\ y,\ u,\ a)=0。\tag{116}$$

假定說，对曲綫(115)的每一点 M 有族(116)中曲面通过，而这曲面在点 M 的切平面含有曲綫 (115) 在 M 点的切綫。要証明在这种情形下，族 (116) 的包絡含有曲綫 (115)。实际上，按条件我們有：

$$\psi[x(t),\ y(t),\ u(t),\ a]=0,\tag{117}$$

而且对应于曲綫 (115) 不同的点 M 有不同的常数値 a，也就是族(116)中不同的曲面。关于 t 微分上面的等式，得到：

$$\psi_x x_t+\psi_y y_t+\psi_u u_t+\psi_a a_t=0。$$

另一方面，族(116)中曲面的切平面含有曲綫(115)的切綫的事实，使我們导出恒等式：

$$\psi_x x_t+\psi_y y_t+\psi_u u_t=0,\tag{118}$$

并且这后面的兩个恒等式給出 $\psi_a a_t=0$，或者由于 $a_t\neq0$，我們有 $\psi_a=0$。因此，函数(115)关于 t 恒滿足方程 $\psi=0$ 及 $\psi_a=0$，就是說，族(116)的包絡确实含曲綫(115)。

現在假定我們有方程(106)的全积分，把它用隐式表出：

$$(119)\qquad \psi(x, y, u, a, b)=0。$$

我們必須确定函数 $b=\omega(a)$，使得满足关系式(117)和(118)。方程(118)的左边是方程(117)的左边关于 t 的导数。用 $\Psi(t, a, b)$ 来記把函数(115)代入方程(119)左边的結果。这样我們必須写出两个方程：

$$(120)\qquad \Psi(t, a, b)=0;\quad \Psi_t(t, a, b)=0。$$

从这些等式消去 t，我們就有 a 与 b 之間的关系式，就是說，找到了所求的函数：$b=\omega(a)$。因此，为依照全积分来解柯西問題，需要將函数(115)代入全积分的方程，关于 t 微分所得的方程，并从这样作出的两个方程消去 t。这就使我們导出常数 a 和 b 間的关系式。对应于这关系式的通积分就通过曲綫(115)。

也可以按另一种方式来进行，从(120)用 t 来表出 a 及 b。代入(119)得到与單参数 t 有关的曲面族。求这族的包絡，就得到所求的通过曲綫(115)的积分曲面。

还要指出通积分概念与作为求方程組(107)的积分的結果而得到的特征長条之間的关系。族(111)的包絡和被包曲面之一沿某曲綫 l_a 相切。沿这曲綫引包絡和被包曲面的公共切平面，我們得到某長条，这長条屬于两个积分曲面，就是說，屬于包絡和被包曲面，于是推知，它必須是特征長条。因此，我們可以断定，下面的公式：

$$(121)\qquad \begin{cases} u=\varphi(x, y, a, b);\ \varphi_a(x, y, a, b)+\varphi_b(x, y, a, b)\omega'(a)=0 \\ \qquad p=\varphi_x(x, y, a, b);\ \ q=\varphi_y(x, y, a, b) \end{cases}$$

对任意固定的 a 和任意选取的 $b=\omega(a)$ 确定了方程組(107)的满足条件(106)的解。

我們可以認为公式(121)确定了量 x, y, u, p, q 中的四个为第五个和三个任意常数 a, b 及 $c=\omega'(a)$ 的函数。方程組(107)的通积分含四个任意常数。然而，由于关系式(106)的出現，所有特

征長条構成之族应只和三个任意常数有关，这就是我們按照公式(121)所得到的。在以后的某一段中，对于任意个数自变量的情形，我們要用直接計算的方法来驗証方程(121)确实給出組(107)的解的那个事实。

要講明，不用全积分而直接按微分方程来确定奇积分的可能性。关于 a 及 b 微分恒等式(110)，我們得到

$$F_u\varphi_a+F_p\varphi_{xa}+F_q\varphi_{ya}=0;\quad F_u\varphi_b+F_p\varphi_{xb}+F_q\varphi_{yb}=0。$$

考慮到奇积分(118)的定义，我們可以断定在奇积分曲面上滿足以下二等式：

$$F_p\varphi_{xa}+F_q\varphi_{ya}=0;\quad F_p\varphi_{xb}+F_q\varphi_{yb}=0。$$

將假設所写关于 F_p 及 F_q 的齐次方程組的行列式在奇积分曲面上异于零，这实質上归結为关于方程(109)对 a 和 b 可解性的假設。同时，写出的齐次方程組使我們有

$$F_p=F_q=0。\tag{122}$$

因此，奇积分可以由以下的三个方程消去 p 及 q 而得到：

$$F(x, y, u, p, q)=0;\quad F_p(x, y, u, p, q)=0;\quad F_q(x, y, u, p, q)=0。\tag{123}$$

方程(122)表明对方程(106)关于变量 p 或 q 不可能应用隐函数定理。这証明了奇积分不可能在解柯西問題的結果中得到，因为我們在[107]所做的，是假設方程关于 p（或 q）为可解出的。我們也可用别的方法达到这个結論。我們在奇积分曲面上任意取曲綫，由于条件(122)，沿这曲綫行列式(96)等于零，这表明对于任意取在奇积分曲面上的曲綫，不存在柯西問題确定的解。

113. 例. 1. 方程

$$u=xp+yq+f(p, q)\tag{124}$$

类似于我們很早考慮过的克来洛方程[II; 8]。不难驗証，把 p 与 q 换为 a 与 b，就得到它的全积分：

$$u=ax+by+f(a, b)。$$

方程
$$u=xp+yq+pq$$
有全积分：
$$u=ax+by+ab,$$
并应用上述方法，得到奇积分：
$$u=-xy。$$
如果我們在这曲面上取任意曲綫：

(125) $$x_0=\varphi(t);\quad y_0=\psi(t);\quad u_0=-\varphi(t)\psi(t),$$

則方程(86)：
$$\varphi(t)p_0+\psi(t)q_0+p_0q_0+\varphi(t)\psi(t)=0$$
$$\varphi'(t)\psi(t)+\psi'(t)\varphi(t)+\varphi'(t)p_0+\psi'(t)q_0=0$$
有解 $p_0=-\psi(t)$，$q_0=-\varphi(t)$，并且沿曲綫(125)我們將有
$$F_{p_0}=q+\varphi(t)=0;\quad F_{q_0}=p+\psi(t)=0。$$
对方程

(124₁) $$u=xp+yq-\frac{1}{2}(p^2+q^2),$$

奇积分为：

(126) $$u=\frac{1}{2}(x^2+y^2)。$$

若关于 p 解方程 (124₁)，我們得到：
$$F=p-x+\sqrt{x^2+2qy-2u-q^2}=0,$$
并且，沿曲面(126)方程左边关于 u 的偏导数成为無穷大。

2. 設有仅含 p 及 q 的方程：
$$f(p,\ q)=0。$$
这方程有明显的解：
$$u=ax+cy+b,$$
其中常数 a 和 c 必須满足关系式：$f(a,\ c)=0$。將它关于 c 解出：$c=f_1(a)$，得到方程的以下形狀的全积分：
$$u=ax+f_1(a)y+b。$$
这方程給出某平面族。通积分是單参数平面族的包絡，也就是可展曲面[II; 141]。

作为例子考慮方程：

(127) $$p^2+q^2=k^2。$$

注意到所求曲面的法綫与 u 軸的方向余弦由公式：
$$\cos(n,\ u)=\pm\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

表示，我們看到，方程(127)归結为所求积分曲面的法綫与 u 軸構成定角的要求。方程的全积分是平面族：

$$u=ax+\sqrt{k^2-a^2}\,y+b。$$

方程組(68)写为形狀：

$$\frac{dx}{ds}=2p;\quad \frac{dy}{ds}=2q;\quad \frac{du}{ds}=2(p^2+q^2);\quad \frac{dp}{ds}=0;\quad \frac{dq}{ds}=0,$$

而它的按初始条件所表出的解为：

(128) $x=2p_0s+x_0;\quad y=2q_0s+y_0;\quad u=2(p_0^2+q_0^2)s+u_0;\quad p=p_0;\quad q=q_0。$

只要 p_0 和 q_0 受条件 $p_0^2+q_0^2=k^2$ 的限制，我們就得到特征長条。这是某些直綫，且沿这些直綫 p 和 q 保持常数值。

假設要求引出过圓周：

$$x_0=\cos t;\quad y_0=0;\quad u_0=\sin t$$

的积分曲面。在所給的情形，方程(86)的形狀如下：

$$p_0^2+q_0^2=k^2;\quad \cos t=-p_0\sin t,$$

于是 $$p_0=-\operatorname{ctg} t;\quad q_0=\sqrt{k^2-\operatorname{ctg}^2 t}。$$

代入(128)中前面三个方程，得到通过参数 s 和 t 表示的所求曲面的参数方程：

$$x=-2s\operatorname{ctg} t+\cos t;\quad y=2s\sqrt{k^2-\operatorname{ctg}^2 t};\quad u=2k^2s+\sin t。$$

3. 以下类型：

$$f_1(x,\ p)=f_2(y,\ q)$$

的一阶方程是比較一般些了。为了求全积分，置方程的兩边等于同一常数 a：$f_1(x,\ p)=a$ 及 $f_2(y,\ q)=a$。关于 p 及 q 解这些方程，得：$p=\varphi_1(x,\ a)$ 及 $q=\varphi_2(y,\ a)$，而全积分写成形狀：

$$u=\int\varphi_1(x,\ a)dx+\int\varphi_2(y,\ a)dy+b,$$

其中 b 是第二个任意常数。把这方法应用到方程：

(129) $$pq-xy=0\ 或\ \frac{p}{x}=\frac{y}{q},$$

得出：

(130) $$u=\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{2a}y^2+b。$$

假設要求引出通过曲綫：

$$x=t;\quad y=\frac{1}{t};\quad u=1$$

的积分曲面。將上面三式代入(130)并关于 t 微分，得

$$1=\frac{1}{2}at^2+\frac{1}{2at^2}+b;\quad at-\frac{1}{at^3}=0。$$

消去 t 給出 $b=0$，于是我們得到單参数积分曲面族：

$$u=\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{2a}y^2,$$

这族的包絡引出所求的积分曲面：

$$u=xy。$$

若取曲綫

(131) $$x=t;\quad y=t;\quad u=t^2$$

作初始条件，那么，应用以上方法我們引出方程：

$$\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2a}-1\right)t^2+b=0;\quad 2\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2a}-1\right)t=0,$$

由是推出 $a=1,\ b=0$，而我們不可能求出通过曲綫(131)的积分曲面。不难見到，置 $p=t$ 及 $q=t$，我們能补充曲綫(131)成特征長条。实际上，函数

$$x=t;\quad y=t;\quad u=t^2;\quad p=t;\quad q=t$$

滿足方程(129)和方程組(107)。

4. 若方程不含自变量：

$$F(u,\ p,\ q)=0,$$

只要求到方程的下面形狀

(132) $$u=\varphi(x+ay)$$

的解，其中 a 是任意常数，那末就可以作出全积分。作为例題考虑方程：

(133) $$pq-u=0。$$

施行代換(132)并置 $\xi=x+ay$，得到：

$$a[\varphi'(\xi)]^2-\varphi(\xi)=0,$$

并求这常微分方程的积分，得到方程(133)的全积分：

$$u=\frac{(x+ay+b)^2}{4a}。$$

对于方程(133)，方程組(68)有形狀：

$$\frac{dx}{ds}=q;\quad \frac{dy}{ds}=p;\quad \frac{du}{ds}=2pq;\quad \frac{dp}{ds}=p;\quad \frac{dq}{ds}=q,$$

并且对它求积分，給出：

(133₁) $$x=q_0e^s+(x_0-q_0);\quad y=p_0e^s+(y_0-p_0);\quad u=p_0q_0e^{2s}+(u_0-p_0q_0)$$
$$p=p_0e^s;\quad q=q_0e^s。$$

假設要求通过直綫:

$$x_0=t;\quad y_0=1;\quad u_0=t$$

的积分曲面。为了确定 p_0 及 q_0，有方程:

$$p_0q_0=t;\quad p_0=1,$$

于是，$p_0=1$ 及 $q_0=t$。代入(133_1)的前面三个方程并置 $e^s=v$，得到所求曲面的参数方程，通过参数 v 及 t 表示为:

$$x=tv;\quad y=v;\quad u=tv^2,$$

或者，在显形式下: $u=xy$。

114. 任意个数自变量的情形 方程:

$$F(x_1,\cdots,x_n,u,p_1,\cdots,p_n)=0 \tag{134}$$

的全积分是指方程的含 n 个任意常数 a_s 的这样的解:

$$u=\varphi(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n), \tag{135}$$

使能从方程:

$$p_k=\varphi_{x_k}(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)\quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{135$_1$}$$

和方程(135)消去 a_s 就导出方程(134)。將 a_k 看作$(n-1)$个参数的函数:

$$a_k=a_k(t_1,\cdots,t_{n-1})\quad (k=1,2,\cdots,n)。 \tag{136}$$

把这些表达式代入公式(135)并从 n 个方程:

$$\begin{aligned}&u=\varphi(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)\\&\varphi_{t_j}(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)=0\quad (j=1,\cdots,n-1)\end{aligned} \tag{137}$$

消去$(n-1)$个参数，我們得到方程(134)的通积分。它和 n 个函数(136)的选取有关。轉来解柯西問題。設需要求出方程(134)的积分曲面，使含有給定的$(n-1)$維流形:

$$u=u(t_1,\cdots,t_{n-1});\quad x_k=x_k(t_1,\cdots,t_{n-1})\quad (k=1,2,\cdots,n)。 \tag{138}$$

这个問題的解决完全像兩个自变量的情形一样来进行。把表达式(138)代入公式(135)，我們得到下面形狀的等式:

$$\psi(t_1,\cdots,t_{n-1},a_1,\cdots,a_n)=0。 \tag{139}$$

对这等式添上把它关于 $t_1,\cdots,t_{n-1}$ 微分所得到的$(n-1)$个等式:

$$(140) \qquad \psi_{t_1}=0;\ \psi_{t_2}=0;\ \cdots;\ \psi_{t_{n-1}}=0,$$

就有 n 个方程，从它們能确定 $a_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 为参数 $t_1, \cdots, t_{n-1}$ 的函数，就是說，从这 n 个方程确定函数(136)。將所得的函数代进公式(137)，并从(137)的 n 个方程消去 $t_1, \cdots, t_{n-1}$，就有了含流形(138)的积分曲面。注意到在公式(139)中独立参数的数目可能是小于$(n-1)$。这时需要关于独立参数来微分以代替(140)。

若是固定参数值 t_j，那末$(n+1)$个变数$(u, x_1, \cdots, x_n)$的 n 个方程(137)在$(n+1)$維空間确定某曲綫。再联合方程(135_1)，把这曲綫补充为一阶長条，这長条屬于兩个积分曲面：从方程(137)消去参数 t_j 而得的包絡曲面和一个被包曲面；所以这長条必須是特征長条，就是說，必須滿足柯西方程組(98)。这使得在知道了全积分(135)以后，有作出方程組(98)的和$(2n-1)$个任意常数有关的解的可能性。为了簡便起見，將 a_n 看作$(a_1, \cdots, a_{n-1})$的函数，而后面这些量起参数 $t_1, \cdots, t_{n-1}$ 的作用。公式(137)及(135_1)取形狀：

$$u=\varphi(x_1, \cdots, x_n, a_1, \cdots, a_n)$$

$$(141) \qquad \varphi_{a_j}+\varphi_{a_n}b_j=0 \quad (j=1, 2, \cdots, n-1)$$

$$p_k=\varphi_{x_k}(x_1, \cdots, x_n, a_1, \cdots, a_n) \quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

其中 b_j 是我們用来記 a_n 关于 a_j 的导数的。公式(141)确定上述一阶長条，由于函数 $a_n(a_1, \cdots, a_{n-1})$ 是任意选取的，不仅 $a_1, \cdots, a_n$ 而且 $b_1, \cdots, b_{n-1}$ 可以算作是任意的。我們形式地来証明由公式(141)所确定的長条滿足方程組(98)。

在方程(134)中把 u 及 p_k 用它們的表达式(141)来代，我們应当得到关于 x_k 及 $a_k(k=1, \cdots, n)$ 的恒等式。关于 a_j 微分这恒等式，得到：

$$U\varphi_{a_j}+\sum_{k=1}^{n} P_k\varphi_{x_k a_j}=0 \quad (j=1, 2, \cdots, n-1)$$

$$U\varphi_{u_n}+\sum_{k=1}^{n}P_k\varphi_{x_k u_n}=0。$$

以 b_j 乘最末的等式而与其前面的式子相加，并利用(141)，我們就有以下的 $(n-1)$ 个等式：

$$\sum_{k=1}^{n}P_k(\varphi_{a_jx_k}+\varphi_{a_nx_k}b_j)=0\quad(j=1,2,\cdots,n-1)。\tag{142}$$

他方面，取(141)的第二个方程左边的全微分，我們得到以下的 $(n-1)$ 个等式：

$$\sum_{k=1}^{n}(\varphi_{a_jx_k}+\varphi_{a_nx_k}b_j)dx_k=0\quad(j=1,2,\cdots,n-1)。\tag{143}$$

假設由方程組(142)或(143)的系数組成的 $(n-1)$ 阶行列式至少有一个异于零，我們可以断定 dx_k 必須和 P_k 成比例，就是說，满足关系式：

$$\frac{dx_1}{P_1}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n}。$$

其次，从(141)推出 $du=\sum_{k=1}^{n}p_kdx_k$，我們可以补充以上所写的等式为：

$$\frac{dx_1}{P_1}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{du}{p_1P_1+\cdots+p_nP_n}。\tag{144}$$

我們重新回到一个恒等式，它是在方程(134)中把 u 和 p_k 用它們的表达式(141)来代所得到的，并关于 x_k 微分这个恒等式：

$$X_k+U\varphi_{x_k}+\sum_{i=1}^{n}P_i\varphi_{x_ix_k}=0。$$

以 dx_k 来乘并用(144)作代换 $P_idx_k=P_kdx_i$，我們得到：

$$(X_k+Up_k)dx_k+P_k\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_ix_k}dx_i=0。$$

可是，

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_ix_k}dx_i=dp_k,$$

由此推知：

$$(X_k+Up_k)dx_k+P_kdp_k=0,$$

就是說，
$$\frac{dx_k}{P_k}=\frac{dp_k}{-(X_k+Up_k)},$$
因此我們得到最后的方程組：

$$(145)\qquad \frac{dx_1}{P_1}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{du}{p_1P_1+\cdots+p_nP_n}=$$
$$=\frac{dp_1}{-(X_1+Up_1)}=\cdots=\frac{dp_n}{-(X_n+Up_n)}。$$

115. 雅可比定理 現在考慮方程 (134)，当它不包含未知函数 u，而关于导数之一是解出的那种特殊情形。为了写来对称起見，用 $t, x_1, \cdots, x_n$ 記自变量，并且假定方程关于 $p_0=u_t$ 解出，就是說，它有形狀：

$$(146)\qquad p_0+H(t, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)=0。$$

对应于这个方程的方程組(145)写为形狀：

$$(147)\qquad \frac{dt}{1}=\frac{dx_1}{H_{p_1}}=\cdots=\frac{dx_n}{H_{p_n}}=\frac{dp_1}{-H_{x_1}}=\cdots=\frac{dp_n}{-H_{x_n}}=$$
$$=\frac{du}{p_0+p_1H_{p_1}+\cdots+p_nH_{p_n}}。$$

除了最末一个之外所有写出的比式皆不含 p_0 与 u，我們就得到所謂标准微分方程組：

$$\frac{dx_k}{dt}=H_{p_k};\quad \frac{dp_k}{dt}=-H_{x_k}\quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

而 x_k 与 p_k 我們看作是 t 的函数，如果我們能够求这方程組的积分，則从 (146) 可求 p_0，而 u 从方程：$du=(p_0+p_1H_{p_1}+\cdots+p_nH_{p_n})dt$ 借助于求积法而确定。

因为方程(146)不含 u，对这方程的每个解我們可以加上任意常数。假定說，我們有方程(146)的全积分，它应当含有 $(n+1)$ 个任意常数，而其中的一个为附加項的形狀：

$$u=\psi(t, x_1, \cdots, x_n, a_1, \cdots, a_n)-a_0。$$

对所給的情形应用等式 (141)，而常数 a_0 起 a_n 的作用。注意到，

在这情形下，$\varphi_{a_0}=-1$，我們得到标准微分方程組的以下形狀的通积分：

$$\psi_{a_k}=b_k;\ p_k=\psi_{x_k}\quad (k=1, 2, \cdots, n)。$$

这样建立了我們以前[82]已經提过的著名的雅可比定理。

注意到，若是方程(134)不含未知函数 u 但尚未关于任何 p_k 解出，就是說，有形狀：

$$F(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)=0,$$

那末对应于这方程的方程組(145)为：

$$\frac{dx_1}{F_{p_1}}=\cdots=\frac{dx_n}{F_{p_n}}=\frac{dp_1}{-F_{x_1}}=\cdots=\frac{dp_n}{-F_{x_n}}=$$

$$=\frac{du}{p_1F_{p_1}+\cdots+p_nF_{p_n}}=ds,$$

我們仍然得到标准微分方程組：

$$\frac{dx_k}{ds}=F_{p_k};\quad \frac{dp_k}{ds}=-F_{x_k}\quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

在这里輔助参数 s 起自变量的作用，若我們能积分这方程組，則 u 可用求积法得到。

以上所說的雅可比定理向我們表明，有了方程(146)的全积分，我們如何求所对应的标准微分方程組的积分。相反的，在[110]中所述的柯西方法指出，若能积分了方程組(147)，我們就可以求到方程(146)的滿足任何柯西初始条件的解，并且利用了这个，不难証明，特別是也能作出方程(146)的全积分。

116. 兩个一阶方程的方程組　我們曾介紹过許多例題，那时的全积分能够完全用初等的方法求到。現在产生关于对任意一阶方程求全积分的一般方法的建立的可能性問題。为了叙述这种方法，我們必須預先考察关于一个未知函数的兩个一阶方程：

$$F(x, y, u, p, q)=0;\quad \Phi(x, y, u, p, q)=0$$

的求解問題。將假設这些方程关于 p 及 q 可解，而使我們有以下

形状的方程：

(148) $$p=f(x, y, u);\quad q=g(x, y, u)。$$

若是它有与任意常数有关的解，我們将称所写的方程組为完全可积。要讲明这种情况发生的必要和充分条件，并在这些条件滿足时，給出求解的方法。将(148)的第一个方程对 y，第二个对 x 微分，我們显然得到：

$$f_y+f_u q=g_x+g_u p,$$

或者，由于(148)：

(149) $$f_y+f_u g=g_x+g_u f。$$

如果写出的变量 (x, y, u) 之間的关系式不恒滿足，則它确定 u 是 x 及 y 的函数，而且只有这个不含任意常数的函数可能是方程組(148)的解。因此，恒滿足关系式(149)是方程組(148)完全可积的必要条件。要証明它也是充分的，并且同时給出求方程組(148)的解的方法。我們可以把(148)的第一个方程看为一个自变量 x 的方程，因此 y 是作为参数在这方程中出現。求这个一阶方程的积分，我們得到 u 作为自变量 x，参数 y 和任意常数 $C(y)$ 的函数，这里 $C(y)$ 可以看为 y 的函数：

(150) $$u=\varphi[x, y, C(y)]。$$

这函数也应当滿足(148)的第二个方程，就是說，应滿足方程：

$$\varphi_y+\varphi_C\frac{dC}{dy}=g(x, y, u),$$

或

(151) $$\frac{dC}{dy}=\frac{g(x, y, u)-\varphi_y}{\varphi_C},$$

而在右边 u 須换为它的表达式(150)。現在証明，若是关系式(149)恒滿足，則(151)的右边不含 x。实际上，把(151)的右边关于 x 的导数等于零。我們得到：

(152) $$(g_x+g_u\varphi_x-\varphi_{yx})\varphi_C-\varphi_{Cx}(g-\varphi_y)=0。$$

然而，由于函数(150)满足(148)的第一个方程，我们就有以下明显的关系式：

$$\varphi_x = f;\quad \varphi_{yx} = f_y + f_u\varphi_y;\quad \varphi_{Cx} = f_u\varphi_C,$$

并且用这些关系式，条件(152)能写成形状：

$$(g_x + g_u f - f_y - f_u\varphi_y)\varphi_C - f_u\varphi_C(g - \varphi_y) = 0,$$

而因为我们假定关系式(149)是恒满足的，故它显然成立。因之，这时方程(151)是关于 $C(y)$ 的一阶方程，将它积分，我们得到 C 通过 y 和任意常数 b 的表达式。把这个表达式代进公式(150)，就有了方程组(148)的含一个任意常数的解。因此，方程组(148)完全可积的必要和充分的条件是关系式(149)恒满足。若这条件满足，则求方程组(148)的积分归结到积分两个一阶常微分方程，而方程组(148)的通解含一个任意常数。

和所解决的问题有直接联系的是全微分方程

(153)
$$Pdx + Qdy + Rdu = 0$$

的积分问题，其中 P, Q 及 R 是 (x, y, u) 的已知函数。若置

$$f = -\frac{P}{R},\qquad g = -\frac{Q}{R},$$

这方程立即化为方程组(148)，并且在这情形下，可积条件(149)化为系数之间的以下的关系式：

$$P(R_y - Q_u) + Q(P_u - R_x) + R(Q_x - P_y) = 0。$$

我们很早已经指出过这个关系式是方程(153)完全可积的必要和充分条件了[Ⅱ;76]。

117. 拉格朗日-夏比方法 这个方法给出两个自变量的一阶偏微分方程：

(154)
$$F(x, y, u, p, q) = 0$$

的全积分的一般作法。设法求出下面形状的第二个方程：

(155)
$$\Phi(x, y, u, p, q) = a,$$

其中 a 是任意常数，使得方程(154)和(155)关于 p 与 q 是可解的，而且解出之后所得形状 (148) 的方程组为完全可积的。若是我们能这样做了，那末积分所得的方程组，我们又引进一个任意常数 b，因此我们得到方程(154)的全积分。完全可积条件(149)能写为形状：

(156) $$p_y + p_u q = q_x + q_u p。$$

我们必须计算出现在这等式中的所有偏导数，而要应用由方程(154)和(155)所确定的以(x, y, u)为变量的隐函数 p 与 q 的微分法则。关于 u 微分关系式(154)及(155)，我们得到：

$$F_u + F_p p_u + F_q q_u = 0; \quad \Phi_u + \Phi_p p_u + \Phi_q q_u = 0,$$

于是，

$$p_u = -\frac{\begin{vmatrix} F_u, & F_q \\ \Phi_u, & \Phi_q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p, & F_q \\ \Phi_p, & \Phi_q \end{vmatrix}}; \quad q_u = -\frac{\begin{vmatrix} F_p, & F_u \\ \Phi_p, & \Phi_u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p, & F_q \\ \Phi_p, & \Phi_q \end{vmatrix}}。$$

按照完全类似的方法，关于 x 和 y 微分，我们就有：

$$q_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_p, & F_x \\ \Phi_p, & \Phi_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p, & F_q \\ \Phi_p, & \Phi_q \end{vmatrix}}, \quad p_y = -\frac{\begin{vmatrix} F_y, & F_q \\ \Phi_y, & \Phi_q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p, & F_q \\ \Phi_p, & \Phi_q \end{vmatrix}},$$

于是可积条件(156)写成形状：

$$-\begin{vmatrix} F_y, & F_q \\ \Phi_y, & \Phi_q \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F_u, & F_q \\ \Phi_u, & \Phi_q \end{vmatrix} q + \begin{vmatrix} F_p, & F_x \\ \Phi_p, & \Phi_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_p, & F_u \\ \Phi_p, & \Phi_u \end{vmatrix} p = 0,$$

或是

(157) $$\begin{vmatrix} F_p, & F_x + F_u p \\ \Phi_p, & \Phi_x + \Phi_u p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_q, & F_y + F_u q \\ \Phi_q, & \Phi_y + \Phi_u q \end{vmatrix} = 0。$$

展开行列式并利用［104］中记号，我们得到下面的决定未知函数Φ

的偏微分方程：

(158)
$$P\Phi_x+Q\Phi_y+(pP+qQ)\Phi_u-(X+Up)\Phi_p-(Y+U_q)\Phi_q=0。$$

严格地说，若在其中把 p 和 q 换为它们的表达式(154)和(155)，这方程必须满足。然而我们将要求得高一些，就是要它恒满足。对应于线性齐次方程(158)的常微分方程组恰好是柯西方程组(107)：

(159)
$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{pP+qQ}=\frac{dp}{-(X+Up)}=\frac{dq}{-(Y+Uq)}。$$

我们求到这方程组的任意一个积分就足以使得方程(154)和(155)关于 p 及 q 一齐解出。

我们知道方程组(159)有明显的积分 $F=C$。有了这个积分就便于求出方程组的其他积分。同时我们不仅能利用上述的积分，而且简单地能利用关系式 $F=0$。

若方程(154)不包含未知函数 u，就是说，有形状：

$$F(x,y,p,q)=0,$$

那末我们可以求到与 u 也无关的积分：

$$\Phi(x,y,p,q)=a。$$

此时条件(157)写为形状：

(160)
$$\begin{vmatrix} F_p, & F_x \\ \Phi_p, & \Phi_x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} F_q, & F_y \\ \Phi_q, & \Phi_y \end{vmatrix}=0,$$

或是展开的形状：

$$(F_p\Phi_x-F_x\Phi_p)+(F_q\Phi_y-F_y\Phi_q)=0,$$

这导致求以下方程组的积分：

(161)
$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dp}{-X}=\frac{dq}{-Y}。$$

公式(160)左边的表达式称为函数 F 与 Φ 的普阿松括号而用符号 (F,Φ) 来记。公式(157)左边的表达式称为函数 F 与 Φ 的梅耶括号而用符号 $[F,\Phi]$ 来记。若对与变量 (x,y,u,p,q) 有关的任意函数 ω 引进记号，就是置：

$$\frac{d\omega}{dx}=\omega_x+\omega_u p;\quad \frac{d\omega}{dy}=\omega_y+\omega_u q,$$

那末梅耶括号可以写成形狀：

$$(162)\qquad [F,\Phi]=\begin{vmatrix} F_p, & \frac{dF}{dx} \\ \Phi_p, & \frac{d\Phi}{dx}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} F_q, & \frac{dF}{dy} \\ \Phi_q, & \frac{d\Phi}{dy}\end{vmatrix}。$$

若是普阿松括号或梅耶括号成为零，就說兩个函数 F 与 Φ 在对合下。在第一种情形这些函数应当是变量 (x,y,p,q) 的函数，而在第二种情形还要补充 u 到这些变量中去，因之，拉格朗日-夏比方法的实質是求方程組(159)或(161)的与 F 在对合下的积分。

要指出，在比較柯西方法和拉格朗日方法时的一望而知的一种情况。应用柯西方法我們必須求方程組(159)所有的积分，而对拉格朗日-夏比方法，我們只須找到这方程組的一个积分。可是有了后来从拉格朗日-夏比方法得到的方程(154)的全积分，我們就能够完全求出方程組(159)的积分。

118．綫性方程組 为了扩充拉格朗日-夏比方法到任意个数自变量的情形，我們需要預先考察含一个未知函数的綫性齐次方程組的积分問題。考慮含有 m 个方程的这种方程組：

$$(163)\qquad \begin{cases} X_1(u)=a_{11}p_1+a_{12}p_2+\cdots+a_{1n}p_n=0\\ X_2(u)=a_{21}p_1+a_{22}p_2+\cdots+a_{2n}p_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ X_m(u)=a_{m1}p_1+a_{m2}p_2+\cdots+a_{mn}p_n=0,\end{cases}$$

其中 $p_k=u_{x_k}$，我們假設系数 a_{ik} 只和自变量 x_s 有关。并且簡單地用 $X_k(u)$ 来記第 k 个方程的左边。今提出关于求函数 u 使同时满足組(163)中所有方程的問題。說到組(163)的解，我們要除去对我們沒有兴趣的明显的 $u=$常数的解。我們假設(163)中方程是綫性独立的，就是說，不存在不全为零而可以是 x_s 的函数的因子 λ_k，使关系式

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k X_k(u)=0$$

对于 x_s 和 p_s 恒成立。如果这样的因子存在而其中至少有一个不等于零，那

末(163)中某一方程的左边可以用其余方程的左边綫性表出。这个方程就已經是其余方程的推論，而我們已經能把它删去。假定説，$m\geqslant n$，并考慮組中前 n 个方程。由于这些方程是綫性独立的，从它們的系数所組成的行列式必須异于零。那末关于 p_s 为齐次的方程組只有零解 $p_1=\cdots=p_n=0$，于是推知：$u=$常数，就是説，当 $m\geqslant n$ 时，方程組無解（除了显然解 $u=$常数而外）。因此我們以后將假設 $m<n$。

我們能够作出新的綫性齐次方程。它們是 (163) 中方程的推論，但可能和 (163) 中方程是綫性独立的。現在預先建立一些基本恒等式。若 u_1 和 u_2 是自变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的任意兩个函数，我們有以下兩个明显的恒等式：

(164) $\quad X_k(u_1+u_2)=X_k(u_1)+X_k(u_2); \quad X_k(u_1u_2)=u_1X_k(u_2)+u_2X_k(u_1)$。

把表达式 $X_i(u)$ 中函数 u 换为第 k 个方程的左边，就是說，换为表达式 $X_k(u)$。考慮到 (164)，我們得到：

$$X_i(X_k(u))=\sum_{s=1}^{n}X_i(a_{ks})u_{x_s}+\sum_{s=1}^{n}a_{ks}X_i(u_{x_s}),$$

且完全一样：

$$X_k(X_i(u))=\sum_{s=1}^{n}X_k(a_{is})u_{x_s}+\sum_{s=1}^{n}a_{is}X_k(u_{x_s})。$$

其次，显然可写：

$$\sum_{s=1}^{n}a_{ks}X_i(u_{x_s})=\sum_{s=1}^{n}a_{ks}\sum_{t=1}^{n}a_{it}u_{x_sx_t}=\sum_{s,t=1}^{n}a_{it}a_{ks}u_{x_sx_t},$$

而最后的式子当变换記号 i 和 k 时并不改变，就是説，

$$\sum_{s=1}^{n}a_{is}X_k(u_{x_s})=\sum_{s=1}^{n}a_{ks}X_i(u_{x_s}),$$

于是我們得到下面公式：

$$(165)\qquad X_i(X_k(u))-X_k(X_i(u))=\sum_{s=1}^{n}[X_i(a_{ks})-X_k(a_{is})]u_{x_s},$$

它的右边是关于 $p_s=u_{x_s}$ 的綫性齐次函数而系数与 x_k 有关。我們推广普阿松括号的概念到任意个数自变量的情形。若 φ 与 ψ 是自变量 $x_1, \cdots, x_n$ 及 $p_1, \cdots, p_n$ 的任意函数，那末类似于从前的定义，我們以下面的等式：

$$(166)\qquad (\varphi, \psi)=\sum_{j=1}^{n}(\varphi_{p_j}\psi_{x_j}-\varphi_{x_j}\psi_{p_j})$$

来定义这兩个函数的普阿松括号。在这公式中置 $\varphi=X_i(u)$ 及 $\psi=X_k(u)$。此时：

$$\varphi_{p_j}=a_{ij}; \quad \psi_{x_j}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial a_{ks}}{\partial x_j}p_s; \quad \varphi_{x_j}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial a_{is}}{\partial x_j}p_s; \quad \psi_{p_j}=a_{kj}。$$

把这些代入公式(166)的右边，得到：

$$(X_i(u),\ X_k(u)) = \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial a_{ks}}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial a_{is}}{\partial x_j}\right)p_s,$$

或者是

$$(X_i(u),\ X_k(u)) = \sum_{s=1}^{n}[X_i(a_{ks}) - X_k(a_{is})]p_s。$$

和公式(165)的右边比較，我們得到重要的恒等式：

$$X_i(X_k(u)) - X_k(X_i(u)) = (X_i(u),\ X_k(u))。\tag{167}$$

若 u 满足組(163)的一切方程，就是說，

$$X_l(u) \equiv 0 \quad (l=1,\ \cdots,\ m),$$

那末这个函數也必須満足对記号 i 和 k 的任意选擇时的綫性齐次方程：

$$(X_i(u),\ X_k(u)) = 0。\tag{168}$$

給記号以所有可能的值，我們这样作出 $\frac{m(m-1)}{2}$ 个新的綫性齐次方程，它們在上述的意义下是組(163)的推論。这些新方程中的若干个可能变为恒等式，就是說，它們当中所有 p_k 之前的系数可能等于零。把不变为恒等式的新方程按某一确定順序联合到組(163)中的方程去，每次檢驗可以联合的方程是否为已有的那些方程的綫性組合。假若是这样，不待說，我們就不去联合它。对所有方程这样做了，我們就得到新方程組，它的方程的数目可能大于 m。对新方程組仍然作左边的普阿松括号，当然不去重复对原来方程組已作过的那些普阿松括号。如同上面一样，把所得的新方程联合到方程組去。繼續这个步驟我們可能有两种不同情况。可能發生，我們得到方程个数等于 n 的方程組。这种方程組只有 u=常数的显然解。由此推知，我們原来的方程組也只有显然解。第二种可能性是这样的，我們得到方程个数小于 n 的組，对于它用普阿松括号所得到的一切新方程全是組中方程本身的綫性組合。这种方程組称为完全的。因此，从前面的議論推出，我們原来的方程組或是只有显然解，或是等价于某完全方程組，并且，因此我們就轉到完全組的积分問題。將假設我們原来写出的方程組(163)已經是完全的，就是說，所有可能的普阿松括号 $(X_i(u),\ X_k(u))$ 是方程左边的綫性組合：

$$(X_i(u),\ X_k(u)) = \sum_{l=1}^{m}\beta_l^{(i,k)}X_l(u),\tag{169}$$

其中系数 $\beta_l^{(i,k)}$ 是 x_k 的函数，或者这些括号恒等于零。

119. 完全組和雅可比組 現在講完全組的一些基本性質。替代 x_k 引入新自变量

$$y_k = \varphi_k(x_1, \cdots, x_n) \quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

并且我們假設所写变换关于 x_k 可解。組(163)在新自变量下有形狀:

$$Y_j(u) = b_{j1}\frac{\partial u}{\partial y_1} + \cdots + b_{jn}\frac{\partial u}{\partial y_n} = 0 \quad (j=1, 2, \cdots, m),$$

按复合函数求导数的法則,其中

$$b_{jl} = \sum_{s=1}^{n} a_{js}\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_s} = X_j(y_l)。 \tag{170}$$

对于函数 u 的任何选擇我們有 $Y_j(u) = X_j(u)$,右边用自变量 x_k 表示,而左边用自变量 y_k 表示。于是推知,对任何記号 i 及 k:

$$X_i(X_k(u)) = Y_i(Y_k(u))$$

$$X_i(X_k(u)) - X_k(X_i(u)) = Y_i(Y_k(u)) - Y_k(Y_i(u))。$$

考慮到(167)及(169),我們能写:

$$Y_i(Y_k(u)) - Y_k(Y_i(u)) = \sum_{l=1}^{m}\gamma_l^{(i,k)}Y_l(u),$$

其中系数 $\gamma_l^{(i,k)}$ 由系数 $\beta_l^{(i,k)}$ 經簡單的自变量变换而得到。因此,我們見到,如果原来的組是完全的,那末經任何自变量变换而得到的新的組也同样是完全的。

現在說明完全組的第二个性質。作方程組(163)左边的 m 个綫性組合:

$$Z_j(u) = d_{j1}X_1(u) + \cdots + d_{jm}X_m(u) \quad (j=1, \cdots, m),$$

而系数 d_{jl} 設为与 x_k 相关,且由这些系数所作的行列式异于零。在这些假設之下,方程組

$$Z_j(u) = 0 \quad (j=1, 2, \cdots, m) \tag{171}$$

显然是等价于組(163)。將称新方程組是(163)的等价方程組。要証明,若原来方程組是完全的,則任何等价于它的方程組也是完全的。实际上,普阿松括号 $(Z_i(u), Z_k(u))$ 是下面形狀的表达式:

$$d_{ip}X_p(d_{kq}X_q(u)) - d_{kq}X_q(d_{ip}X_p(u))$$

之和,或由于(164),而为以下形狀的表达式之和:

$$\begin{aligned} d_{ip}[X_p(d_{kq})X_q(u) + d_{kq}X_p(X_q(u))] - d_{kq}[X_q(d_{ip})X_p(u) + \\ + d_{ip}X_q(X_p(u))] = d_{ip}X_p(d_{kq})X_q(u) - d_{kq}X_q(d_{ip})X_p(u) + \\ + d_{ip}d_{kq}[X_p(X_q(u)) - X_q(X_p(u))]。\end{aligned}$$

注意到,所有表达式 $X_p(X_q(u)) - X_q(X_p(u))$ 是 $X_j(u)$ 的綫性組合,我們看到,普阿松括号 $(Z_i(u), Z_k(u))$ 可用 $X_j(u)$ 綫性表出,由此推知,也可用 $Z_j(u)$ 表出,这就証明方程組(171)的完全性。現在导入新的概念,它是完全

性概念的特殊情形，就是說：我們將称方程組(163)为雅可比組，要是对它所有的普阿松括号恒等于零，也就是只要这些括号中 p_s 的系数恒等于零。不难用初等代数运算把完全組变为雅可比組。实际上，考察原来方程組(163)，我們設它是完全的。因为这組方程是綫性独立的，它的系数的矩陣有秩 m，我們可以关于量 p_s 中的 m 个解出組中的方程。不失一般性，我們假設組中方程关于 $p_1, \cdots, p_m$ 解出，就是說，替代組(163)我們可写出和它等价的下面形狀的方程組：

$$
(172)\qquad \begin{cases} p_1+c_{1,m+1}p_{m+1}+\cdots+c_{1,n}p_n=0 \\ p_2+c_{2,m+1}p_{m+1}+\cdots+c_{2,n}p_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_m+c_{m,m+1}p_{m+1}+\cdots+c_{m,n}p_n=0. \end{cases}
$$

如以上所証明的，这个組必須是完全的。今証明它也是雅可比組。仍然用 $X_i(u)$ 記写出的組中方程的左边。我們必須証明在公式(169)中所有系数 $\beta_s^{(i,k)}$ 恒等于零。从方程組(172)的形狀和普阿松括号的定义直接推知，(169)左边的表达式不含当 $s\leqslant m$ 的 p_s，而右边 $p_s(s\leqslant m)$ 的系数显然等于 $\beta_s^{(i,k)}$。由此立即推出一切系数 $\beta_s^{(i,k)}$ 必須等于零，也就是，方程組(172)确实是雅可比組。注意到，并不是每个雅可比組必得有形狀(172)，可是，由于以上所証，当化完全組为形狀(172)时，它是雅可比組。

120. 完全組的积分法 替代求完全組(163)的积分，我們可以积分等价于它的雅可比組(172)。

考慮这組的第一个方程及对应于它的常微分方程組：

$$\frac{dx_1}{1}=\frac{dx_2}{0}=\cdots=\frac{dx_m}{0}=\frac{dx_{m+1}}{c_{1,m+1}}=\cdots=\frac{dx_n}{c_{1,n}}.$$

这方程組应有$(n-1)$个独立积分

$$\varphi_2(x_1, \cdots, x_n)=C_2;\ \cdots;\ \varphi_n(x_1, \cdots, x_n)=C_n,$$

而写出的方程的左边必須是(172)中第一个方程的解，注意到，我們能立即写出$(m-1)$个积分，那就是：

$$x_2=\text{常数};\ \cdots;\ x_m=\text{常数}.$$

引进$(n-1)$个新变量：

$$(173)\qquad y_s=\varphi_s(x_1, \cdots, x_n)\quad (s=2, \cdots, n).$$

由于积分的独立性，所写的方程应当关于变量 x_k 中的$(n-1)$个可解，并且可以取到函数 $\varphi_1(x_1, \cdots, x_n)$，使整个的变数代换

$$y_s=\varphi_s(x_1, \cdots, x_n) \quad (s=1, 2, \cdots, n)$$

关于所有变量 x_k 可解。例如，若方程(173)能对 $x_1, \cdots, x_{n-1}$ 解出，那末我們取 $\varphi_1=x_n$ 就行了。改变方程組(172)为新变量的組。利用公式(170)以及 $\varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 是組(172)中第一个方程的积分的这种情况，我們断定所写方程中的第一个化为形狀：$\frac{\partial u}{\partial y_1}=0$。利用这个方程，我們可以划去其余的 $(m-1)$ 个方程中含 $\frac{\partial u}{\partial y_1}$ 的各項，由于方程的綫性独立性，我們能关于某 $(m-1)$ 个导数 $\frac{\partial u}{\partial y_s}$ 解这些方程。不失一般性，可以假設余下的这些方程对 $\frac{\partial u}{\partial y_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial y_m}$ 可解出。因此，变后方程組就有形狀：

$$(174)\qquad \begin{cases} Y_1(u)=\dfrac{\partial u}{\partial y_1}=0 \\ Y_2(u)=\dfrac{\partial u}{\partial y_2}+h_{2,m+1}\dfrac{\partial u}{\partial y_{m+1}}+\cdots+h_{2n}\dfrac{\partial u}{\partial y_n}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_m(u)=\dfrac{\partial u}{\partial y_m}+h_{m,m+1}\dfrac{\partial u}{\partial y_{m+1}}+\cdots+h_{mn}\dfrac{\partial u}{\partial y_n}=0。 \end{cases}$$

原来的方程組是雅可比組，因之是完全的，所以变后的方程組应該是完全的。但是因为它关于导数是可解出的，它一定是雅可比組。順便指出，由[119]的談論直接推出，雅可比組变換至新变量仍导出雅可比組。

方程組(174)中第一个表明函数 u 不与 y_1 相关，今証明組(174)中其余方程的系数也不含 y_1。实际上，因为組(174)是雅可比組，每一表达式：

$$Y_1(Y_i(u))-Y_i(Y_1(u))=\frac{\partial c_{i,m+1}}{\partial y_1}\frac{\partial u}{\partial y_{m+1}}+\cdots+\frac{\partial c_{in}}{\partial y_1}\frac{\partial u}{\partial y_n}$$

应当恒等于零，这就証明了上述的断言。因此我們可以在方程組(174)中去掉第一个方程，并在 u 与 y_1 無关的假設下积分其余方程。这样得出有 $(n-1)$ 个自变量的 $(m-1)$ 个方程的封閉組。对这方程組施行上述运算，我們得到有 $(n-2)$ 个自变量的 $(m-2)$ 个方程的封閉組，如此类推。最后我們得着关于 $(n-m+1)$ 个自变量的函数 u 的一个方程。仍用 $y_1, \cdots, y_{n-m+1}$ 記这些变量，因此，我們有下面形狀的方程

$$\frac{\partial u}{\partial y_1}+g_2\frac{\partial u}{\partial y_2}+\cdots+g_{n-m+1}\frac{\partial u}{\partial y_{n-m+1}}=0,$$

其中自变量 y_j 是原来自变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数。对应于最后方程的常微分方程組將有 $(n-m)$ 个独立积分：

$$\psi_1(y_1, \cdots, y_{n-m+1})=C_1; \cdots; \psi_{n-m}(y_1, \cdots, y_{n-m+1})=C_{n-m},$$

而这方程的通解表示为形狀：

$$u=\Psi(\psi_1, \cdots, \psi_{n-m}),$$

其中 Ψ 为任意函数。这同一公式也給出原来方程組(163)的通解。

121. 普阿松括号 我們利用上面所得結果，来建立在任意个数自变量情形求非綫性一阶方程的全积分的方法。如同在两个自变量情形一样，我們需要預先考虑一个輔助問題。如果一个函数 $u(x_1, \cdots, x_n)$ 的偏导数已給定为自变量 x_k 的函数

$$p_k=p_k(x_1, \cdots, x_n) \quad (k=1, 2, \cdots, n), \tag{175}$$

要求决定这个函数。

考虑到微分的結果与順序的無关性，我們看到函数 (175) 应滿足 $n(n-1):2$ 个关系式：

$$\frac{\partial p_i(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_k}=\frac{\partial p_k(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_i}。 \tag{176}$$

这些关系式对于决定 u 不仅必要而且充分。对于 $n=2$ 和 $n=3$ 的情形我們从前已經証过 [II; 73]。推广斯托克斯公式到 n 維空間，正如 $n=3$ 的情形，我們發現当滿足条件(176)时，曲綫积分：

$$u(x_1, \cdots, x_n)=\int_{(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})}^{(x_1, \cdots, x_n)} \sum_{s=1}^{n} p_s(x_1, \cdots, x_n)dx_s$$

与路徑無关且給出有偏导数(175)的函数 u。

应用完全归納法可以証明条件 (176) 在一般情形的充分性。假設条件 (176) 对 $(n-1)$ 个自变量情形的充分性已經証得，而要証明这断言对于 n 个自变量亦为眞实。因此，假定函数(175)适合关系(176)。考慮到，我們假設对于$(n-1)$个自变量我們的命題已經証好，利用(175)前面 $(n-1)$ 个方程作出自变量 $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ 的函数 u，具有偏导数 $u_{x_k}=p_k(x_1, \cdots, x_n)$ $(k=1, 2, \cdots, n-1)$。因为变量 x_n 出現在 p_k 内，故这函数含有 x_n 作为参数。此外，对函数 u 可以添加任意常数，我們可以假設它是参数 x_n 的函数。

这样我們得到函数：

$$u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)+c(x_n),$$

它滿足$(n-1)$个条件：

$$u_{x_k}=p_k(x_1, \cdots, x_n) \quad (k=1, 2, \cdots, n-1)。$$

剩下还要选取 $c(x_n)$，使得滿足条件 $u_{x_n}=p_n(x_1, \cdots, x_n)$，我們这就导出方程：

$$\frac{dc(x_n)}{dx_n}=p_n(x_1,\cdots,x_n)-u_{x_n},$$

并且我們还可以断定，所写方程的右边只含 x_n。当 $k<n$，关于 x_k 微分并注意(176)和 $u_{x_k}=p_k$，我們得到：

$$\frac{\partial p_n}{\partial x_k}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_n\partial x_k}=\frac{\partial p_n}{\partial x_k}-\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial p_n}{\partial x_k}-\frac{\partial p_k}{\partial x_n}=0,$$

證明完畢。

现在假定偏导数 p_k 由 n 个方程

(177) $$F_s(x_1,\cdots,x_n,p_1,\cdots,p_n)=a_s\quad(s=1,2,\cdots,n)$$

隐式确定，我們設它关于 p_k 可解。要証明，为了由方程(177)所确定的 p_k 滿足关系式(176)起見，必要而充分的是等式(177)左边所作的一切普阿松括号恒等于零，就是說，我們必須有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个关于 x_i 及 p_i 的恒等式：

(178) $$(F_i,F_k)=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_s}\frac{\partial F_k}{\partial x_s}-\frac{\partial F_i}{\partial x_s}\frac{\partial F_k}{\partial p_s}\right)=0。$$

此时我們假設方程(177)的右边是任意常数。

从(177)中取兩个方程并关于自变量 x_s 微分：

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_s}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial x_s}=0;\quad \frac{\partial F_k}{\partial x_s}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_k}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial x_s}=0。$$

用 $\frac{\partial F_k}{\partial p_s}$ 乘这些方程的第一个，$\frac{\partial F_i}{\partial p_s}$ 乘第二个，从第二个减去第一个并关于 s 取和，我們就得到：

$$(F_i,F_k)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_k}{\partial p_j}\frac{\partial F_i}{\partial p_s}\frac{\partial p_j}{\partial x_s}-\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial p_j}\frac{\partial F_k}{\partial p_s}\frac{\partial p_j}{\partial x_s}=0。$$

在第二个和式中更改取和的变动指标，我們可以改写最后的式子为形狀：

(179) $$(F_i,F_k)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_k}{\partial p_j}\frac{\partial F_i}{\partial p_s}\left(\frac{\partial p_j}{\partial x_s}-\frac{\partial p_s}{\partial x_j}\right)=0。$$

若 p_k 滿足关系式(176)，则由上面公式立即推出对于任何指标必須滿足恒等式(178)。相反的，現在假設恒等式(178)滿足了，要証明由公式(177)所定义的 p_k 必須适合关系式(176)。若恒等式(178)滿足，则公式(179)改写成形狀：

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_k}{\partial p_j}\frac{\partial F_i}{\partial p_s}\left(\frac{\partial p_j}{\partial x_s}-\frac{\partial p_s}{\partial x_j}\right)=0,$$

而且我們可以給指标 i 及 k 以任意数值。給指标 k 以值 $k=1,2,\cdots,n$，我們得着 n 个等式，我們可以看作是关于 n 个量

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial p_s}\left(\frac{\partial p_j}{\partial x_s}-\frac{\partial p_s}{\partial x_j}\right)\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{180}$$

的 n 个齐次方程。这齐次方程的行列式是函数 F_i 关于变量 p_s 的函数行列式，而我們假設它异于零[方程組(177)关于 p_s 可解]。由此我們能断定所有的量(180)应当等于零。固定 j 而給 i 以値 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，我們也得到关于量

$$\frac{\partial p_j}{\partial x_s}-\frac{\partial p_s}{\partial x_j}\quad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{181}$$

的齐次方程組，它的行列式仍旧是 F_i 关于 p_s 的函数行列式。从此立即推知所有的量(181)应成为零，这就是我們要証的。总之，为了使方程組(177)所确定的 p_k 是某函数 u 的偏导数起見，必要且充分的是函数 F_i 兩兩在对合下。我們已預先假定方程(177)的右边是任意常数，因为这样，就必得要求关系式(178)恒滿足。若是我們固定了这些常数中某几个的数值，那末只要求在这样得到的方程有效时关系式(178)能滿足就行了。

还須指出普阿松括号的一些初等的性質。若 φ 及 ψ 为自变量 x_k 和 p_k 的兩个任意函数，而 a 及 b 是常数，則从普阿松括号的定义直接推出以下的关系式：

$$(\varphi,\ \varphi)=0;\quad (\psi,\ \varphi)=-(\varphi,\ \psi);\quad (0,\ \varphi)=0;\quad (a\varphi,\ b\psi)=ab(\varphi,\ \psi)。$$

更設 ω 是上述变量的某函数。就成立以下的恒等式：

$$((\varphi,\ \psi),\ \omega)+((\psi,\ \omega),\ \varphi)+((\omega,\ \varphi),\ \psi)=0, \tag{182}$$

它通常称为普阿松恒等式。所写的恒等式含二重普阿松括号。为了写开上面公式的第一项，我們应写出普阿松括号 (φ,ψ)，然后利用这样得到的函数作括号 $((\varphi,\psi),\ \omega)$。为了驗証恒等式(182)，首先注意这恒等式中每一項含一阶导数。因为所写的恒等式关于三个函数以及变量 x_k 和 p_k 分別是对称的，为了驗証所写的恒等式，把左边减縮到所有包含 $\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}$ 的项来檢驗就行了。利用普阿松括号的定义，我們可以断定恒等式左边关于 $\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}$ 的系数是：

$$\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial p_s}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_s}-\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\omega}{\partial p_s}\right]-\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_s}\frac{\partial\omega}{\partial x_s}-\frac{\partial\psi}{\partial x_s}\frac{\partial\omega}{\partial p_s}\right)-$$
$$-\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial p_s}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_s}-\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_s}\right]。$$

进行微分运算，我們不难肯定这些系数确实等于零。

122. 雅可比方法 現在轉来叙述推广的拉格朗日-夏比方法，就是要解

决求任意个数自变量的一阶方程的全积分的問題，而我們假設这个方程不包含未知函数，就是說，它有形狀：

$$F_1(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)=0。\tag{183}$$

若是我們还能补充$(n-1)$个函数F_k，使所得到的n个函数兩兩在对合下，而且它們对于p_k可解，則取方程組(177)，在其中置$a_1=0$，我們求得滿足条件(176)的p_k，并且因而得到u。方程組(177)使我們有$(n-1)$个任意常数，而后来从偏导数p_k确定函数u时还得到一个任意常数。函数F_k的求得可以逐次进行。假定說，已經有了前m个函数$F_1, F_2, \cdots, F_m$，它們兩兩在对合下且关于量p_k中的m个可解。为了求得下一个函数F_{m+1}，我們必须作出m个方程：

$$(F_1, u)=0;\ (F_2, u)=0;\ \cdots;\ (F_m, u)=0。\tag{184}$$

这些是关于$2n$个自变量x_k与p_k的未知函数F_{m+1}的綫性齐次方程。

把关于F_{m+1}的方程組写为打开的形狀：

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial p_k}\frac{\partial u}{\partial x_k}-\frac{\partial F_j}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial p_k}\right)=0\quad (j=1, 2, \cdots, m)。\tag{185}$$

既然我們假設F_j关于量p_k中的m个可解，我們应認为函数F_j对变量p_k的某个m阶行列式异于零，由此推知，方程組(185)中导数的系数矩陣的秩要等于m，就是說，方程(185)确实是綫性独立的。今証明这方程組是完全的。为了显示这个事实，写出对方程組(184)的差式(165)：

$$(F_p, (F_q, u))-(F_q, (F_p, u))。$$

我們需要証明它們恒等于零。应用恒等式(172)，我們能改变所写的差式为形狀：

$$-((F_q, u), F_p)-((u, F_p), F_q)=((F_p, F_q), u)。$$

但是函数F_p与F_q在对合下，由此立即推知，所考虑的差式等于零。因此，由[120]中所述，方程(185)有$2n-m$个独立的解。我們有这方程組的明显的解：

$$u=F_1;\ u=F_2;\ \cdots;\ u=F_m。\tag{186}$$

因此，除了它們而外，还应該存在$2n-2m$个解，它們和解(186)一起必须关于x_k与p_k中的$(2n-m)$个可解出。由此推知，对方程組(185)确实找到这样的解$u=F_{m+1}$，使$F_1=0; F_2=a_2; \cdots; F_{m+1}=a_{m+1}$关于量$p_k$中的$(m+1)$个可解。为了求下一个函数$F_{m+2}$，我們作方程組：

$$(F_1, u)=0;\ \cdots;\ (F_{m+1}, u)=0,$$

我們对它进行如同对組 (184) 所作的同样的討論。这样，我們作出所有 n 个兩兩在对合下的方程，并且方程組 (177)［当 $a_1=0$］关于所有 p_k 可解。如我們以前見过的，这就引出方程 (183) 的全积分。

我們曾假設方程不含未知函数。若我們有了包含这个函数的方程：

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n)=0,$$

那末，把自变量的个数增加一个，就能达到不含未知函数的方程。为了这样，求出方程隐式的解

$$v(x_1, \cdots, x_n, u)=C$$

就行了，其中 C 是任意常数。应用隐函数的求导数法則，我們总归得到对 v 的方程，它已經不含有函数本身。

123. 标准組 我們来建立上面的論述和柯西方程組的联系。我們將考虑当方程不含未知函数且关于导数之一是可解出的那种情形。为了对称起見，引入 $(n+1)$ 个自变量，而把这些变量中的一个記之为 t，关于它的导数記为 $p_0=u_t$。方程將有形狀：

$$p_0+H(t, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)=0, \tag{187}$$

而对应的柯西方程組是标准方程組［**115**］：

$$\frac{dx_k}{dt}=H_{p_k}; \quad \frac{dp_k}{dt}=-H_{x_k}. \tag{188}$$

設

$$\varphi(t, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)=C$$

是这方程組的积分，就是說，因为方程組 (188)，而有：

$$\varphi_t+\sum_{k=1}^{n}\left(\varphi_{x_k}\frac{dx_k}{dt}+\varphi_{p_k}\frac{dp_k}{dt}\right)=0.$$

按另外的样子，可写最后的等式为形狀：

$$\varphi_t+(H, \varphi)=0. \tag{189}$$

由此推知，为了函数 φ 給出組的积分，它滿足方程 (189) 是必要和充分的。假定函数 φ 与 ψ 給出組的兩个积分。要証明它們的普阿松括号也是組的积分（或者成为常数）。由普阿松括号的定义立即推出等式：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi, \psi)=(\varphi_t, \psi)+(\varphi, \psi_t).$$

用函数 $\omega=(\varphi, \psi)$ 来替代关系式 (189) 中的 φ，我們得到：

$$(\varphi_t, \psi)+(\varphi, \psi_t)+(H, (\varphi, \psi))=0.$$

既然 φ 与 ψ 是积分，我們能在最后的等式里改变

$$\varphi_t=-(H, \varphi); \quad \psi_t=-(H, \psi),$$

且因此得出关系式：

$$-((H, \varphi), \psi)-(\varphi, (H, \varphi))+(H, (\varphi, \psi))=0,$$

它由于(182)而恒滿足。因之，标准方程組的兩个积分的普阿松括号还是这方程組的积分或者是常数。

現在假定，我們有方程組(188)的 n 个积分：

$$(190)\qquad \varphi_s(t, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)=a_s \quad (s=1, 2, \cdots, n),$$

它們兩兩在对合下且关于 p_k 可解。我們联合微分方程 (187) 本身到方程 (190) 去，如果考慮自变量是 $t, x_1, \cdots, x_n$ 而对应的导数为 $p_0, p_1, \cdots, p_n$，就可以証明所得的 $(n+1)$ 个函数兩兩在对合下。就是在联合了新自变量 t 之后，諸函数(190)將明显地兩兩在对合下，因为它們完全不含 p_0。只要驗証(190)中每个函数同 (187) 的左边在对合下就够了。把对应的普阿松括号等于零，我們恰好导出等式：

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial t}+(H, \varphi_s)=0,$$

它确实是滿足的，因为(190)是方程組(188)的积分。注意到[122]中的結果，若是我們关于 $p_k(k=1, \cdots, n)$ 解方程 (190) 以及关于 p_0 解 (187)，并把所得的 p_k 的表达式代入函数 H，那末我們可以肯定和式

$$p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+\cdots+p_n\,dx_n-H\,dt$$

是某函数 $v(t, x_1, \cdots, x_n, a_1, \cdots, a_n)$ 的全微分。它显然給出方程 (187) 的全积分。利用雅可比定理，我們就能断定标准方程組的其余的 n 个积分能簡單地通过微分方法而得到，也就是，它們由等式 $v_{a_k}=b_k(k=1, \cdots, n)$ 来确定。

124. 例. 1. 考慮兩个綫性齐次方程的方程組：

$$(191)\qquad \begin{cases} X_1=p_1+(x_2+x_4-3x_1)p_3+(x_3+x_1x_2+x_1x_4)p_4=0 \\ X_2=p_2+(x_3x_4-x_2)p_3+(x_1x_3x_4+x_2-x_1x_2)p_4=0。\end{cases}$$

从左边作普阿松括号，又得到一个方程：

$$X_3=p_3+x_1p_4=0。$$

普阿松括号 (X_1, X_3) 及 (X_2, X_3) 只同最末方程的左边相差一个因子。我們就得到由这三个方程構成的完全組。关于 p_1, p_2, p_3 解出，便得到雅可比組：

$$p_1+(x_3+3x_1^2)p_4=0;\quad p_2+x_2p_4=0;\quad p_3+x_1p_4=0。$$

最末的方程有解：x_1, x_2 及 $x_4-x_1x_3$。引进自变量：x_1, x_2, x_3 及 $t=x_4-x_1x_3$。

方程組改写为形狀：

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+3x_1^2\frac{\partial u}{\partial t}=0;\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial u}{\partial t}=0;\quad \frac{\partial u}{\partial x_3}=0。$$

前面两个方程給出自变量：x_1, x_2, t 的雅可比組。第二个方程有解：x_1 及 $t-\frac{x_2^2}{2}$。引用新自变量：x_1, x_2 及 $\tau=t-\frac{x_2^2}{2}$。所説到的方程改为形狀：

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+3x_1^2\frac{\partial u}{\partial \tau}=0;\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=0。$$

这些方程的第一个有解：

$$u=\tau-x_1^3 \text{ 或 } u=x_4-x_1x_3-\frac{x_2^2}{2}-x_1^3,$$

而这变量 u 的任何函数是方程組(191)的解。

2． 求方程

(192) $$F_1=(p_1+x_2)^2+(x_1+p_2)^2-x_3p_3=0$$

的全积分。

方程 $(F_1, u)=0$ 有形狀：

(193) $$2(p_1+x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}+2(x_1+p_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}-x_3\frac{\partial u}{\partial x_3}-$$
$$-2(x_1+p_2)\frac{\partial u}{\partial p_1}-2(p_1+x_2)\frac{\partial u}{\partial p_2}+p_3\frac{\partial u}{\partial p_3}=0。$$

这方程有明显的解：$u=x_1+p_2$。置：

(192_1) $$F_2=x_1+p_2=a_2。$$

联合方程 $(F_2, u)=0$ 到方程(193)去，就是

$$\frac{\partial u}{\partial p_1}-\frac{\partial u}{\partial x_2}=0。$$

这方程与方程(193)有解：$u=x_3p_3$，就是説，

(192_2) $$F_3=x_3p_3=a_3。$$

关于 p_1, p_2, p_3 解 (192)，(192_1) 及 (192_2)：

$$p_1=-x_2+\sqrt{a_3-a_2^2};\quad p_2=a_2-x_1;\quad p_3=\frac{a_3}{x_3}。$$

从偏导数来作出函数 u，就得到方程(192)的全积分：

$$u=-x_1x_2+\sqrt{a_3-a_2^2}\,x_1+a_2x_2+a_3\lg x_3+a。$$

125．优級数法 在研究柯西問題时，我們曾假定已知函数和未知函数是实自变量的实函数。可以在所有函数是其变量的解析

函数的假定下而引出一切理論。同时这些变数可以取实数值也能取复数值。从这个观点出發，我們推导柯西問題解的存在性与唯一性定理的証明。我們需要預先叙述一些輔助命題。

設有 m 个变量的冪級数：

$$\varphi(z_1, \cdots, z_m) = \sum_{p_1, \cdots, p_m=0}^{\infty} a_{p_1\cdots p_m} z_1^{p_1} \cdots z_m^{p_m}, \tag{194}$$

它在遵守条件：

$$|z_1| \leqslant R_1; \cdots; |z_m| \leqslant R_m \tag{195}$$

时收斂。我們假設級数(194)的收斂半徑甚至略大于数 R_k。設 M 是保持条件(195)时函数(194)的模数的最大值。我們見过，由展开函数[**III**$_2$; **83**]

$$\frac{M}{\left(1-\frac{z_1}{R_1}\right)\left(1-\frac{z_2}{R_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z_m}{R_m}\right)} \tag{196}$$

而得的冪級数的所有系数是正的并且不小于級数 (194) 的系数的模。换句話說，最后的級数是級数(194)的优級数。

一般地，級数

$$\sum_{p_1, \cdots, p_m=0}^{\infty} c_{p_1\cdots p_m} z_1^{p_1} \cdots z_m^{p_m} \tag{197}$$

的优級数是具同样形狀的級数，但它的系数是非負的（即大于或等于零）并且不小于級数 (197) 中相应的系数的模。如所熟知，每个冪級数在其收斂圓內絕对收斂[**III**$_2$; **83**]。若是級数(197)的某个优級数当 $|z_k| < \rho_k (k=1, 2, \cdots, m)$ 收斂，显然，我們能够断定級数 (197) 也在圓 $|z_k| < \rho_k$ 的內部收斂。假設在表达式 (196) 中所有的数 R_k 相同（可改变一切 R_k 为最小的），考慮兩个函数：

$$\frac{M}{\left(1-\frac{z_1}{R}\right)\left(1-\frac{z_2}{R}\right)\cdots\left(1-\frac{z_m}{R}\right)} \tag{198}$$

及

$$\frac{M}{1-\frac{z_1+z_2+\cdots+z_m}{R}}。\tag{199}$$

这些函数的冪級数展开依次有形狀

$$\sum_{p_1,\cdots,p_m=0}^{\infty} M\frac{z_1^{p_1}\cdots z_m^{p_m}}{R^{p_1+\cdots+p_m}} \text{ 及 } \sum_{p=0}^{\infty} M\frac{(z_1+\cdots+z_m)^p}{R^p},$$

并展开 $(z_1+\cdots+z_m)^p$，我們断定函数 (199) 的展开式的系数不小于(198)的展开式中相应的系数，就是說，函数(199)(或者对应的冪級数)也是函数(197)(即所对应的冪級数)的优函数(优級数)。

优冪級数方法，用于在解析函数的情形微分方程解的存在性的証明。首先对一阶常微分方程来推导相应的証明。設有微分方程：

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y),$$

它的右边在 $x=y=0$ 的鄰域內是关于 x 和 y 的收斂的冪級数，就是說，

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{p,q=0}^{\infty} a_{pq}x^py^q。\tag{200}$$

求这个方程的在点 $x=0$ 为正則且满足初始条件：

$$y|_{x=0}=0\tag{201}$$

的解。为了作出所求的解，写出它的麦克劳林級数就成了，就是說，計算在 $x=0$ 的导数之値。这麦克劳林級数的自由項給出初始条件而等于零。在 $x=0$ 时第一个导数之値由微分方程給出，我們有 $y_0'=a_{00}$。为了确定第二个导数，把方程的两边关于 x 微分：

$$y''=\sum_{p,q=0}^{\infty} pa_{pq}x^{p-1}y^q+\sum_{p,q=0}^{\infty} qa_{pq}x^py^{q-1}y'$$

并以 $x=0$; $y=0$; $y'=a_{00}$ 代入它的右边，就确定出在 $x=0$ 时第二个导数之値：

$$y_0''=a_{10}+a_{01}a_{00}。$$

繼續这样进行，我們就能确定出在 $x=0$ 时的所有各阶导数并写出麦克劳林級数：

(202)
$$y_0+\frac{y_0'}{1!}x+\frac{y_0''}{2!}x^2+\cdots。$$

从前面的計算推出只能存在一个正則解滿足已給的初始条件。然而为了断定这样的解实际上存在，我們需要証明級数(202)有大于零的收斂半徑。同时应当指出，由于冪級数的基本性質，前面对于級数所施行的运算在收斂圓内的是合法的。若級数(202)是收斂的，則从它的系数組成的規則立卽推出，它的和适合方程(200)。

从前面的計算立卽推知級数(202)的系数是 a_{pq} 的有非負系数的多項式。实际上，在將方程逐次微分并把已求得的导数初始値代入右边而使我們得以作出系数的只是加法和乘法运算。所以，如果我們改变方程(200)右边的級数为优級数，那末級数(202)也变为优級数。若是这优級数当 x 充分接近于零时收斂，則对于方程(200)的級数(202)本身更要收斂。以后的証明的主要关鍵是那个事实，在改变方程(200)右边的級数为优級数时，我們得到能求积为有限形式的方程。假定方程(200)右边的級数当 $|x|\leqslant R$ 及 $|y|\leqslant R$ 时为絕对且一致收斂，并設 M 为在所說条件下級数和的最大値。轉到优級数，我們得到微分方程

(203)
$$\frac{dy}{dx}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{R}\right)\left(1-\frac{y}{R}\right)},$$

在其中分离变数：

$$\left(1-\frac{y}{R}\right)dy=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{R}\right)}dx。$$

求它的积分并注意到(201)，得到

$$y-\frac{y^2}{2R}=-MR\lg\left(1-\frac{x}{R}\right),$$

于是

$$(204)\qquad y=R-R\sqrt{1+2M\lg\left(1-\frac{x}{R}\right)},$$

而根式的值当 $x=0$ 要取为 1，就是說，使滿足初始条件(201)。函数(204)在点 $x=0$ 是正則函数，并由此推知可展开为冪級数。

这个級数的系数，和按前述步驟从方程(203)逐項微分而得到的那些系数显然一致。因此对于优方程，級数(202)在 $x=0$ 的鄰域收斂。如前面見到的一样，对于原来方程，級数更是收斂。这样不仅証明了唯一性，而且証明了方程(200)的滿足初始条件(201)的正則解的存在性。

126. 柯瓦列夫斯卡婭定理 上述的优級数或优函数的方法，对于偏微分方程的柯西問題的解的存在性和唯一性的証明也适用。为此我們經常取对某个 p 解出了的微分方程。設有一阶微分方程：

$$(205)\qquad p_1=f(x_1,\cdots,x_n,u,p_2,\cdots,p_n),$$

其中 f 为在点

$$(206)\qquad x_1=\cdots=x_n=0;\ u=u^{(0)};\ p_2=p_2^{(0)};\ \cdots;\ p_n=p_n^{(0)}$$

的正則函数，而且不失一般性我們取自变量的初始值等于零。要求出方程的解，使滿足以下的柯西条件：

$$(207)\qquad u\big|_{x_1=0}=\varphi(x_2,\cdots,x_n)。$$

同时我們假設函数 $\varphi(x_2,\cdots,x_n)$ 在它的变量为零时正則，此外，

$$(208)\qquad (\varphi)_0=u^{(0)};\ (\varphi_{x_k})_0=p_k^{(0)}\quad(k=2,\cdots,n),$$

置于下边的記号零总是指函数的一切变量代换为零。在轉到解决問題之前，我們借助于未知函数的初等变换可簡化問題的条件，就是代替函数 u，依公式

$$u=u'+\varphi(x_2,\cdots,x_n)+Ax_1,$$

来导入新未知函数 u'，其中常数 A 是方程 (205) 右边在变量取初始值(206)时之值，簡單地說，就是 A 为方程 (205) 的右边展开为所对应的幂級数时的自由項：

$$A=f(0,\cdots,0,(\varphi)_0,(\varphi_{x_2})_0,\cdots,(\varphi_{x_n})_0)。$$

新未知函数应当滿足方程：

$$(209)\quad u'_{x_1}=f(x_1,\cdots,x_n,u'+\varphi+Ax_1,\varphi_{x_2}+u'_{x_2},\cdots,\varphi_{x_n}+u'_{x_n})-$$
$$-f(0,\cdots,0,(\varphi)_0,(\varphi_{x_2})_0,\cdots,(\varphi_{x_n})_0),$$

且代替初始条件(207)我們有初始条件：

$$u'|_{x_1=0}=0。$$

注意方程 (209) 右边函数的自变量。若置所有 $x_s=0$ 及 $u'=0$，自变量 $u'+\varphi+Ax_1$ 变成 $(\varphi)_0$。完全一样，只要仍旧令所有 $x_s=0$ 及 $u'_{x_k}=0$，每个自变量 $\varphi_{x_k}+u'_{x_k}$ 变成 $(\varphi_{x_k})_0$。因此，所提到的函数的自变量当 x_s, u', u'_{x_k} 为零时恰好和初始值(208)一致，而对这些初始值，函数 f 是正則的。这样一来，我們能断定方程(209)的右边是在点：

$$(210)\qquad x_1=\cdots=x_n=u'=u'_{x_2}=\cdots=u'_{x_n}=0$$

的正則函数。

此外，考慮到方程 (209) 右边的被减項，我們能肯定当自变量取初始值(210)时右边变为零。这样，我們把柯西初始值及方程右边函数的一切自变量的初始值都化为零了。因此，保持以前的記号，我們得出以下的問題：設有微分方程：

$$(211)\qquad p_1=f(x_1,\cdots,x_n,u,p_2,\cdots,p_n),$$

其中 f 是在点：

$$x_1=\cdots=x_n=u=p_2=\cdots=p_n=0$$

的正則函数，函求出这方程滿足条件：

$$(212)\qquad u|_{x_1=0}=0$$

的解。注意到，方程(211)的右边必須展开为下面形狀的級数：

$$(213)\quad f=\sum_{s_1,\cdots,s_n,t_1,\cdots,t_n=0}^{\infty} a_{s_1\cdots s_n t_1\cdots t_n} x_1^{s_1}\cdots x_n^{s_n} u^{t_1} p_2^{t_2}\cdots p_n^{t_n}\quad (a_{0\cdots 00\cdots 0}=0),$$

而当所有变量之值充分接近于零时收斂。

完全像在常微分方程的情形一样，我們要利用方程(211)和初始条件(212)来計算未知函数 u 的麦克劳林級数的系数，就是所有偏导数在变量取零值时之值。在对 x_1 以外的任何变量微分时我們可預先令 $x_1=0$。

因此，初始条件(212)向我們指明

$$(214)\qquad \left(\frac{\partial^{\alpha_2+\cdots+\alpha_n}u}{\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)_0=0,$$

其中 α_k 为任意非負整数。現在要計算出关于 x_1 微分的那些导数的初始值。由方程(211)推知：

$$(215)\qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_0=0。$$

把方程(211)的两边关于变量 $x_2, \cdots, x_n$ 微分任意次，然后置各变量为零，我們在右边就有已計算过的导数之值(214)及(215)，因此，对任何非負整数 $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 确定了：

$$\left(\frac{\partial^{1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}u}{\partial x_1\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)_0。$$

現在取从方程(211)經过关于 x_1 微分而得的方程，并对它像对原来的方程一样来处理。这使我們对于导数：

$$\left(\frac{\partial^{2+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}u}{\partial x_1^2\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)_0$$

有完全确定的值。繼續这样进行，我們能計算未知函数的任何偏导数在变量的初始值处之值，并且写出麦克劳林級数：

$$(216)\qquad \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)_0 x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}。$$

以上的論斷像常微分方程的情形一样，証明了所建立的柯西問題正則解的唯一性。为了存在性的証明，我們需要显示当置所得的

导数的初始值于級数 (216)，它在以原点为中心的某鄰域内收斂。完全像在前一段一样，可以断定，若是我們更改級数(213)为优級数，且若对于所得优方程按前述方式而写出的級数(216)收斂，則对于原来方程的(216)更是收斂。假定說，級数(213)在条件

$$|x_1|\leqslant\rho;\cdots;\ |x_n|\leqslant\rho;\ |u|\leqslant\rho;\ |p_2|\leqslant R;\ \cdots;\ |p_n|\leqslant R$$

下为絕对且一致收斂，且設 M 是在这些条件下級数之和的模数的最大值。函数

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x_1}{\rho}\right)\cdots\left(1-\frac{x_n}{\rho}\right)\left(1-\frac{u}{\rho}\right)\left(1-\frac{p_2}{R}\right)\cdots\left(1-\frac{p_n}{R}\right)}-M$$

是 (213) 的优函数，我們在右边从前一式减去数 M 是为的消除自由項而它正是級数(213)所沒有的。級数(213)又以

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x_1+\cdots+x_n+u}{\rho}\right)\left(1-\frac{p_2+\cdots+p_n}{R}\right)}-M$$

为其优函数。若我們以适合条件 $0<\alpha<1$ 的某数 α 来除变量 x_1，則 α 的不同冪数出現在包含 x_1 冪数的各項系数的分母中，而函数

$$\frac{M}{\left(1-\frac{\frac{x_1}{\alpha}+x_2+\cdots+x_n+u}{\rho}\right)\left(1-\frac{p_2+\cdots+p_n}{R}\right)}-M$$

也一定是(213)的优函数。这样，我們有优方程：

$$p_1=\frac{M}{\left(1-\frac{\frac{x_1}{\alpha}+x_2+\cdots+x_n+u}{\rho}\right)\left(1-\frac{p_2+\cdots+p_n}{R}\right)}-M。\tag{217}$$

計算对于这个方程滿足初始条件(212)的解的麦克劳林系数，我們得到当 $x_s=0$ 成为零时的冪級数，并且是对于方程 (211) 所写的級数(216)的优級数。若这級数收斂，則对方程 (211) 所写的級数

(216)更是收斂。我們現在建立方程(217)的解使适合非零的初始条件：

$$u|_{x_1=0}=\psi(x_2, \cdots, x_n), \tag{218}$$

其中 ψ 是具非負系数的幂級数。这个解的麦克劳林系数的逐步計算能像上面一样来进行，而只是对一切非負值 α_k，初始条件(218)要使得位于公式(214)右边的已經不是零，而为某非負数。往下的系数的計算亦如上进行，而成为对于已得的非負系数与方程(218)右方展开式的正系数的加法与乘法运算。因此，若是我們对于方程(217)改零初始值(212)为初始值(218)，其中 ψ 展开为非負的实系数的級数，那末对于方程(217)有初始条件(218)的級数(216)，將优于对方程(217)有零初始条件(212)的級数(216)，并且更加优于对方程(211)有零初始条件的級数(216)。这样一来，一切归結到証明对于方程(217)而有形狀(218)的任何初始条件的級数(216)在以原点为中心的某个圓的內部是收斂的，其中 ψ 有上述性質。

換句話說，一切問題归結到建立方程(217)的滿足初始条件(218)的解，并証明若 x_k 充分接近于零这个解可展开为麦克劳林級数。要求出只作为一个自变量 $z=x_1+\alpha(x_2+\cdots+x_n)$ 的函数的那种解。

此时

$$u_{x_1}=\frac{du}{dz};\quad u_{x_k}=\alpha\frac{du}{dz}\quad (k=2, \cdots, n),$$

因而方程(217)取形狀：

$$\frac{du}{dz}=\frac{M}{\left(1-\dfrac{\dfrac{z}{\alpha}+u}{\rho}\right)\left(1-\dfrac{(n-1)\alpha}{R}\dfrac{du}{dz}\right)}-M$$

或

$$\left(1-\frac{(n-1)Ma}{R}\right)\frac{du}{dz}-\frac{(n-1)a}{R}\left(\frac{du}{dz}\right)^2=\frac{M}{1-\dfrac{\dfrac{z}{a}+u}{\rho}}-M_{\circ}$$

將假諧数 a 取的相当接近于零，以使 $\frac{du}{dz}$ 的系数为正。在所写等式的右边按等比級数公式展开，我們得到沒有自由項的正系数的冪級数。末尾的方程可以写为形狀：

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2-2h\frac{du}{dz}+\varphi(z,u)=0$$

其中，$h>0$，而 $\varphi(z,u)$ 是沒有自由項的正系数的冪級数。关于 $\frac{du}{dz}$ 来解，我們得到一阶方程：

$$\frac{du}{dz}=h-h\sqrt{1-\frac{1}{h^2}\varphi(z,u)},\tag{219}$$

而根式当 $z=u=0$ 时必須算作等于 1。按牛頓二項式来展开，我們得到：

$$-h\sqrt{1-\frac{1}{h^2}\varphi(z,u)}=-h+\frac{\frac{1}{2}}{1!}\frac{\varphi}{h}-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\frac{\varphi^2}{h^3}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\frac{\varphi^3}{h^5}+\cdots,$$

而 $\varphi(z,u)$ 的冪級数的一切系数是正的。关于 z 及 u 的乘冪来展开，我們在方程 (219) 的右边得到有正系数且無自由項的冪級数 $\varphi_1(z,u)$，并且化到一阶方程：

$$\frac{du}{dz}=\varphi_1(z,u)_{\circ}$$

我們已經有过这种方程的滿足初始条件 $u|_{z=0}=0$ 的正則解的存在性定理。这个解是有正系数的級数：

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}c_kz^k_{\circ}$$

若在写出的展开式中置 $z=x_1+\alpha(x_2+\cdots+x_n)$，就得到方程(217)的表示为正系数的幂級数的解。这个解当 $x_1=0$ 时适合某初始値(218)，其中 $\psi(x_2, \cdots, x_n)$ 为正系数的幂級数。由于以上所述，有了形如(216)的这种解的作出就把柯西問題解的存在性的証明进行到底。所引的証明屬于古薩。定理本身通常称为柯瓦列夫斯卡婭定理，因为它的証明完善的形式第一个是由 C. B. 柯瓦列夫斯卡婭給出的。

从以上所引的証明推知，給出問題(211)，(212)之解而作的級数(216)关于变量 x_k 的收斂半徑仅与方程(213)的右边的收斂半徑以及右边的最大模 M 有关，而与函数 f 的具体形狀无关。对于(205)，(207)还要加上与出現在条件(207)中的函数 $\varphi(x_2, \cdots, x_n)$ 的收斂半徑和最大模的相关性。类似的附注对下一段的結果也有效。

127. 高阶方程　上述方法几乎不要任何改变就可应用于高阶方程的情形。譬如考察兩个自变量的二阶方程。它关于对 x 的二阶导数是解出的：

(220)
$$r=f(x, y, u, p, q, s, t) \quad (p=u_x,\ q=u_y,\ r=u_{xx},\ s=u_{xy},\ t=u_{yy})。$$

在这情形下，柯西初始条件在于对 x 的初始値給定 u 及 p：

(221)
$$u|_{x=0}=\varphi(y);\quad p|_{x=0}=\psi(y)。$$

設 $\varphi(y)$ 及 $\psi(y)$ 为在点 $y=0$ 的正則函数。記：

$$\varphi(0)=u_0;\ \psi(0)=p_0;\ \varphi'(0)=q_0;\ \psi'(0)=s_0;\ \varphi''(0)=t_0,$$

且假定方程(220)的右边为在点

$$x=y=0;\ u=u_0;\ p=p_0;\ q=q_0;\ s=s_0;\ t=t_0$$

的正則函数。此时方程(220)有滿足柯西初始条件(221)的唯一的正則解。我們不推导这个断言的証明，它完全类似于以前的証明，而只限于指出未知函数的麦克劳林系数的單値計算的可能性。初

始条件(221)直接給我們对于任何非負值 α 的导数之值：

$$\left(\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial y^{\alpha}}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^{1+\alpha} u}{\partial x\,\partial y^{\alpha}}\right)_0,$$

就是說，初始条件給出函数本身以及对 x 进行不多于一次微分的导数的初始值。然后，方程本身使我們有：

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0。$$

关于 y 微分方程(220)的兩边 α 次，我們得到值：

$$\left(\frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x^2\,\partial y^{\alpha}}\right)_0。$$

对方程(220)兩边关于 x 微分，并完全像我們剛才对原来出發的方程(220)所做的一样，利用已得的方程，我們就有值：

$$\left(\frac{\partial^{3+\alpha} u}{\partial x^3\,\partial y^{\alpha}}\right)_0。$$

这样繼續进行，我們完全單值地得到未知函数的一切麦克劳林系数。

現在叙述对于任何阶方程組在最一般情形下的柯瓦列夫斯卡婭定理。設有关于自变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的未知函数 $u_1, \cdots, u_m$ 的 m 个方程的方程組：

$$\frac{\partial^{r_k} u_k}{\partial x_1^{r_k}} = f_k\left(x_i,\ u_i,\ \frac{\partial^l u_i}{\partial x_1^{l_1}\cdots\partial x_n^{l_n}}\right) \quad (k=1, \cdots, m)。 \tag{222}$$

这些方程的右边含自变量 x_s，函数 u_k 以及它們的到 r_k 阶的导数，而在这右边不应当出現导数 $\frac{\partial^{r_k} u_k}{\partial x_1^{r_k}}$，方程是关于它們解出的。同时柯西初始条件有形狀：

$$\begin{cases} u_k\big|_{x_1=0} = \varphi_k(x_2, \cdots, x_n); \quad \left.\dfrac{\partial u_k}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = \varphi_k^{(1)}(x_2, \cdots, x_n); \cdots; \\ \left.\dfrac{\partial^{r_k-1} u_k}{\partial x_1^{r_k-1}}\right|_{x_1=0} = \varphi_k^{(r_k-1)}(x_2, \cdots, x_n) \quad (k=1, \cdots, m)。 \end{cases} \tag{223}$$

我們假設最后等式右边的函数对零值的变量是正則的。要来确定

这些函数以及它們的导数的初始值，而函数 u_k 的这些导数的总阶数不超过 r_k。我們假設方程(222)的右边是其变量在这种値时的正則函数，这些値等于从函数(223)經过剛才所說微分方法而得到的那些函数的初始値。

此时在初始条件(223)之下方程組(222)正則解的存在性与唯一性定理成立。

应当指出，若單單限于考察解析函数，可以建立偏微分方程的全部理論。往后在討論高阶方程时我們要說明这种观点的缺陷。

§2. 高阶方程

128. 二阶方程的类型 我們从二阶綫性方程的研究来开始高阶方程一般理論的叙述。設有自变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数 u 的二阶綫性方程：

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_1, \cdots, x_n) u_{x_i x_k} + \cdots = 0。 \tag{1}$$

我們假設系数 a_{ik} 为自变量 x_s 的給定的函数，并且注意到微分的結果与順序無关性，显然能假定 $a_{ki}=a_{ik}$。方程中未写明的各項不含二阶导数。它們和未知函数及其一阶导数的联系甚至是非綫性的，因之，严格地說，我們考察的方程只关于高阶导数是綫性的。我們假設所有函数和自变量是实的。

一般理論的基础在于把方程划分为若干类型。对屬于不同类型的方程，完全按不同样式提出基本問題，使用不同的解决問題方法，而且满足不同类型方程的函数具有不同的解析特性。在这一段我們要把形狀(1)的方程划分为各类型。为了这个，写出关于辅助变数 ξ_s 的二次形式：

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k。 \tag{2}$$

給变量 x_s 以确定的值 $x_s=x_s^{(0)}$，我們就有数字系数的二次形式。若这形式为正定的或負定的[III; 35]，則称方程(1)在所說的点 $x_s=x_s^{(0)}$ 屬于椭圓型。其次，我們說方程在空間 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的某区域 D 屬于椭圓型，只要它在这区域的所有点是屬于椭圓型。屬于椭圓型說明了对区域 D 的每一点，当二次形式(2)化为平方和时所有系数有同一符号，而且这些系数沒有一个等于零。完全类似的，我們說方程(1)在区域 D 中屬双曲型，或者有时說为正規双曲型，只要二次形式(2)在化成平方和时，所有的系数除了一个而外有确定的符号，而余下的一个有相反的符号。若是在区域 D 中的所有点，形式(2)在化成平方和时至少有一个系数等于零，則称方程(1)在区域 D 屬于拋物型。如果所有系数中沒有等于零的，而且也不是椭圓型和双曲型，有时候就称这种方程屬于超双曲型。若系数 a_{ik} 是常数，那末方程的屬于这一类型或那一类型与自变量的值無关。最簡單的椭圓型方程是拉普拉斯方程；最簡單的双曲型方程是波动方程，而最后最簡單的拋物型方程是热傳导方程。考察最后的方程：

$$u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})。$$

在記号(1)之下，我們可以写成：

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3}-\frac{1}{a^2}u_{x_4}=0,$$

并且二次形式(2)为：

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2。$$

它已具有化为平方和的形狀，而 ξ_4^2 的系数等于零。

如果方程(1)的系数 a_{ik} 含有函数 u 以及它的导数 u_{x_i}，那末我們只在固定了这个方程不論什么解 $u^{(0)}(x_1, \cdots, x_n)$ 时才能說到方程的类型。在系数 a_{ik} 中置 $u=u^{(0)}$ 及 $u_{x_i}=u_{x_i}^{(0)}$，就得到只是 x_s 的函数，并且能在上述的基础上对給定的解 $u^{(0)}$ 解决方程的类型問題。

若方程是非綫性的：

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, \cdots, u_{x_nx_n})=0,$$

那末为了确定对于給定的解 $u^{(0)}$ 方程的类型，須按公式

$$a_{ik}=\frac{\partial F}{\partial u_{x_ix_k}} \quad \text{而} \quad u=u^{(0)}$$

作出系数 a_{ik}，然后确定以下的綫性方程的类型：

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{x_ix_k}=0_{\circ}$$

129．常系数方程 考虑有常系数 a_{ik} 的方程（1）并写出相应的二次形式。試用自变量的綫性变換，把方程（1）中含二阶导数項的总体化为最簡單的形狀。为此，用綫性变换

$$y_k=c_{k1}x_1+\cdots+c_{kn}x_n \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

引入新自变量 y_s 来代替 x_s，我們当然要假設这变換的系数所組成的行列式异于零。关于旧变量的导数按以下公式用对新变量的导数来表示：

$$u_{x_i}=\sum_{s=1}^{n} c_{si}u_{y_s}$$

$$u_{x_ix_k}=\sum_{s,t=1}^{n} c_{si}c_{tk}u_{y_sy_t\circ}$$

代入方程（1），得到下面形狀的变后方程：

$$\sum_{i,k=1}^{n} a'_{ik}u_{y_iy_k}+\cdots=0,$$

其中新系数 a'_{ik} 按公式

$$a'_{ik}=\sum_{s,t=1}^{n} c_{is}c_{kt}a_{st} \tag{3}$$

通过旧的而表示。另一方面，如果我們在二次形式（2）中，替代变量 ξ_s 借助于矩陣 c_{ik} 的轉置矩陣来引进新变量 η_s，但是这个矩陣只用在通过新变量把旧变量表出，就是還：

$$\xi_k=c_{1k}\eta_1+\cdots+c_{nk}\eta_n \quad (k=1, \cdots, n),$$

不难驗証，变后的二次形式恰好有由公式（3）所定义的系数 a'_{ik}，即，

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k = \sum_{i,k=1}^{n} a'_{ik}\eta_i\eta_k。$$

然而如同我們所知道的，我們能够选取系数 c_{ik} 使二次形式（2）化成平方和，即

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\eta_i^2,$$

或者换句話說，当 $i \neq k$ 时 $a'_{ik}=0$ 而 $a'_{ii}=\lambda_i$。系数 λ_i 的符号就确定了方程的类型。对自变量保持以前的記号，我們得到下面形狀的方程：

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{x_i x_i} + \cdots = 0。$$

如果方程不仅对于二阶导数是綫性的和有常系数，那末变后方程就有形狀：

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f(x_1, \cdots, x_n)。 \tag{4}$$

按适当方式对自变量 x_i 添上数因子，我們总能达到使异于零的系数 λ_i 为（+1）或（−1）。我們假定所有 λ_i 异于零，并且証明在这情况下用函数 u 的初等变换就可以消去含一阶导数的各項，这就是按公式

$$u = ve^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{\lambda_i}x_i} \tag{5}$$

引进新未知函数 v 来替代函数 u。

代入方程（4），不难驗証，我們得到下面形狀的方程：

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_{x_i x_i} + c_1 v = f_1(x_1, \cdots, x_n)。$$

对于椭圆型方程一切 λ_i 同号，若有需要在方程兩边同乘以（−1），我們就可認定一切 λ_i 为正数。替代 x_i 引进新自变量 $x_i = \sqrt{\lambda_i}\, x'_i$，就得消去系数 λ_i，并且保持原来記号，我們就能断定，任何常系数

椭圓型的綫性方程可以化为形狀:

(6) $$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + c_1 u = f_1(x_1, \cdots, x_n)。$$

在双曲型情形,我們假設有$(n+1)$个自变量,并記自变量中之一为 t。当然我們能假定数 λ_i 中有 n 个負的和一个正的,而以 t 来記这个自变量,对于它 λ_i 是正的。終于任何常系数双曲型的綫性方程化成形狀:

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + cu = f_1(t, x_1, \cdots, x_n)。$$

130. 兩个自变量时的标准形式 在 [129] 中我們証过,在常系数的情形我們用綫性变换可以將方程所含二阶导数諸项的总体化成某种标准形式。在有随 x_s 而变的系数的情形,我們当然不能希望施行变量的綫性变换就化为标准形式,而需要用更一般的变换,可是就連这样我們也仅仅对兩个自变量的情形能解决問題。因此,我們来考慮兩个自变量的关于二阶导数为綫性的二阶方程:

(7) $$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + \cdots = 0。$$

替代(x, y)引进新自变量(ξ, η):

(8) $$\xi = \varphi(x, y); \quad \eta = \psi(x, y)。$$

关于旧变量的导数被以下公式用对新变量的导数表示:

$$u_x = u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x; \quad u_y = u_\xi \varphi_y + u_\eta \psi_y$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\varphi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\varphi_x\psi_x + u_{\eta\eta}\psi_x^2 + u_\xi \varphi_{xx} + u_\eta \psi_{xx}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\varphi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\varphi_y\psi_y + u_{\eta\eta}\psi_y^2 + u_\xi \varphi_{yy} + u_\eta \psi_{yy}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\varphi_x\varphi_y + u_{\xi\eta}(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + u_{\eta\eta}\psi_x\psi_y + u_\xi \varphi_{xy} + u_\eta \psi_{xy}。$$

代入方程(7)我們就有变后方程:

$$a'(\xi, \eta)u_{\xi\xi} + 2b'(\xi, \eta)u_{\xi\eta} + c'(\xi, \eta)u_{\eta\eta} + \cdots = 0,$$

其中

(9) $$\begin{cases} a'(\xi, \eta) = a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 \\ c'(\xi, \eta) = a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 \\ b'(\xi, \eta) = a\varphi_x\psi_x + b(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + c\varphi_y\psi_y。 \end{cases}$$

由直接代换可驗証以下恒等式：

$$a'c'-b'^2=(ac-b^2)(\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x)^2。\tag{10}$$

不難看出，差 $ac-b^2$ 的符号确定了方程（7）的类型。若 $ac-b^2<0$，方程屬双曲型，$ac-b^2>0$ 为橢圓型以及 $ac-b^2=0$ 时为拋物型。由于(10)，变换变数并不改变所說的差式的符号，就是說，实質上不改变方程的类型。

在常系數双曲型方程的情形，兩个自变量时的最簡單形式有形狀：

$$u_{xx}-u_{yy}+\cdots=0。\tag{11}$$

替代 (x, y) 引新自变量 (ξ, η)：

$$\xi=\frac{x+y}{2};\quad \eta=\frac{x-y}{2},\tag{12}$$

我們对双曲型得出形狀为

$$u_{\xi\eta}+\cdots=0\tag{13}$$

的最簡單形式。因此我們看到在兩个自变量情形，我們对于双曲型能取形狀(11)或(13)的最簡單形式。这些方程很容易从一个变到另一个。

回到方程（7），并假定在平面 (x, y) 的某区域 D 內方程（7）屬双曲型。就是說，对于 D 中之值 (x, y)，二次方程：

$$a(x, y)\tau^2+2b(x, y)\tau+c(x, y)=0\tag{14}$$

有不同实根。同时我們假設或是 $a\neq0$ 或是 $c\neq0$。若 $a=c=0$，則方程（7）已經有最簡單形式(13)。不失一般性，当然我們可以假設 $a\neq0$。考慮一阶偏微分方程：

$$a(x, y)u_x^2+2b(x, y)u_xu_y+c(x, y)u_y^2=0。\tag{15}$$

用 $f_1(x, y)$ 及 $f_2(x, y)$ 記方程(14)的根，我們見到方程(15)分解为兩个方程：

$$u_x=f_1(x, y)u_y\tag{16$_1$}$$

及

$$(16_2)\qquad u_x=f_2(x,y)u_y。$$

如果系数 a, b 及 c 是足够光滑的，而因之函数 f_1 及 f_2 也就是足够光滑，那末写出的方程在区域 D 的某部分有到二阶为止的連續导数[参看 **100**]。在变换（8）中取方程(16_1)的解作为 $\varphi(x, y)$ 而方程(16_2)的解作为 $\psi(x,y)$。可以选取这些解使得行列式 $\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x$ 在 D 的所提到的部分异于零。注意到，我們有

$$\varphi_x=f_1\varphi_y;\quad \psi_x=f_2\psi_y,$$

于是

$$(17)\qquad \varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x=(f_1-f_2)\varphi_y\psi_y。$$

从所写的公式推出，若行列式在某点变成零，則在这一点 φ 或 ψ 的兩个一阶导数等于零。因此需要作方程(16_1)及(16_2)这样的解，使它們的一阶导数不同时等于零。

函数 φ 与 ψ 滿足方程(15)，而由于（9）我們有 $a'=c'=0$，并从公式(10)推出 $b'\neq 0$，因此方程（7）化成形狀(13)。

如同我們在[**100**]見过的，方程(16_1)及(16_2)的解具有局部性，就是說，我們一般只能在 $f_k(x, y)$ 連續可导的区域的某一部分区域来作出这些方程异于常数的解，并且化方程（7）为标准形式也只能在所述的区域中进行。关于化方程（7）为标准形式的局部性的同样注解对以后的叙述也有效。

轉而考慮橢圓型方程。这时 $ac-b^2>0$ 且方程(14)的根为共軛复数。我們仍然能写下方程(15)。写出方程(16)中的一个：

$$u_x=\frac{-b+\sqrt{ac-b^2}\,i}{a}u_y,$$

其中根式可取算术値。假設系数 a, b 及 c 是 x 和 y 的解析函数，我們就能求到这方程的解析函数形狀的解 [**126**]：$u=\varphi(x, y)+\psi(x, y)i$，而且我們得到：

$$\varphi_x=-\frac{b}{a}\varphi_y-\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}\psi_y,\quad \psi_x=-\frac{b}{a}\psi_y+\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}\varphi_y。$$

現在施行变数变換（8）。利用所写出的关于 φ 和 ψ 的方程組以及公式(9)，我們得到：

$$b'=0;\ a'=c'=\frac{(ac-b^2)}{a}(\varphi_y^2+\psi_y^2),$$

在用 a' 除了以后，方程取形狀：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\cdots=0。\tag{18}$$

替代公式(17)將有：

$$\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x=-\frac{2\sqrt{ac-b^2}}{a}\varphi_y\psi_y。$$

因此，在橢圓型情形問題也得到解决。剩下要考慮拋物型方程。在这最后的情形方程(14)有等根，而方程(15)归結为一个方程，就是說，方程(16_1)和(16_2)一致。取这个方程的解作为函数 $\varphi(x, y)$，而对第二个函数 $\psi(x, y)$ 任意取，但使得 φ 和 ψ 的函数行列式异于零。由于 $\varphi(x, y)$ 的选法，我們在变后方程中將有 $a'=0$。此外，由于方程屬拋物型，就应当成立 $ac-b^2=0$，而公式(10)表明 $b'=0$。所以变換的結果將有 $a'=b'=0$。函数 c' 不能恒等于零，否則我們将得到一个一阶方程，而經过从 (ξ, η) 到 (x, y) 的逆变換就不可能使我們有二阶方程（7）。因此在拋物型的情形，我們有下面的标准形式：

$$u_{\eta\eta}+\cdots=0,\tag{19}$$

其中未写出各項不含二阶导数。

131. 柯西問題　我們以前見过[127]，对于二阶方程：

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t)=0,\tag{20}$$

柯西条件在特殊情况下可由对初始值 $x=x_0$ 给定函数 u 和它的偏导数 $u_x=p$ 組成：

(21) $$u|_{x=x_0}=\varphi(y); \quad p|_{x=x_0}=\psi(y)。$$

將称这样的条件为特殊的柯西条件。这些条件归結为沿 (x, y) 平面上的直綫 $x=x_0$ 給出未知函数 u 和它的偏导数 p 之值。同时注意另一个一阶偏导数之値：$q|_{x=x_0}=\varphi'(y)$ 直接从(21)的第一个条件得到。这样，依照初始条件我們就可以知道沿直綫 $x=x_0$ 函数本身和它的兩个一阶偏导数。不难提出更一般的柯西条件。假設在 (x, y) 平面上有某一不自相交的曲綫 λ，并假定沿这曲綫已給定未知函数 u 之値。因而沿曲綫 λ 我們也知道 u 关于 λ 的切綫方向的方向导数。为了知道沿任何方向的一阶导数，沿曲綫我們还应当再有一个資料，就是說，我們应給定沿曲綫 λ 函数 u 关于一任意方向的导数之値，这个方向异于曲綫 λ 的切綫方向。有了沿曲綫 λ 的关于 (x,y) 平面上的兩个方向的导数，我們就知道沿 λ 的关于这平面上任何方向的导数。因此，在所考慮的情形，沿曲綫 λ 我們必須給定函数 u 和它关于不和 λ 相切的任何方向的导数之値。沿 (x, y) 平面上的曲綫 λ 确定了 u 的数値就使我們得到三維空間 (x, y, u) 的某曲綫 l 。此外，沿 λ 的偏导数 p 及 q 我們是知道的。于是柯西条件最后化为給定三維空間 (x, y, u) 的某曲綫 l 和沿这曲綫的切平面的位置。利用参数表示，我們能把一般的柯西条件表述为以下形式：給定單参数的五个函数：

(22) $$x(t), y(t), u(t), p(t), q(t),$$

而必須满足关系：

(23) $$du=p\,dx+q\,dy。$$

最后的关系式是要求沿 λ 給定的兩个偏导数 p 及 q 和沿 λ 所給定函数 u 本身不相矛盾，就是說，根据給定的 p 和 q 計算而得的沿 λ 的切綫方向的导数和由于沿 λ 給定的函数 u 本身所得到的有同样数値。满足关系(23)的五个函数(22)确定了三維空間 (x, y, u) 的長条，而柯西問題在于求方程(20)的含給定長条的积分曲面。

对任意个数自变量的函数在一般情况下的柯西問題可按类似的方式提出。例如，考虑三个自变量的二阶方程：

$$F(x_1, x_2, x_3, u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \cdots)=0。\tag{24}$$

在这情形下，柯西初始条件成为在三維空間 (x_1, x_2, x_3) 的某曲面 S 上給定函数 u 和它的一阶偏导数。一当給定了函数 u 本身在 S 上的值，为了确定沿 S 的所有一阶偏导数，只要沿 S 給出关于不在曲面 S 切平面上的任意方向的导数就够了。若帶有柯西初始条件的曲面 S 是平面 $x_1=x_1^{(0)}$，則柯西初始条件有特殊形式：

$$u\big|_{x_1=x_1^{(0)}}=\varphi(x_2, x_3); \quad u_{x_1}\big|_{x_1=x_1^{(0)}}=\psi(x_2, x_3)。\tag{25}$$

上述的柯西条件在参数形式下成为給定双参数的七个函数：

$$\begin{gathered} x_1(t_1, t_2), x_2(t_1, t_2), x_3(t_1, t_2), u(t_1, t_2), \\ u_{x_1}(t_1, t_2), u_{x_2}(t_1, t_2), u_{x_3}(t_1, t_2), \end{gathered}\tag{26}$$

而必須滿足条件

$$du=u_{x_1}dx_1+u_{x_2}dx_2+u_{x_3}dx_3。\tag{27}$$

函数 x_1, x_2, x_3 的給定在于給定曲面，而其余的条件是沿这曲面函数 u 以及它的一阶偏导数的給出。滿足条件(27)的所給函数組(26)通常称为長条或者更确切地称为四維空間 (x_1, x_2, x_3, u) 的一阶長条，而柯西問題是确定方程(24)的积分曲面使含有已給的長条。在 n 个自变量 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的函数 u 的情形，長条由 $(n-1)$ 个参数的 $(2n+1)$ 个函数給定：

$$x_k(t_1, \cdots, t_{n-1}), u(t_1, \cdots, t_{n-1}), u_{x_k}(t_1, \cdots, t_{n-1})$$
$$(k=1, 2, \cdots, n)。$$

而这些函数必須适合关系式：

$$du=\sum_{k=1}^{n} u_{x_k}dx_k。$$

如果自变量中之一是时間 t，且帶有柯西初始条件的曲面是平面 $t=0$，那末这就是通常数学物理中的在給定了初始条件下求該方

程积分的問題了[II;163]。

柯西初始条件确定了在帶有初始条件的曲綫或曲面上的函数 u 和它的所有一阶偏导数。若是联合微分方程本身到初始条件去，則如同在[127]中見过的一样，在特殊柯西条件的情况下，我們能單值确定未知函数在所述曲綫或曲面上的所有二阶导数。若是給定的長条連同微分方程本身不能單值确定二阶导数，則称所給長条是特征長条。在下一段我們要对兩个自变量的拟綫性方程情形詳細講明这个問題。

132. 特征長条 考虑下面形狀的微分方程：

$$ar+2bs+ct+h=0, \tag{28}$$

其中系数及自由項是 (x, y, u, p, q) 的已知函数。要求出这个方程的积分曲面使含有給定的長条：

$$x(t),\ y(t),\ u(t),\ p(t),\ q(t) \quad (du=p\,dx+q\,dy)。 \tag{29}$$

显然，我們有：

$$dp=r\,dx+s\,dy; \quad dq=s\,dx+t\,dy,$$

再添上原来方程本身，就得到三个一次方程，用来确定在帶有柯西条件的基始曲綫 λ: $x(t)$, $y(t)$ 上的未知函数的二阶导数：

$$\begin{cases} dx\cdot r+dy\cdot s=dp, \\ dx\cdot s+dy\cdot t=dq, \\ ar+2bs+ct=-h。 \end{cases} \tag{30}$$

在这方程組中 r, s, t 是未知量，而其余的量由于(29)是参数 t 的已知函数。若所写的方程組的行列式异于零，則得到二阶导数确定的値。因此，求二阶导数的問題之为不相容或不确定，必要和充分条件是下列等式成立：

$$\Delta=\begin{vmatrix} dx, & dy, & 0 \\ 0, & dx, & dy \\ a, & 2b, & c \end{vmatrix}=0, \tag{31}$$

或者是它展开的形状：

$$a\,dy^2-2b\,dx\,dy+c\,dx^2=0。\tag{32}$$

要求出第二个条件使能保証問題恰是不确定的情形，就是説，它向我們保証方程組(30)有無穷許多个解。假設行列式(31)有一个二阶子行列式异于零。为确切起見，假定

$$\begin{vmatrix}0, & dy\\ a, & c\end{vmatrix}=-a\,dy\neq 0。$$

在这个情形下，方程組(30)有一个特征行列式 [III₁; 9]，为了問題是不确定的情形，必要而充分的是对条件(31)再添加这特征行列式为零的等式 [III₁; 9]：

$$\begin{vmatrix}dx, & dp, & 0\\ 0, & dq, & dy\\ a, & -h, & c\end{vmatrix}=0,$$

或者是展开的形状：

$$a\,dp\,dy+h\,dx\,dy+c\,dx\,dq=0。\tag{33}$$

还記起等式(23)，我們終于得到下面三个等式，它們完全描述了特征長条是那种从方程組(30)来确定二阶导数时有無限許多解答的長条：

$$\begin{cases}a\,dy^2-2b\,dx\,dy+c\,dx^2=0,\\ a\,dp\,dy+h\,dx\,dy+c\,dx\,dq=0,\\ du=p\,dx+q\,dy。\end{cases}\tag{34}$$

單独考虑特殊柯西条件的情况：

$$u|_{x=x_0}=\varphi(y);\quad p|_{x=x_0}=\psi(y)。\tag{35}$$

同时变数 y 起公式 (29) 中参数 t 的作用，而变数 x 保持定値 $x=x_0$。条件(32)成为等式 $a=0$。应指出，这等式不必恒等地而只要在初始条件 (35) 代入函数 u 之后满足。同时方程組 (30) 有形狀：

$$s\,dy=dp;\quad t\,dy=dq;\quad 2bs+ct=-h,$$

为了它是不确定，必要而充分的是所写出方程的第三个为前面两个的推論。以 dy 乘这个方程并考虑到前兩个方程，我們得到下面条件：

$$2b\,dp+c\,dq=-h\,dy,$$

在所給的情形下，它替代了条件 (83)。終于对特殊的柯西条件 (35)，我們將有決定特征長条的以下条件

$$(36)\qquad a=0;\quad 2b\,dp+c\,dq=-h\,dy;\quad du=q\,dy。$$

条件 $a=0$ 表明从方程(28)不能求 u_{xx}。第二条件：

$$2b\frac{dp}{dy}+c\frac{dq}{dy}+h=0$$

意味着在直线 $x=x_0$ 上給定的量 p 和 q 滿足方程 (28)，因为在所說直綫上 $s=\dfrac{dp}{dy}$ 及 $t=\dfrac{dq}{dy}$。第三条件給出明显的公式：

$$q|_{x=x_0}=\varphi'(y)。$$

133. 高阶导数 在前一段我們考慮过在給定長条上确定二阶导数的問題。現在轉到高阶导数的确定問題。假定說，我們所考慮的是行列式(31)异于零的情形。取方程(30)中前兩个的全微分，并且关于 x 和 y 微分已給的方程 (28)。于是我們得到确定在所給長条上未知函数的四个三阶导数的四个一次方程：

$$\begin{aligned}
(dx)^2u_{xxx}+2\,dx\,dy\,u_{xxy}+(dy)^2u_{xyy}&=\cdots\\
(dx)^2u_{xxy}+2\,dx\,dy\,u_{xyy}+(dy)^2u_{yyy}&=\cdots\\
au_{xxx}+2bu_{xxy}+cu_{xyy}&=\cdots\\
au_{xxy}+2bu_{xyy}+cu_{yyy}&=\cdots
\end{aligned}$$

这方程組的行列式有形狀：

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}
(dx)^2, & 2dx\,dy, & (dy)^2, & 0\\
0, & (dx)^2 & 2dx\,dy, & (dy)^2\\
a, & 2b, & c, & 0\\
0, & a, & 2b, & c
\end{vmatrix}。$$

可以証明这行列式等于行列式(31)的平方，就是說，也异于零。实际上，以 γ 記方程

$$a+2b\gamma+c\gamma^2=0 \tag{37}$$

的任何根，將第二列元素乘 γ，第三列乘 γ^2，第四列乘 γ^3 而加到第一列去。这时第一列元素成为：

$$(dx+\gamma\, dy)^3, \gamma(dx+\gamma\, dy)^3, 0, 0,$$

于是看出 Δ_1 是关于 dx 和 dy 的四次齐次多項式，而能被 $(dx+$ $+\gamma dy)^2$ 除尽。表示式 Δ_1 中 $(dx)^4$ 的系数等于 c^2，如果我們以 γ_1 和 γ_2 記方程(37)的根，則可写为：

$$\Delta_1=c^2(dx+\gamma_1 dy)^2(dx+\gamma_2\, dy)^2,$$

或者，考慮到二次方程根的性質：

$$\Delta_1=(c\, dx^2-2b\, dx\, dy+a\, dy^2)^2=\Delta^2。$$

在証明时我們假設方程 (37) 有不同的根。但是如果等式 $\Delta_1=\Delta^2$ 在这个假設下成立，則当方程(37)有等根时也要成立。为了确信这个事实，只要把系数 a, b, c 作一些变动，使方程(37)有不同的根，然后，把系数的变动值趋向于方程(37)有等根时原来的值，等式 $\Delta_1=\Delta^2$ 也因为趋向于極限而成立。

完全同样的，我們能得到确定五个四阶导数的五个一次方程，并且这方程組的行列式也是异于零，其余类推。假設一些有关的函数是解析和正則的。那末，像在特殊柯西条件的情形和关于 r 解出的方程的情形一样 [**127**]，我們也能在假定行列式 Δ 异于零的比較普遍的情況下，計算未知函数在給定的長条上的各阶导数。写出相应的泰乐級数，我們可以像在[**126**]中一样，証明它的收斂性。

現在轉到已給長条是特征長条的情形。同时我們只限于考察特殊的柯西初始条件 (35)。这些初始条件本身给出了当 $x=x_0$ 时 s 和 t，而余下要确定的只是 r。但是在把所得初始条件代入方程

(28)时，由于(36)，我們得到恒等式，而在 $x=x_0$ 时的导数 r 初看起来仍然完全不确定。关于 x 微分方程(28)的两边：

(38) $$ar_x+2bs_x+ct_x+(a_x+a_up+a_pr+a_qs)r+(\cdots)s+$$
$$+(\cdots)t+(\cdots)=0,$$

而在含点的圓括弧中出現的表示式，和在含 a 的导数的括弧中的式子完全相类似。如果把初始条件(35)和已經知道的二阶导数：

$$s|_{x=x_0}=\psi'(y); \quad t|_{x=x_0}=\varphi''(y)$$

代入所写的方程，記 $r|_{x=x_0}=\omega(y)$，則不难驗証，对未知函数 $\omega(y)$，我們得到黎卡提方程，就是下面形狀的方程：

$$\alpha(y)\omega'(y)+\beta(y)\omega^2(y)+\gamma(y)\omega(y)+\delta(y)=0,$$

其中 α,β,γ 和 δ 是 y 的已知函数。若取这方程的任何解，按照前面的証明就知道在 $x=x_0$ 时的 r，由此推知，在 $x=x_0$ 时除了 u_{xxx} 以外的所有三阶导数皆可确定。为了确定这个导数的初始值我們必須关于 x 微分方程 (38)，并且用已經計算出的所有初始条件代入这样得到的方程。那末，我們得到关于未知函数 $u_{xxx}|_{x=x_0}=\omega_1(y)$ 的綫性微分方程：

$$\alpha_1(y)\omega_1'(y)+\beta_1(y)\omega_1(y)+\gamma_1(y)=0。$$

这个步驟能够繼續进行。在求上述的黎卡提方程和后面的綫性方程的积分时，要接連不断地引进任意常数，問題的一切困难之点归結为选取这些常数的值使所得的泰乐級数收斂。可以証明：对双曲型方程可以按無限多种方法来进行，这就是說，通过特征長条实际上有無限多个积分曲面，但我們不去討論它了。因此，条件(36)或者更一般些，条件 (34) 是存在积分曲面使含有給定的特征長条的必要和充分条件，这些条件是初始条件所必須适合的。

作为例題来考慮最簡單的抛物型二阶方程：

(39) $$t-u_x=0, \quad 即\ u_x=u_{yy}。$$

此时 $a=b=0,\ c=-1$，而方程(32)给出 $dx=0$，即 $x=$常数。

在試圖解决柯西問題时，沿每条綫 $x=x_0$ 必須有某些特性。假定說，我們有特殊的柯西条件(35)。在方程(39)中置 $x=x_0$，我們得到 $\psi(y)=\varphi''(y)$，于是可見，函数 $\psi(y)$ 由已給函数 $\varphi(y)$ 完全决定。这对应于(36)的第二个条件满足的必要性。因此，在这情形下仅給出(35)的第一个条件就够了。

关于 x 微分方程(39)并置 $x=x_0$，我們完全确定了初始值：$r|_{x=x_0}=\varphi^{(IV)}(y)$。有了这个初始值，关于 x 对(39)微分两次且令 $x=x_0$，我們得到当 $x=x_0$ 时关于 x 的三阶导数的初始值等等。在所給定的情况下，关于 x 的导数的初始值按唯一的方式确定，而上述微分方程退化为有限关系式。既然确定了当 $x=x_0$ 时关于 x 的所有阶数导数的初始值，我們就能作出相应的泰乐級数。仅在 $\varphi(y)$ 是整函数并满足某种附加条件的情形下它在 $x=x_0$ 的鄰域才为收斂。我們記起在考虑無界樞軸上的热傳导問題时[**II**; **204**]，曾作出方程(39)的满足(35)的第一个条件而取定积分形狀的解。这时，自然無須假定 $\varphi(y)$ 是整函数。为了轉来用[**II**;**204**]中过去的記号，应当在方程(39)中改 x 为 t，y 为 x，并在[**II**; **204**]的方程中假定 $a^2=1$。

如果我們置 $\varphi(y)=0$，显然，就得到方程(39)的解恒等于零。我們証明方程(39)还有除一点 $y=0$，$x=x_0$ 而外满足同样初始条件：$u|_{x=x_0}=0$ 的初等解。假定說，

$$(40_1)\qquad u=\frac{1}{\sqrt{x-x_0}}e^{-\frac{y^2}{4(x-x_0)}}\quad 当\ x>x_0,$$

$$(40_2)\qquad u=0\quad 当\ x\leqslant x_0。$$

函数 (40_1) 以及它的一切导数当 x（从較大的值）趋向于 x_0 时趋近于零，就是說，由公式 (40_1) 及 (40_2) 所确定的函数和它的一切导数当通过直綫 $x=x_0$ 时保持連續，而在这直綫本身函数 u 和它的一切导数是零。只有点 $x=x_0$，$y=0$ 有例外，在这一点所作的函

数有奇异性。直接微分 (40_1) 可肯定所作函数满足方程(39)。在直綫 $x=x_0$ 上各点所作的函数自然已經不是 x 的解析而正則的函数，因为在这直綫的左方它恒等于零，而在右方异于零。因此所作的函数不能表示为 $(x-x_0)$ 的正整幂次的泰乐級数。解 (40_1) 和給出基本热源的解相差的是常数因子 [**II;204**]。

134. 实的和虚的特征 旣然方程 (28) 的系数不仅和 x 及 y 而且与 u, p, q 有关，只要固定了五維空間 (x, y, u, p, q) 的某一点，我們就能确定方程的类型。同时，若 $b^2-ac>0$，則我們有双曲型，若 $b^2-ac<0$，則有橢圓型，若 $b^2-ac=0$，則为拋物型。假設我們已給定某个長条 (29)，且設它是实的。如果沿这長条我們的方程屬于橢圓型，則方程(32)左方的表达式不可能化为零，由此推知，沒有实的長条能是特征長条。往后我們只考察双曲型。方程 (32) 是关于 $\frac{dy}{dx}$ 的二次方程。在双曲型的情形，它有兩个相异实根，我們用 $\mu_1(x, y, u, p, q)$ 和 $\mu_2(x, y, u, p, q)$ 来記，这样一来，上述方程分解为二，$dy=\mu_i dx (i=1, 2)$。因此替代方程 (34) 我們能写出兩个方程組：

$$
(41) \qquad \begin{cases} dy-\mu_i\, dx=0 \\ a\mu_i\, dp+h\mu_i\, dx+c\, dq=0 \quad (i=1, 2) \\ du=p\, dx+q\, dy \end{cases}
$$

它对应于兩个特征組。

特别簡單的情形是这样的，方程关于二阶导数是純綫性的，就是說，当系数 a, b 及 c 仅与自变量 (x, y) 有关的情形。这时基本方程(32)变成变量为 x 与 y 的一阶常微分方程：

$$
a(x, y)dy^2-2b(x, y)dx\, dy+c(x, y)dx^2=0。
$$

在双曲型情形它在 (x, y) 平面上确定兩族曲綫，通常称之为方程 (28) 的特征曲綫或特征。每条特征曲綫的特性是这样的，如果我

們沿这曲綫給出某种柯西条件，就是說，函数 u 和它的一阶导数，这样得到的長条或者引出关于二阶导数不相容的方程組 (30)，或者就是特征長条。对于不是特征的每条曲綫，任意柯西条件皆使二阶和以次的各阶导数得以确定。在椭圓型情形，方程(32)关于 $\frac{dy}{dx}$ 有虚根，我們在 (x, y) 平面上就沒有特征曲綫。如果我們轉到变数 (x, y) 的复素值，則从方程(32)能得到虚的特征。同时，一切函数自然要設为解析的，最后，在抛物型情形，方程(32)使我們在平面 (x, y) 上有一族特征曲綫。应用(32)的結果，我們見到，在化方程为标准形式时，我們取过特征曲綫族作为平面 (x, y) 上的坐标曲綫。

135. 基本定理 和一阶方程的情形完全一样，在求方程的积分时特征流形起重要作用。在这里我們有一些基本定理，而和对于一阶方程有过的那些定理完全相类似。

假定說，方程(28)的兩个积分曲面沿空間 (x, y, u) 的某曲綫 l 具有有限阶接触，就是說，沿这曲綫积分曲面有公共切平面，可是这些积分曲面的某些高于一阶的导数沿这曲綫是不同的。不难看出，这曲綫和沿着它的切平面一起必須是特征長条。事实上，若不是这样，从[133]的議論推知，我們便得到沿曲綫 l 各阶导数完全确定的值。因此，我們有下面定理：

定理 1. 若兩积分曲面沿曲綫 l 具有有限阶接触，則这曲綫連同相应的切平面成为特征長条。

特征長条的基本性質是那样的事实，沿这長条由方程求二阶导数时要引出不定方程組 (30)。这性質自然与自变量的选取無关，因此，我們得到下面定理：

定理 2. 对于变量 x, y 的任何改变，特征長条变为特征長条。

設有方程(28)的某一积分曲面。在这曲面上 u, p, q 是自变量 (x, y) 的确定的函数。把方程(28)的系数中的 u, p, q 用它們关于(x, y)的表达式来代，我們得到这些系数关于(x, y)的确定的表达式，而方程(32)是一阶微分方程，在曲面 S 上确定兩系曲綫。沿每条这样的曲綫 l 要滿足方程(23)和方程(32)，并且不难看出，沿这曲綫也必須滿足(34)中第二个方程。实际上，如果它不滿足，那末我們就有为了确定二阶导数的不相容的方程組，这同由曲綫 l 和积分曲面 S 的切平面所确定的長条屬于积分曲面 S 的那个事实相矛盾。因此，我們得到第三个定理：

定理 3．每个积分曲面能被特征長条族所遮盖。

注意到，若是保持在实的范圍內，这一結果仅能在双曲型和抛物型的情形下發生，并且在双曲型的情形，我們能用兩族特征長条来遮盖积分曲面。

現在証明逆定理，也就是以下的第四个定理：

定理 4．如果某一族特征長条構成曲面 $S: u=u(x, y)$，而 $u(x, y)$有到二阶为止的連續导数，則这曲面是方程(28)的积分曲面。

設有曲面 S 为一族特征長条所遮盖，这些長条滿足方程(34)。沿每个这样的長条我們有：

$$dp=r\,dx+s\,dy;\quad dq=s\,dx+t\,dy。$$

將 dp 和 dq 的表达式代入方程 (34)，我們得到下面兩个方程：

$$as\,dy^2+(ar+ct+h)\,dx\,dy+cs\,dx^2=0$$

$$a\,dy^2-2b\,dx\,dy+c\,dx^2=0。$$

第二式乘 s 而从第一式来减，并且必須考虑到由于 x 同 y 是自变量，微分 $dx\,dy$ 异于零，我們就得到基本方程(28)。

在一阶方程的情形，我們有过关于特征長条的普通的常微分方程組，由于这样，一阶偏微分方程的积分問題就化为常微分方程

組的积分問題。在現在的情形下，方程組(34)是关于五个未知函数的三个(全微分)方程。在列維-齐維他(Levi-Civita)的論文中(Math. Annal. t. 97)指出如何来扩大方程組(34)，而使能得到具有特殊形狀的含五个未知函数的五个一阶微分方程的方程組。对这方程組按确定的方式作出柯西問題的解，这也就导出对方程(28)的柯西問題的解。

在下一段我們来考察当方程組(34)有积分的特殊情形。

136. 中間积分　为以后計算的方便起見，改变确定特征長条的方程組(34)为新形狀。記起二次方程根的基本性質，我們能写 $\mu_1\mu_2=\frac{c}{a}$，并利用这个等式，我們可改写在 $i=1$ 时方程組(41)为形狀：

$$dy-\mu_1\,dx=0;\quad dp+\mu_2\,dq+\frac{h}{a}\,dx=0;\quad du-(p+q\mu_1)\,dx=0。\tag{42}$$

第二組(当 $i=2$)方程从上一組交换字母 μ_1 和 μ_2 而得到。要求出这样的函数 $V(x,\ y,\ u,\ p,\ q)$，使它的全微分由于方程(42)而等于零：

$$V_x\,dx+V_y\,dy+V_u\,du+V_p\,dp+V_q\,dq=0。\tag{43}$$

从方程組(42)确定 dy，du 及 dp 并代入上方程的左端，我們应当使其余的微分 dx 和 dq 的系数等于零。因此，原来要函数 V：

$$V(x,\ y,\ u,\ p,\ q)=C\tag{44}$$

是方程組(42)的积分，必須且只須使函数 V 滿足以下兩个綫性齐次一阶偏微分方程

$$\begin{cases} V_x+\mu_1V_y+(p+\mu_1q)V_u-\dfrac{h}{a}V_p=0, \\ V_q-\mu_2V_p=0。\end{cases}\tag{45}$$

若是我們在这些方程中交换 μ_1 和 μ_2 的位置，那末得到类似的方程組，它表示函数 V 是特征長条的第二方程組的积分的必要和充分条件。方程組(45)的求解方法，我們在[120]中已有叙述。假定說，我們能求出这方程組的等于常数的显然解以外的解。我們証明，这时一阶方程(44)的每一个解，若不是奇解，就是我們的方程(28)的解。实际上，在所考虑的情形，V 的全微分由于(42)而必須为零，就是說，应当是这些方程左边的綫性組合：

$$dV=\alpha(dy-\mu_1\,dx)+\beta\left(dp+\mu_2dq+\frac{h}{a}dx\right)+\gamma(du-p\,dx-q\,dy)。\tag{46}$$

設有方程 (44) 的某积分曲面 S。在这曲面上 u, p, q 是 (x, y) 的确定函数，又求一阶方程 $dy-\mu_1 dx=0$ 的积分，我們得到遮盖曲面 S 的某曲綫族。此外，沿这些曲綫我們显然应有 $du=p\,dx+q\,dy$。注意到，由于剛才所說的公式(46) 中的 α 和 γ 后面的因子沿曲綫等于零，因此，我們沿这曲綫也就是沿曲面 S 得到等式：

$$\beta\left(dp+\mu_2 dq+\frac{h}{a}dx\right)=0。$$

按条件，积分曲面 S 不是奇解，由此推知公式(43)左边 dp 或 dq 的系数异于零。从此导出 $\beta\neq 0$，并推知沿我們的曲綫，(42)的所有三个方程滿足，就是說，曲面 S 被方程(28)的特征長条所遮盖。然而由[135]的第四个定理，便知这曲面是方程(28)的积分曲面。因此，有了积分(44)，再求一阶方程(44)的积分，我們就得到方程(28)的某一类解。假定說，我們能够求得方程(45)的兩个独立解 V_1 及 V_2。此时，对于任意选取的函数 Φ 所作的表达式 $V_1-\Phi(V_2)$ 也是方程組 (45) 的解，而我們就有含任意函数 Φ 的方程組 (42) 的如下的积分：

$$V_1-\Phi(V_2)=0。\tag{47}$$

設已求得方程 (28) 的积分曲面含有給定長条 (29)。在函数 V_1 和 V_2 中，將 x, y, u, p, q 以它們的表达式(29)来代，我們得到参数 t 的兩个确定的函数：$v_1(t)$ 和 $v_2(t)$。同时方程(47)化为形狀 $v_1(t)-\Phi[v_2(t)]=0$。替代 t 导入新变数 $\sigma=v_2(t)$。关于 t 解出这方程，得到 $t=\omega(\sigma)$，而上面的等式以变量 σ 表出，就使我們确定了函数的形狀 $\Phi(\sigma)=v_1[\omega(\sigma)]$。在函数 $\Phi(\sigma)$ 的形狀确定之后，方程(47)就是确定的一阶方程。对它求解在初始条件(29)下的柯西問題，我們也就得到对方程 (28) 柯西問題的解。方程組 (42) 的或由交換 μ_1 与 μ_2 所得的类似方程組的每一积分通常称为方程(28)的中間积分。我們指出，如果方程組 (45) 是完全的，那末它就有三个独立的解。可以証明，这情形只在 $\mu_1=\mu_2$ 时能够發生。

附注 假設 $h=0$，而系数 a, b 及 c 是常数或者只与 p 及 q 有关。此时 μ_1 和 μ_2 也只是同 p 与 q 相关，若要求得只和 p 及 q 有关的 V，我們就能求到方程組(45)的解。由于 $h=0$，第一个方程当任意选取 $V(p, q)$ 时滿足，并且我們得到为了确定 V 的一个方程：$V_q-\mu_2(p, q)V_p=0$。求得这方程的解 $V_1(p, q)$，我們得到一阶方程 $V_1(p, q)=$常数，它的每个解就滿足原來的二阶方程。替代 $\mu_2(p, q)$ 我們也可利用方程 (32) 的第二个根 $\mu_1(p, q)$，而得

到另一个一阶方程：$V_2(p, q)=$常数。

137．孟日-安培尔方程　所有上述的特征长条和中間积分的理論能直接推广到較一般类型的方程上去，就是关于 r, s, t 以及 $rt-s^2$ 为綫性的方程，亦即下面形状的方程：

$$ar+2bs+ct+g(rt-s^2)+h=0 \quad (g\neq 0),$$

它通常称为孟日-安培尔方程。設已給定某长条，若表达式

$$A=a\,dy^2-2b\,dx\,dy+c\,dx^2+g(dx\,dp+dy\,dq)$$

异于零，则沿这长条确定的二阶导数全是单値的。若这个表达式变成零，而式子：

$$B=a\,dp\,dy+h\,dx\,dy+c\,dq\,dx+g\,dp\,dq$$

异于零，那末为了确定二阶导数就引出不相容的方程組。特征长条由以下三个方程确定

$$A=0; \quad B=0; \quad du=p\,dx+q\,dy。$$

若以 μ_1 及 μ_2 来記方程

$$\mu^2+2b\mu+ac-gh=0$$

的根，两組特征长条能由以下的方程組来确定：

$$g\,dp+c\,dx+\mu_1\,dy=0; \quad g\,dq+a\,dy+\mu_2\,dx=0; \quad du=p\,dx+q\,dy。$$

第二組由所写方程改变 μ_1 与 μ_2 的位置而得到。所有这些結論完全和以前相类似地能用計算得到。对于孟日-安培尔方程，在[135]中叙述的基本定理仍然成立。

在求中間积分时，替代方程組(45)，我們有方程組：

$$V_x+pV_u-\frac{c}{g}V_p-\frac{\mu_2}{g}V_q=0,$$

$$V_y+qV_u-\frac{\mu_1}{g}V_p-\frac{a}{g}V_q=0。$$

第二組可以象前面一样从写出的方程变换文字 μ_1 和 μ_2 而得到。所有上述的中間积分的性质也仍旧正确。

138．任意个数自变量时的特征　現在要考虑有任意个数自变量的二阶方程：

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{x_i x_k}+\cdots=0 \quad (a_{ik}=a_{ki}), \tag{48}$$

而未写出的各項不含二阶导数。系数 a_{ik} 暂时将假設只同自变量

x_s 有关。在这情形下我們只限于講明那样的条件：使方程(48)連同柯西初始条件不給出單值确定二阶导数的可能性，就是說，在求这些导数时引出不相容性或不确定性。此条件类似于两个自变量情形的条件(32)。我們开始在柯西初始条件有特殊形式

$$u\big|_{x_1=x_1^{(0)}}=\varphi(x_2,\cdots,x_n);\quad u_{x_1}\big|_{x_1=x_1^{(0)}}=\psi(x_2,\cdots,x_n)$$

的情况下考虑我們的問題。这些条件使我們有确定在超平面 $x_1=x_1^{(0)}$ 上所有一阶导数和除 $u_{x_1x_1}$ 以外的所有二阶导数的可能性。为了确定导数 $u_{x_1x_1}$ 我們必須利用方程(48)本身，而在其中置 $x_1=x_1^{(0)}$。若这时發生 $a_{11}\neq 0$，那末对所說的导数就有了确定的值。若把所說的导数代入之后出現了 $a_{11}=0$，那末我們或者引出不可能的等式，或是得到恒等式。因此，在特殊柯西条件的情形下所求条件有形狀：

$$a_{11}=0。\tag{49}$$

現在轉到一般情形，当柯西初始条件給定在某超曲面上：

$$\omega_1(x_1,\cdots,x_n)=0。\tag{50}$$

除了在最后式子中出現的函数 ω_1 而外，再引进 $(n-1)$ 个函数 $\omega_s(x_1,\cdots,x_n)\quad(s=2,\cdots,n)$ 使我們能够作自变量的变换：

$$x_s'=\omega_s(x_1,\cdots,x_n)\quad(s=1,\cdots,n),\tag{51}$$

就是說，使得最后諸方程能关于 x_s 解出。把对原来变量的导数用关于新变量的导数表出，而只写下出現我們所关心的导数的那些項：

$$u_{x_i}=u_{x_1'}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}+\cdots;\quad u_{x_ix_k}=u_{x_1'x_1'}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}+\cdots。$$

变换后的方程將有形狀：

$$a_{11}'u_{x_1'x_1'}+\cdots=0,$$

其中

$$a_{11}'=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k},\tag{52}$$

而未写出的各項不含导数 $u_{x_1'x_1'}$。由于(51)，对变后方程，初始条件給定在超平面上 $x_1'=0$，也就是有特殊形狀。因此，在这情形下，我們能利用条件(49)，不过只是在新自变量之下。考慮到(52)，因而我們能斷定为了超曲面(50)上的柯西初始条件在求二阶导数时会引出不相容性或不确定性起見，其必要而充分的是函数 ω_1 在条件 $\omega_1=0$ 下满足方程：

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}=0, \tag{53}$$

換句話說，就是方程(53)由于方程(50)而满足。每一个满足这条件的超曲面称为方程(48)的特征曲面或特征。

若是我們固定了任何一点 $M_0(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$，則在这点系数 a_{ik} 有确定的值，記之为 $a_{ik}^{(0)}$。設一向量的实数支量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 满足方程：

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^{(0)}\alpha_i\alpha_k=0, \tag{53_1}$$

則所对应的方向称为在点 M_0 的特征法綫方向。方程(53)等价于在曲面 $\omega_1(x_1, \cdots, x_n)=0$ 的每一点，这曲面的法綫方向是特征法綫方向。若曲面 $S(\omega_1=0)$ 是这样的，在它各点的法綫方向無一是特征的，就是說，沿这曲面方程(53)的左边异于零，則由以上所述推知，在施行变数变換(51)之后，方程(48)可改写为形狀：

$$u_{x_1'x_1'}=\sum_{i,k=2}^{n} a_{ik}''u_{x_i'x_k'}+\sum_{i=2}^{n} a_{1i}''u_{x_1'x_i'}+\cdots, \tag{48_1}$$

并且曲面 S 变为平面 $x_1'=0$。这提供了把初始条件在所述曲面上的柯西問題改变为初始条件在平面 $x_1'=0$ 上的柯西問題的可能性。若方程(48)有解析特性——例如它是綫性的而有解析的系数，曲面 S 不是特征的，并且 ω_1 是解析函数，那末在适当的条件下，变后的柯西問題能按照柯瓦列夫斯卡娅定理来解。若曲面 S 是特征的，則函数 u 和它的一阶偏导数之間必有某种关系式联系。

事实上，u 和它的偏导数在 S 上之值可用在平面 $x'_1=0$ 上同样的量来表示，反之亦成立。設当 $x'_1=0$ 时，

$$u=\varphi_0(x'_2, \cdots, x'_n);\quad u_{x'_1}=\varphi_1(x'_2, \cdots, x'_n)$$

$$u_{x'_k}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial x'_k}\quad (k=2, \cdots, n)。$$

若 S 是特征曲面，則在变后方程中，当 $x'_1=0$ 时 $a'_{11}=0$，我們有方程：

$$\sum_{i,k=2}^{n} a'_{ik}u_{x'_ix'_k}+\sum_{i=2}^{n} a'_{1i}u_{x'_1x'_i}+\cdots=0,$$

其中未写出各項只含一阶导数。由此得到函数 φ_0 和 φ_1 之間的联系：

$$\sum_{i,k=2}^{n} a'_{ik}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x'_i\,\partial x'_k}+\sum_{i=2}^{n} a'_{1i}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x'_i}+\cdots=0。$$

一般說来，这关系式不成为关于 φ_0 与 φ_1 的恒等式。

現在假定系数 a_{ik} 不仅与 x_s 而且同 u 及 u_{x_s} 相关。在 $(n-1)$ 維流形(50)上的柯西初始条件和 $(n-1)$ 个参数相关。假設 $x_2, \cdots, x_n$ 是这些参数。把这些初始条件的表达式代入系数 a_{ik}，我們仍旧得到方程(53)，它必須由于(50)而滿足，这就可以决定在給定的初始条件下曲面 $\omega_1=0$ 是否为特征曲面。

往后我們限于考虑系数 a_{ik} 只与 x_s 有关的情形。我們注意，若方程(48)屬于椭圓型，那末就如同在兩个自变量的情形一样，方程 (53) 除了 $\omega_1=$ 常数而外不可能有实的解。这最后的解对于我們的問題显然是沒有兴趣的。

139. 双特征　方程(53)必須由于 (50) 而得滿足。現在要求使这方程关于 x_s 恒滿足。此时方程 (53) 將是通常的一阶偏微分方程，并且它的每一个解若不是常数，将给出不是一个特征而是整族特征：

$$\omega_1(x_1, \cdots, x_n)=C, \tag{54}$$

其中 C 是任何常数。反之，为了最后的方程对任何常数 C 确定一族特征，必要而充分的是 ω_1 滿足方程 (53)。同以前完全一样，[100]，可以証明每一个特征能包含在形狀(54)的族中，因之方程(53)的解就給出所有的特征。

在数学物理方程中自变量之一，也就是时間，和其余的通常确定空間坐标的变量相比較占据特殊地位。以后我們認定这个特殊自变量为变量 x_n，并記 $x_n=t$。对其余变量我們引用記号 $x_1,\cdots,x_m$，也就是假設 $n=m+1$。

写曲面方程 (50) 为关于 t 解出的形狀：$t-\omega(x_1,\cdots,x_m)=0$ 并認为系数 a_{ik} 与 t 無关。

把方程 $t-\omega=0$ 的左边代入方程 (53)，我們得到关于函数 ω 的以下方程：

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\omega}{\partial x_k}-2\sum_{i=1}^{m} a_{in}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}+a_{nn}=0。\tag{55}$$

这方程应該滿足，严格地說，是由于 $t=\omega$ 而滿足。然而它完全不含字母 t，因此我們能肯定它必須恒滿足。回到一般情形，考虑方程(53)，并写下对应于这个一阶方程的柯西方程組。方程(53)不包含函数 ω_1 本身，因而在所对应的柯西方程組中，我們無須写出包含 $d\omega_1$ 的那个比式。这样，我們得到以下的常微分方程組：

$$\frac{dx_k}{ds}=2\sum_{i=1}^{n} a_{ki}p_i,\tag{56$_1$}$$

$$\frac{dp_k}{ds}=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}p_ip_j,\tag{56$_2$}$$

$$(k=1,2,\cdots,n)$$

其中 s 为某輔助参数。取某一族特征超曲面 $\omega_1(x_1,\cdots,x_n)=C$ 并置 $p_k=\dfrac{\partial\omega_1}{\partial x_k}$。同时 p_i 用$(x_1,\cdots,x_n)$表达，并把这些表达式代到方程(56$_1$)的右边，我們得到关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的一阶方程組。若取这方程組的任何解，并代入上述 p_k 通过 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的表示式，則不

难驗証所得的函数將滿足方程(56_2)。实际上：

$$(57)\quad \frac{dp_k}{ds}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x_k\,\partial x_i}\frac{dx_i}{ds}=2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x_k\,\partial x_i}a_{ij}p_j=2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial x_k}a_{ij}p_j。$$

更改方程(53)中标数 k 为 j，并关于 x_k 微分兩边：

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}p_ip_j+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial p_i}{\partial x_k}p_j+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}p_i\frac{\partial p_j}{\partial x_k}=0。$$

由于 $a_{ij}=a_{ji}$ 后面兩和式彼此相等，又利用这个恒等式我們能改写公式(57)为形狀：

$$\frac{dp_k}{ds}=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}p_ip_j,$$

这和方程(56_2)相一致。应指出等式(54)同时是方程組(56_1)的积分。事实上：

$$\frac{d\omega_1}{ds}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}\cdot\frac{dx_k}{ds}=2\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}$$

而最后的和式由于(53)而恒等于零。帶有坐标$(x_1,\cdots,x_n)$的空間 R_n 的那些曲綫，若由于求方程組(56_1)积分的結果而得到，在其中置 $p_i=\dfrac{\partial\omega_1}{\partial x_i}$，则称之为对应于特征曲面組 $\omega_1=C$ 的双特征。

若在求方程組(56_1)积分时，我們取某超曲面 $\omega_1=C_0$ 上的点作为初始値 x_k，則所有对应的双特征將落在所說的超曲面上。就是說，方程(48)的每个特征曲面能由双特征構成。現在指出方程組(56_1)，(56_2)的解产生特征超曲面的那些条件。曲面(54)是 R_n 中的$(n-1)$維流形。在双特征的方程中出現参数 s，由此推知为了形成特征超曲面必須取与$(n-2)$个参数有关的双特征族。我們假設，出現在方程組(56_1)与(56_2)的变量的初始値 $x_k^{(0)}$ 和 $p_k^{(0)}$ 与$(n-2)$个参数 $t_1,\cdots,t_{n-2}$ 有关。重复[106]中的議論，不难断定，要使所得到的双特征族給出特征超曲面，必須且只須使上述初始値滿足以下关系式[110]：

$$(58)\qquad \sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}^{(0)}p_i^{(0)}p_k^{(0)}=0$$

$$\sum_{s=1}^{n} p_s^{(0)} \frac{\partial \omega_s^{(0)}}{\partial t_j} = 0 \quad (j=1, \cdots, n-2) \tag{59}$$

其中 $a_{ik}^{(0)}$ 是代 $x_s = x_s^{(0)}$ 到表达式 a_{ik} 的結果。同时，預先假定变量 $(x_1, \cdots, x_n)$ 关于 $(s, t_1, \cdots, t_{n-2})$ 的 $(n-1)$ 阶函数行列式中至少有一个异于零。

一切所說的結果由求一阶方程积分的柯西方法直接推出 [110]。在当前情况下，非本質的复杂化在于所求积分曲面的方程是隐式的 $\omega_1(x_1, \cdots, x_n) = C$，而与之相联系的柯西方程組 (56) 并不包含函数 ω_1 本身的那个事实。

在数学物理中方程 (53) 的奇积分曲面，也就是所謂这方程的特征角錐起着重要的作用。此特征曲面按前述方法得到，如果我們假設 $x_k^{(0)}$ 固定了，即（角錐的頂点）和参数無关，而 $p_k^{(0)}$ 受条件 (58) 的限制。注意到由这个方程确定 n 个量 $p_k^{(0)}$ 为 $(n-1)$ 个参数的函数。由于方程 (58) 的齐次性，参数之一作为 $p_k^{(0)}$ 前的因子。不难驗証，当改 s 为 $\frac{1}{\alpha} s$ 及 p_k 为 αp_k 时，其中 α 与 s 無关，方程 (56_1) 和 (56_2) 并不改变。作为 $p_k^{(0)}$ 前的因子的参数因而是多余的，因为它反正通过 s 而出現。所以，例如我們能假定量 $p_k^{(0)}$ 中的一个等于 1。

若系数 a_{ik} 是常数，那末方程 (56_2) 表明 p_k 必須是常数，而我們从方程 (56_1) 看出，x_k 是 s 的一次多項式，就是說，若 a_{ik} 是常数，則双特征是 R_n 中的直綫。

考察一个重要的特殊情形。引用上述記号 $x_n = t$ 并考虑特殊形狀的方程：

$$u_{tt} - \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} u_{x_i x_k} + \cdots = 0, \tag{60}$$

其中 $m = n-1$，而系数 a_{ik} 不含 t，亦即仅与 $(x_1, \cdots, x_m)$ 相关。假定二次形式：

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\xi_i\xi_k$$

对于所有值 ξ_s 是正定的。在这情形下方程(53)具形状：

$$\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial t}\right)^2-\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}=0。$$

要求出关于 t 解出的形状的特征超曲面：

(61) $$\omega(x_1, \cdots, x_m)-t=0 \text{ 或 } t=\omega(x_1, \cdots, x_m)。$$

此时 $p_0=\dfrac{\partial\omega_1}{\partial t}=-1$，而对于函数 ω 我們得到一阶方程：

(62) $$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\omega_{x_i}\omega_{x_k}=1$$

或

(63) $$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}p_ip_k=1。$$

对应于这方程的柯西方程組为：

$$\frac{dx_k}{2\sum_{i=1}^{m}a_{ki}p_i}=\frac{dt}{2\sum_{i,k=1}^{m}a_{ik}p_ip_k}=\frac{dp_k}{-\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}p_ip_j}。$$

若我們取某具体的特征超曲面(61)，則由(63)及最后的方程組推知，它的双特征的母綫必須滿足以下的方程組：

(64) $$\frac{dx_k}{dt}=\sum_{i=1}^{m}a_{ki}p_i \quad (p_i=\omega_{x_i}) \quad (k=1, \cdots, m)。$$

我們可以不把曲面(61)視作坐标是 $(x_1, \cdots, x_m, t)$ 的 n 維空間 R_n 中不动的曲面，而視作有坐标 $(x_1, \cdots, x_m)$ 的 m 維空間中随时間而变动的曲面。同时，我們設想方程組(64)的解是 R_m 中借助于参数 t（时間）而由参数式所确定的曲綫 λ。不待說，这时空間 R_m 的曲綫 λ 不是已經落在运动着的曲面上的。

例如，若在有坐标 (x_1, x_2, t) 的空間 R_3 內有錐面：

$$x_1^2+x_2^2-c^2t^2=0,$$

則在 (x_1, x_2) 平面上我們应当把它看作是中心在原点具有变动的半徑 ct 的圓周。若这錐面的直母綫是双特征，那末平面 (x_1, x_2) 上

的綫 λ 是一束經过原点的直綫。所引的例題如同我們在以后將見到的一样，对应于当所給定方程是波动方程的情形：

$$u_{tt}-c^2(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2})=0。$$

140．与变分問題的联系　設 A 是系数 a_{ik} 的矩陣。关于 p_i 解方程(64)，我們得到 $p_i=A^{-1}\frac{dx_k}{dt}$，其中 A^{-1} 照例是矩陣 A 的逆陣。將所得的 p_i 表达式代入方程(63)的左边，我們把关于 p_i 的二次形式改变为 $\frac{dx_k}{dt}$ 的二次形式，就是要有：

$$\sum_{i,k=1}^{m} b_{ik}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{dt}=\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}p_ip_k=1, \tag{65}$$

系数 b_{ik} 的矩陣 B 从矩陣 A 按公式

$$B=(A^{-1})^*AA^{-1}=(A^{-1})^*$$

得到 [III；32]，或者考虑到 A 是对称的，卽得：$B=A^{-1}$。

在空間 R_m 引进由等式

$$d\sigma^2=\sum_{i,k=1}^{m} b_{ik}dx_i dx_k$$

所定义的度量。由于(65)，沿着作为某特征超曲面(61)的組成部分的任何双特征所作的积分

$$\int d\sigma=\int\sqrt{\sum_{i,k=1}^{m} b_{ik}dx_i dx_k}=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\sum_{i,k=1}^{m} b_{ik}x_i'x_k'}\,dt, \tag{66}$$

等于积分道路的端点所对应的 t 的数值的差，就是說，在有度量(66)的条件下，所說双特征的任何弧的長度被对应于弧的端点的时間数值之差来确定。

比較上述的結果和[80]中的結果，我們看出方程(63)是对于积分(66)的場的基本函数的方程。于是超曲面族 $\omega(x_1,\cdots,x_m)=$ $=1$ 是对于积分(66)的某个变分問題場的横截曲面。其次，不难驗証，对应于整个特征曲面族并由方程(64)所确定的双特征是場

的極綫。为了确信这个，利用 (64) 来驗証双特征与超曲面 $\omega(x_1, \cdots, x_m)=t$ 为横截的那个事实就够了。

实际上，在当前情形下，横截条件成为 $p_i=\omega_{x_i}$ 和积分(66)的被积函数关于 x_i' 的导数成比例[80]，就是說，p_i 和 $\sum_{k=1}^{m} b_{ik}x_k'$ 成比例。但是关于 p_i 来解方程(64)，我們得到：

$$p_i=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}x_k',$$

这就証明了关于特征超曲面族和所对应的双特征相横截的断言。

应当指出，此时特征角錐和空間 R_m 中以角錐的頂点 $(x_1^{(0)}, \cdots, x_m^{(0)})$ 为中心，t 为半徑的拟似球面相合。

若方程(60)相应于空間 R_m 的波动过程，則借助于特征曲面，一阶方程(63)确定了这过程的几何光学，而双特征是光綫，确定同样的几何光学。上述的想法引出几何光学与某个变分問題的直接联系。如果已給定 $t=0$ 时的波前 S_0，为了得到任何时刻 t 的波前 S_t，我們必須作中心在 S_0 上半徑为 t 的一族拟似球面，并取这族的包絡(惠更斯構圖)。这个構圖和我們在 [109] 中所說的关于用一阶方程的特征角錐来解它的柯西問題相对应。我們不去講这个構圖的証明。它能从全积分的基本理論导出。要指出，半徑为 t 的拟似球面的包絡能由兩个超曲面組成。只是其中的一个將給出在时刻 t 的波前。

一切上面的論斷，可以不在空間 R_m，而在包含 t 为坐标之一的空間 R_n 中来进行。为了更加对称起見，考虑方程(48)的一般情形：

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{x_ix_k}+\cdots=0 \quad (a_{ki}=a_{ik}), \tag{67}$$

其中 a_{ik} 是 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的已知函数。特征曲面將由方程

$$D(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}p_ip_k=0 \quad \left(p_i=\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right) \tag{68}$$

确定，其中用 $D(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)$ 来記方程的左边。对应于这方程的柯西方程組，就是說，确定双特征的常微分方程組由 (56_1) 与 (56_2) 給定。改輔助参数 s 为 $\frac{s}{2}$，能改写这方程組为形狀：

$$(69)\qquad \frac{dx_k}{ds}=\frac{1}{2}D_{p_k};\qquad \frac{dp_k}{ds}=-\frac{1}{2}D_{x_k}\quad (k=1, \cdots, n)。$$

这組中的前一組方程有形狀：

$$\frac{dx_k}{ds}=\sum_{i=1}^{n} a_{ki}p_i\quad (k=1, \cdots, n)。$$

关于 p_i 解这些方程并代入方程(68)，得：

$$(70)\qquad \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}=0,$$

其中系数 b_{ik} 的矩陣 B 由公式 $B=A^{-1}$ 表示。在空間 R_n 引进度量：

$$d\sigma_1^2=\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}dx_i dx_k。$$

与以前的主要区别是那样的事实，对于双曲型方程，所写公式的右边可以取正值也可以取負值（不定的二次形式[III; 35]），且由此推知，$d\sigma_1$ 可以是虛的量。

从(70)推知，对双特征有关系 $d\sigma_1=0$，即在所取度量下，双特征的任一段的長度等于零。同时应当記住所引度量的非实的特性。

141. 間断曲面的傳播　假定說，方程(48)的某一解 u 的二阶导数在曲面

$$(71)\qquad \psi(x_1, \cdots, x_n)=0$$

上有第一类間断点，解的本身及其一阶导数当通过曲面(71)时保持連續。从曲面不同的兩側来看，所說的解 u 当作方程(48)的兩个不同的解。这些解在这曲面上有同一个柯西条件，但是二阶导数不同，因此，我們能够断定曲面(71)必須是方程(67)的特征曲面。

如果预先假定，不仅解 u 的本身及其一阶导数，而且二阶导数当点穿过曲面(71)时也保持連續，而間断只对高于二阶的导数發生，那末我們也会得到同样的結果。一般地說，二阶方程(67)的解在曲面(71)上有弱性間断，只要当通过这曲面时，u 和它的一阶偏导数保持連續，而某些高于一阶的导数在曲面上有第一类間断点。从上面的議論推知，弱性間断曲面只能是特征曲面。

仍然选定自变量 $x_n=t$，替代(71)，我們就有在空間 R_m 中移动的弱性間断曲面：

$$\psi(x_1, \cdots, x_m, t)=0。 \tag{72}$$

来定义这曲面的移动速度。在曲面(72)上取某一点 M，并通过它向 $\psi>0$ 的一側引曲面的法綫。在这方向的法綫上取一綫段 MM_1，从点 M 到与时間 t 的瞬間 $t+\Delta t$ 所对应的曲面的交点 M_1。当 $\Delta t\to 0$ 时，比 $|MM_1|:\Delta t$ 的極限通常称为曲面(72)的移动速度。引用記号：

$$g=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\psi_{x_i}^2}, \tag{73}$$

我們便有所提到的法綫方向余弦的以下表达式：

$$\cos(n, x_i)=\frac{\psi_{x_i}}{g}。 \tag{74}$$

微分关系式(72)：

$$\sum_{i=1}^{m}\psi_{x_i}dx_i+\psi_t dt=0。$$

量 dx_i 能看为沿法綫的無穷小移动 MM_1 在坐标軸上的投影，因而我們能写出：

$$\sum_{i=1}^{m}\psi_{x_i}|MM_1|\cos(n, x_i)+\psi_t dt=0。$$

考虑到(74)，我們得到曲面(72)的移动速度的以下表达式：

$$P=-\frac{\psi_t}{g}。 \tag{75}$$

在 $m=2$ 的情形，我們有在平面 (x_1, x_2) 上的移动曲綫，在 $m=3$ 的情形，有在三維空間 (x_1, x_2, x_3) 的移动曲面。

作为例題来考虑当 $m=1$ 时的波动方程：

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0。$$

基本方程(53)有形狀：

$$\psi_t^2-a^2\psi_x^2=0 \quad 或 \quad \frac{\psi_t}{\psi_x}=\pm a,$$

它表明每个弱性間断应当沿 x 軸以速度 $\pm a$ 而移动。在平面 (x, t) 上，特征是兩族直綫 $x\pm at=c$。再考虑方程

$$u_{tt}-f(u_x, u_t)u_{xx}=0,$$

这方程在研究一維情形下可压縮流体的运动时遇到。条件(53)写为形狀：

$$\psi_t^2-f(u_x, u_t)\psi_x^2=0。$$

假定說，我們在 x 軸上間断的一側有靜态。于是在間断的这一側和間断点本身我們有 $u_x=u_t=0$。上面的条件就写成了形狀 $\psi_t^2-f(0, 0)\psi_x^2=0$，并且間断的傳播速度由公式

$$P=\pm\sqrt{f(0, 0)} \tag{76}$$

确定。

現在轉到考虑有三个自变量的波动方程：

$$u_{tt}-a^2(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2})=0。$$

方程(53)这时写为形狀：

$$\psi_t^2-a^2(\psi_{x_1}^2+\psi_{x_2}^2)=0,$$

或者利用公式(73)，我們能写最后方程为形狀 $\psi_t^2-a^2g^2=0$，这个一阶方程表明这样的事实，每一特征曲綫在平面 (x_1, x_2) 上应以速度 a 移动。如果是从波动方程三維空間 (x_1, x_2, x_3) 的波动方程

$$u_{tt}-a^2(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3})=0$$

出發，对于特征曲面，我們也能得到完全类似的結果。应当指出，系数 a^2 也可假設是和坐标 (x_1, x_2, x_3) 相关。

142. 强性間断 在研究二阶方程的間断解时，我們曾經假定，函数本身及其一阶导数当通过間断曲面时保持連續，并且經受間断的导数不低于二阶（弱性間断）。只在这种假定下，我們才断定間断曲面必定是特征曲面。我們現在轉到强性間断的研究。这就是說，在二阶方程的情形下，一阶导数已經有了間断。我們的目的，要講明間断曲面仍必須是特征曲面的那些情形。我們考慮有三个自变量的波动方程。在討論中引进位于所說方程左边的算子：

$$\Box u = u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{a^2} u_{tt}. \tag{77}$$

这个表达式通常称为劳倫茨算子。在討論中还引进一个包含一阶导数的算子：

$$P(u) = u_x \cos(n, x) + u_y \cos(n, y) - \frac{1}{a^2} u_t \cos(n, t), \tag{78}$$

式中 n 是空間 (x, y, t) 的某一方向。設 D 是空間 (x, y, t) 的某区域，S 是它的境界曲面，且 n 是曲面 S 的外法綫方向。应用平常的高斯公式，我們能够和在 [II, 193] 中完全一样，对劳倫茨算子写出以下的格林公式：

$$\iiint_D [v\Box u - u\Box v] d\tau = \iint_S [vP(u) - uP(v)] dS, \tag{79}$$

其中 u 与 v 是在 D 内有到二阶为止的連續导数的兩个函数。假定 D 被某曲面 σ 分为兩部分 D_1 与 D_2，并且这曲面 σ 是函数 u 的一阶导数的間断曲面。要講明这种間断所必須滿足的条件，以使得公式 (79) 对整个范圍 D 在应用于有間断导数的函数 u 以及任何有連續到二阶为止导数的函数 v 时仍然成立。首先將假設函数 u 本身当通过 σ 时保持連續。設 M 是 σ 上某一点，l 是落在 σ

在 M 点的切平面上的任一方向。我們假設，从曲面 σ 的兩側趋向点 M 时，导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 有同一極限，并且这極限等于在曲面 σ 上函数 u 之値沿方向 l 的导数。这个条件有时称为运动学的相容条件。若 n 是 σ 在 M 点的一个固定的法綫方向，我們假設：从曲面的这一側或那一側趋向于点 M 时，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 有确定的極限，但是这些極限在曲面的不同側可以不同。

現在轉来叙述一个条件，称它为动力学的相容条件。我們將假設表达式(78)当趋向曲面的任意点时（n 为在这点的法綫方向）在曲面的兩側有同一極限値，只要在兩种情形下取同一个法綫方向 n。我們并且假定公式(79)分别应用在区域的兩部分 D_1 与 D_2。若是函数 u 在 D_1 与 D_2 中直到曲面有連續的二阶导数，这就一定实現。若我們对 D_1 及 D_2 应用公式(79)，則在曲面 σ 上，对这兩种情形，恰好有相反的外法綫方向，这使得对所写的兩种积分表达式 $P(u)$ 有不同的符号。將这兩个式子相加，我們得着对整个范圍 D 的公式(79)，因为取在 σ 上的兩个积分相互抵消。因此，在所作关于函数 u 的强性間断的假定下，我們得到公式(79)对整个范圍 D 的正确性。

現在要从所作的假定引出某些重要的推論。設 $\boldsymbol{n}$ 为 σ 的單位法綫向量。考虑向量积 $\operatorname{grad} u\times\boldsymbol{n}$。若以 $\boldsymbol{l}$ 記一單位向量，具有 $\operatorname{grad} u$ 在 σ 的切平面上投影的方向，因而 $\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial l}\boldsymbol{l}+\frac{\partial u}{\partial n}\boldsymbol{n}$，那末所講的向量积就等于 $\frac{\partial u}{\partial l}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{n}$，因之，当通过曲面 σ 时它是連續的。若我們作这向量积的三个支量，我們得到下面的三个表达式：

$$
(80)\qquad \begin{cases} u_x\cos(n,\ y)-u_y\cos(n,\ x)=M_1\\ u_y\cos(n,\ t)-u_t\cos(n,\ y)=M_2\\ u_t\cos(n,\ x)-u_x\cos(n,\ t)=M_3. \end{cases}
$$

由于运动学的相容条件，当通过曲面 σ 时，它們必須是連續的。除此而外，上述条件并使我們有第四个表达式：

$$u_x\cos(n, x)+u_y\cos(n, y)-\frac{1}{a^2}u_t\cos(n, t)=M_4, \tag{81}$$

它当通过曲面 σ 时也必須保持連續。把方程(80)与(81)看作关于 u_x, u_y, u_t 的四个一次方程。假如这方程組的系数矩陣的秩等于3，就是說，假若系数矩陣至少有一个三阶行列式异于零，那末我們能够关于上述导数来解所对应的三个方程，并且这些导数由連續函数 M_k 表示。同时函数 u 的一切一阶导数当通过 σ 时保持連續，而我們就不能有强性間断。因此，我們能够断定，所說的系数矩陣的秩必須小于3，就是矩陣

$$\left\|\begin{matrix}\cos(n, y), & -\cos(n, x), & 0\\ 0 & \cos(n, t), & -\cos(n, y)\\ -\cos(n, t), & 0 & \cos(n, x)\\ \cos(n, x), & \cos(n, y), & -\frac{1}{a^2}\cos(n, t)\end{matrix}\right\| \tag{82}$$

的所有三阶行列式必須等于零。例如，划去第一行，我們得到条件：

$$\cos(n, t)\cos^2(n, x)+\cos(n, t)\cos^2(n, y)-\frac{1}{a^2}\cos^3(n, t)=0。$$

我們假設 $\cos(n, t)\neq 0$，因而得到以下等式：

$$\cos^2(n, x)+\cos^2(n, y)-\frac{1}{a^2}\cos^2(n, t)=0。\tag{83}$$

若 $\psi(x, y, t)=0$ 是曲面 σ 的方程，則这等式显然可改写为形狀：

$$\psi_x^2+\psi_y^2-\frac{1}{a^2}\psi_t^2=0,$$

于是我們看出，就在所考虑强性間断的情形，曲面 σ 必須是方程 $\Box u=0$ 的特征曲面。条件 $\cos(n, t)\neq 0$ 显然等价于 $\psi_t\neq 0$。若条件(83)满足，則不难証明，矩陣(82)的所有三阶行列式等于零，而

M_4 是 M_1, M_2 以及 M_3 的綫性結合，我們此时显然有：

$$\cos(n, t) M_4 = \cos(n, y) M_2 - \cos(n, x) M_3。$$

这样，我們看到，若是給出 M_1, M_2, M_3 为連續的运动学的相容条件满足，又曲面 σ 是方程 $\Box u=0$ 的特征曲面，那末由此已經推出表达式 M_4 为連續，也就是已推出了动力学的相容条件。要指出，在以上的討論中，我們曾得到特征曲面方程，那时完全沒有对方程 $\Box u=0$ 的解进行研究，而只从等式(79)出發，在这等式的左边包含式子 $\Box u$。

143. 黎曼方法　現在轉向解柯西問題，而从有兩个自变量的綫性方程的情形开始，并且我們取已經化約为标准形式的方程：

$$L(u) = u_{xy} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y)。 \tag{84}$$

往后我們不再写出系数同自由項中所包含的变数。我們以 $L(u)$ 来記方程的左边。应記起，对所写方程来确定特征的基本条件(32)有形狀 $dx\,dy=0$，因而方程(84)的特征是平行于軸的直綫 $x=$常数和 $y=$常数。除了算子 $L(u)$ 而外，还要考虑所謂共軛算子，它按照以下方式定义：

$$M(v) = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv。$$

同时，我們当然要假設系数 a 与 b 連續可微分。利用 $L(u)$ 和 $M(v)$ 的表达式，不难驗証以下的基本恒等式：

$$2[vL(u) - uM(v)] = (u_x v - v_x u + 2buv)_y + \\ + (u_y v - v_y u + 2auv)_x。 \tag{85}$$

考虑平面 (x, y) 上有圍道 λ 的某区域 D，且假定函数 u 及 v 在区域 D 內有連續一阶导数和連續的混合二阶导数。同时，沿区域 D 对恒等式(85)的兩边积分，并利用已知的公式[II; 69]，得：

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\lambda P\,dx + Q\,dy,$$

我們就得到以下的格林公式：

$$(86)\qquad 2\iint_D [vL(u)-uM(v)]dS=$$
$$=\int_\lambda -(u_xv-v_xu+2buv)dx+(u_yv-v_yu+2auv)dy。$$

在有了这些预先的計算以后，就轉来解方程(84)的柯西問題。

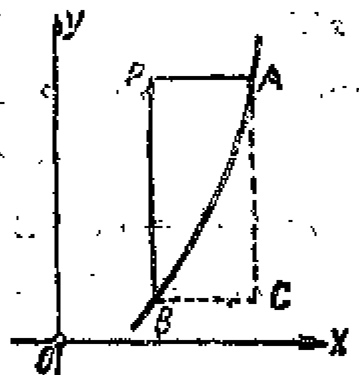
假定說，在平面(x, y)上我們已有某曲綫l，它和平行于坐标軸的直綫的交点不多于一个。这曲綫的方程能写为形狀$x=x(y)$或$y=y(x)$。我們假設在所考慮曲綫l的一段上，存在异于零的导数$x'(y)$或$y'(x)$。要按照在l上的柯西条件求方程(84)的解，就是說，沿着这曲綫函数u及其偏导数u_x, u_y之値已給定，并且照例必須滿足条件$du=u_x\,dx+u_y\,dy$。我們可以認为u, u_x, u_y沿l只是x或只是y的函数。

同时假設，給出u在l上数値的函数有連續导数，而u_x及u_y为連續函数。如我們以上所述，系数a和b按照假定有連續偏导数，而c与f是在包含l的某区域內連續，这將在以后的討論中牽涉到。往后我們要証明，在所作的假定下問題有解。目前我們的問題是在解存在的假定下建立关于問題的解的一些公式。

取在平面(x, y)上由曲綫l的弧和兩条从定点$P(x, y)$發出的平行于軸的二直綫所圍成的部分作为区域D(圖5)。假定說，在这区域內我們已知齐次共軛方程

$$(87)\qquad M(v)=0$$

的解。把公式(86)应用于所要求的柯西問題的解u及剛才提到的方程(87)的解，利用方程(84)，我們得到：



(圖五)

$$(88)\qquad -2\iint_D vf\,d\sigma=\int_{AB}+\int_{BP}+\int_{PA}。$$

沿回道λ的积分，分为沿曲綫l的弧AB和沿平行于軸的直綫BP及PA的积分。沿l弧的积分我們应当算是已知的，因为在这弧

上我們已給定了未知函数 u 和它的一阶偏导数之值。考慮沿所提到的直綫的积分。沿 PA 仅仅 x 变动，于是当沿 PA 积分时，我們得到积分：

$$-\int_{PA}(u_x v - v_x u + 2buv)\,dx。$$

我們可以改写被积函数为形狀：

$$u_x v - v_x u + 2buv = (uv)_x + 2u(bv - v_x),$$

于是推知，要有：

$$-\int_{PA}(u_x v - v_x u + 2buv)\,dx = (uv)_P - (uv)_A - \int_{PA} 2u(bv - v_x)\,dx,$$

其中例如 $(uv)_P$ 記 uv 在 P 点之值。

完全一样，沿 BP 求积分，使我們有下面的結果：

$$\int_{BP}(u_y v - v_y u + 2auv)\,dy = (uv)_P - (uv)_B + \int_{BP} 2u(av - v_y)\,dy。$$

公式(88)能改写为以下方式：

$$(89)\qquad 2v(P)u(P) = \int_{AB}[(u_x v - v_x u + 2buv)\,dx -$$
$$-(u_y v - v_y u + 2auv)\,dy] + u(A)v(A) + u(B)v(B) +$$
$$+\int_{PA} 2u(bv - v_x)\,dx + \int_{PB} 2u(av - v_y)\,dy - 2\iint_D fv\,d\sigma。$$

假定說，我們已知的不是方程(87)的任意解，而是方程的这种解，在直綫 PA 和 PB 上满足以下条件：

$$bv - v_x = 0 \text{ 在 } PA \text{ 上}\quad 及\quad av - v_y = 0 \text{ 在 } PB \text{ 上},$$

并且 $v(P)=1$。在这情形下，公式 (89) 中沿 PA 和 PB 的积分消失，而我們就得到下面的公式来表出未知函数在 P 点之值 $u(P)$，我們用 (x_0, y_0) 来記这点的坐标：

$$(90)\qquad 2u(x_0, y_0) = u(A)v(A) + u(B)v(B) +$$
$$+\int_{AB}(u_x v - v_x u + 2buv)\,dx - (u_y v - v_y u + 2auv)\,dy - 2\iint_D fv\,d\sigma。$$

現在更詳細地講明方程 (87) 的解 v 所应当滿足的条件。沿直綫 PA 我們应有：

$$v_x = b(x, y_0)v。$$

这方程可看为关于自变量 x 的常微分方程，并求它的积分，我們得到在直綫 PA 上如下的 v 之值：

$$v(x, y_0) = e^{\int_{x_0}^{x} b(x, y_0)dx} \quad (在 PA 上)。 \tag{91}$$

完全一样，在直綫 PB 上我們得到：

$$v(x_0, y) = e^{\int_{y_0}^{y} a(x_0, y)dy} \quad (在 PB 上)。 \tag{92}$$

同时在点 $P(x_0, y_0)$ 本身我們要有 $v(x_0, y_0) = 1$。因此方程 (87) 的解 v 在直綫 PA 及 PB 上应有由公式(91)和(92)所确定的已知值。不待說，它和点 (x_0, y_0) 的选取有关，实質上說来，它是一对点的函数。記之为：

$$v(x, y; x_0, y_0)。 \tag{93}$$

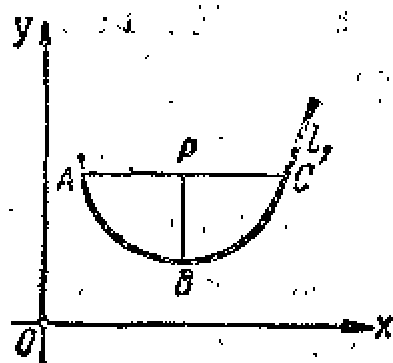
方程(87)的滿足条件(91)与(92)的这种解称为黎曼函数。这个解旣不和 l 上的柯西条件有关，也不和这曲綫的形狀有关。对于它点 (x, y) 起自变量的作用，而点 (x_0, y_0) 起参数的作用。要指出，我們用直接驗証公式(90)实际上給出滿足方程(84)和在 l 上的条件函数 $u(x_0, y_0)$ 的方法，就能証明問題的解存在。这种驗証有一些困难，我們將在以后的某一段中，給出柯西問題解的存在性的另外証明。

上述的黎曼方法把柯西問題的解决化为黎曼函数 (93) 的尋求。这函数本身是与方程(84)間类型的齐次方程(87)的解，但有和柯西条件完全不同的附加条件，就是如間上面見到的，只要在从 P 点發出的兩特征綫 PA 和 PB 上給定函数 v 的数值。以后我們要証黎曼函数的存在。还要指出，基本公式(90)是我們在問題的解存在的假定下得到的。因此，如果問題的解存在，則它必定用公

式(90)表示，从而証明了柯西問題的解的唯一性。但是剩下还要証明公式(90)实际上給出問題的解。往后我們不仅証明黎曼函数的存在，而且証明柯西問題的解存在，而按照前面所說，也就証明了公式(90)实际上給出問題的解的那个事实。

暫且假設所有上述的存在定理已經証明了，我們轉而說明公式(90)的一些推論。如同我們剛才所說的一样，这个公式証明了問題的解的唯一性。此外，由这公式立即推出，如果我們充分小地改变在曲綫 l 上的柯西条件，就能使問題的解改变任意小量，就是說，柯西問題的解和初始条件是連續相关的。此外，由公式(90)直接推知，未知函数 u 在 P 点之值只与曲綫 l 的弧 AB 上所展布的初始条件有关。若我們用兩种不同的方法延拓在 AB 弧上所給的初始条件，而保持在 A 与 B 兩点初始条件的連續性，那末我們在曲綫三角形 PAB 的外面，得到柯西問題的兩个不同的解，严格地說，就是我們將有兩个不同的柯西条件組，它对应于兩个不同的柯西問題的解，可是因为在兩个問題中，弧 AB 上的初始条件相一致，因此，这些解在曲綫三角形 PAB 中相符合。特征 PA 与 PB 是这样的綫，在所說的三角形內相一致的解，沿着它就分开为兩个不同的解了。

本段所有的討論自然沒有假設函數的解析性。要指出平行于坐标軸的直綫，也就是特征綫，交曲綫 l 不多于一点那个条件的作用。取(圖6)曲綫 l_1，它和 x 軸平行的直綫相交于兩点，并假定在它上面已給定柯西初始条件。应用黎曼方法或者利用曲綫三角形 PAB，或者利用曲綫三角形 PBC 我們能确定未知函数 u 在 P 点之值。一般說來，得到的兩个公式在 P 点对 u 給出不同的結果，因此，問題是



(圖六)

不可解的。

144. 特征的初始条件 現在考察因作黎曼函数所引出的問題，并且我們只考虑齐次方程的情形。設需要确定方程

$$u_{xy}+au_x+bu_y+cu=0 \tag{94}$$

的解，而只是給定未知函数 u 在和軸相平行的直綫 CA 及 CB 上的値(圖 5)。以 (ξ, η) 記 C 点的坐标。注意到，如果我們已有在 CB 上 u 的値，那末我們因而也就知道沿 CB 的偏导数 u_x。但是方程 (94) 当用 $y=\eta$ 和已知函数 u 及 u_x 代入时，就变为对沿 CB 的函数 u_y 的一阶綫性常微分方程。求这方程的积分，我們就知道沿 CB 偏导数 u_y 之値。恰好一样，有了沿 CA 的 u 之値，我們就知道 u 沿 CA 的两个一阶偏导数。当积分一阶常微分方程时所得到的任意常数是确定的，因为我們認为在 C 点 u_y 与 u_x 是已知的。上面的議論向我們表明，何以沿着特征 CA 与 CB，只要給出函数 u 本身的値就够了。前述的黎曼方法能逐字逐句地应用到所考虑的情形，而我們就得到对于未知函数的公式：

$$2u(P)=u(A)v(A)+u(B)v(B)+\int_{CA}(u_yv-v_yu+2auv)\,dy+$$
$$+\int_{CB}(u_xv-v_xu+2buv)\,dx,$$

像以前一样，其中 v 是黎曼函数(93)。

在写出的第一个积分中改写被积函数为形状：

$$u_yv-v_yu+2auv=-(uv)_y+2v(au+u_y)$$

并进行积分。对第二个积分运用类似的变换。結果我們將有以下公式：

$$u(P)=u(C)v(C)+\int_{CA}v(au+u_y)\,dy+\int_{CB}v(bu+u_x)\,dx\text{。} \tag{95}$$

把所得的公式应用于黎曼函数的一个性質的証明。首先要指出，共軛于算子 $M(v)$ 的算子是原来的算子 $L(u)$。实际上：

$$M(v)=v_{xy}-av_x-bv_y+(c-a_x-b_y)v.$$

而共轭算子为：

$$L_1(u)=u_{xy}+(au)_x+(bu)_y+(c-a_x-b_y)u=$$
$$=u_{xy}+au_x+bu_y+cu=L(u)。$$

应用公式 (95) 于算子 $M(v)$ 的黎曼函数 u。在算子 $M(v)$ 中，v_x 与 v_y 的系数等于$(-a)$和$(-b)$，于是这个算子的黎曼函数是方程(94)的解，在直綫 CA 与 CB 上满足方程：$au+u_y=0$ 及 $bu+u_x=0$，此外，我們应有 $u(C)=1$。同时点 $C(\xi,\eta)$ 將起函数(93)中点 $P(x_0,y_0)$ 的作用。

利用公式(95)于这个特殊情形，我們得到以下公式：

$$u(x_0,y_0;\xi,\eta)=v(\xi,\eta;x_0,y_0),$$

就是說，算子 $L(u)$ 的黎曼函数(93)要变为共轭算子 $M(v)$ 的黎曼函数，只要在其中交换点 (x,y)和(x_0,y_0)。若是表达式 $M(v)$ 和表达式 $L(v)$ 相合，則表达式或算子 $L(u)$ 称为自共轭的，且对自共轭算子，黎曼函数是它所牽涉到的兩点的对称函数。考虑到 $L(u)$ 及 $M(v)$ 的表达式，不难写出 $L(u)$ 是自共轭的条件：$a=b=0$。在二特征綫上給定函数本身数值时，方程 (94) 的定解問題通常称为有特征初始条件的問題。完全和在柯西問題的情形一样，公式(95)表明有特征初始条件的問題只能有一个解。

145. 存在定理　我們剩下要証明一些定理，它們用来确定柯西問題和有特征初始条件的問題的解的存在的。我們从后面的問題开始，并且將只考虑齐次方程的情形。需要求出方程(94)的解，而在特征 $x=x_0$ 和 $y=y_0$ 上取給定的值：

$$u|_{x=x_0}=\psi(y);\ u|_{y=y_0}=\varphi(x)\quad[\psi(y_0)=\varphi(x_0)]。\tag{96}$$

假設系数 b 有对 y 的連續导数，我們能改写方程 (94) 为有兩个一阶方程的方程組形狀：

$$u_x+bu=w;\tag{97}$$

$$w_y+aw=du,\tag{98}$$

其中
$$d=ab+b_y-c,$$
并且对新引进的函数 w，我們得着以下的初始条件：

(99)
$$w|_{y=y_0}=\varphi'(x)+b(x, y_0)\varphi(x)=\omega(x)。$$

把方程(97)看作綫性常微分方程，并考虑到(96)中第一个条件，我們得到函数 $u(x, y)$ 通过函数 $w(x, y)$ 表达的式子：
$$u(x, y)=e^{-\int_{x_0}^{x} b(\xi, y)d\xi}\left[\int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{\xi} b(\xi', y)d\xi'} w(\xi, y)d\xi+\psi(y)\right]。$$
完全同样的，方程(98)使我們有：
$$w(x, y)=e^{-\int_{y_0}^{y} a(x, \eta)d\eta}\left[\int_{y_0}^{y} e^{\int_{y_0}^{\eta} a(x, \eta')d\eta'} d(x, \eta)u(x, \eta)d\eta+\right.$$
$$\left.+\varphi'(x)+b(x, y_0)\varphi(x)\right]。$$
这些方程等价于有初始条件(96)的方程(97)和(98)。引进記号：

(100)
$$K_1(x, y; \xi)=e^{\int_{x}^{\xi} b(\xi', y)d\xi'};$$
$$K_2(x, y; \eta)=e^{\int_{y}^{\eta} a(x, \eta')d\eta'} d(x, \eta),$$
可以改写上述方程为形狀：

(101)
$$u(x, y)=e^{-\int_{x_0}^{x} b(\xi, y)d\xi}\ \psi(y)+\int_{x_0}^{x} K_1(x, y; \xi)w(\xi, y)d\xi$$
$$w(x, y)=e^{-\int_{y_0}^{y} a(x, \eta)d\eta}\ \omega(x)+\int_{y_0}^{y} K_2(x, y; \eta)u(x, \eta)d\eta。$$

应用通常为了确立收斂性而进行討論的逐次逼近法，就給出最后方程組的解的存在性和唯一性的証明。为了能够从方程 (97) 和 (98) 回到 (94)，必須存在連續的混合导数 u_{xy}。从連續函数 $u(x, y)$ 与 $w(x, y)$ 所滿足的方程(101)看出，若 $b(x, y)$ 有連續一阶偏导数，而 $\psi(y)$ 有連續导数，則关于 u_{xy} 的断言成立。若將方程 (101) 中第二个表达式 $w(x, y)$ 代入第一式，那末得到关于 $u(x, y)$ 有二重积分的通常的渥尔特拉方程。

轉到柯西問題解的存在性的証明。帶有柯西条件的曲綫 l 的方程，如前所見，能够写为形狀 $x=x(y)$ 或 $y=y(x)$，其中 $x(y)$ 与

$y(x)$有連續的而不等于零的导数。我們可以把 l 上的柯西条件看成或是自变量 x 或是自变量 y 的函数。写这些条件为形狀：

$$u|_{x=x(y)}=\psi(y);\ u|_{y=y(x)}=\psi_1(x);\ u_x|_{y=y(x)}=\varphi_1(x)。$$

在求方程(97)和(98)的积分时，我們应考慮到初始条件：

$$u|_{x=x(y)}=\psi(y);\ \ w|_{y=y(x)}=\varphi_1(x)+b[x,\ y(x)]\psi_1(x)=\omega_1(x)。$$

因此像上面一样，我們得到以下的积分方程組：

$$(102)\qquad \begin{aligned} u(x,\ y)&=e^{-\int_{x(y)}^{x} b(\xi,\ y)d\xi}\ \psi(y)+\int_{x(y)}^{x} K_1(x,\ y;\ \xi)w(\xi,\ y)d\xi \\ w(x,\ y)&=e^{-\int_{y(x)}^{y} a(x,\ \eta)d\eta}\ \omega_1(x)+\int_{y(x)}^{y} K_2(x,\ y;\ \eta)u(x,\ \eta)d\eta, \end{aligned}$$

其中 $K_1(x,\ y;\ \xi)$，$K_2(x,\ y;\ \eta)$ 由公式 (100) 确定。对于方程組按通常方式进行逐次逼近法的收歛性的証明，而因此能得到解的存在定理。若 P 点有像在圖 5 中所处的位置，那末当对 ξ 积分时，在估計中，积分路徑長度可改为 $(\alpha-x)$，而对η积分时，改为 $(\beta-y)$，其中 α 及 β 是 x 及 y 在边平行于軸的矩形中的最大值，我們是在这矩形中考慮問題的解的，并且其中的系数滿足上面所加的条件，例如，a 与 b 有連續一阶偏导数，又 c 和 f 連續，这些是在推导黎曼方法时为我們所必需的。我們也能够考慮非齐次方程(84)。此时在方程(98)的右边添上自由項 $f(x,\ y)$ 就够了。就是不用黎曼方法而利用方程組(102)，也容易証明解的唯一性。

146. 逐次逼近法 为了証明存在定理，完全像对常微分方程所做过的一样，可以直接应用逐次逼近法于方程(94)本身。我們从特征初始条件(96)开始。有初始条件(96)的方程(94)等价于积微分方程：

$$(103)\qquad \begin{aligned} u(x,\ y)=\varphi(x)+\psi(y)-\varphi(x_0)-\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}[a(\xi,\ \eta)u_\xi(\xi,\ \eta)+ \\ +b(\xi,\ \eta)u_\eta(\xi,\ \eta)+c(\xi,\ \eta)u(\xi,\ \eta)]d\xi\, d\eta, \end{aligned}$$

并且由于明显的条件 $\varphi(x_0)=\psi(y_0)$，所写出方程的积分式以外的項滿足初始条件(96)。

我們可以取函数

$$u_0(x, y)=\varphi(x)+\psi(y)-\varphi(x_0)$$

作为第一次逼近，其余的逼近陆續按以下公式計算：

$$u_n(x, y)=u_0(x, y)-\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\left[a(\xi, \eta)\frac{\partial u_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \xi}+\right.$$
$$\left.+b(\xi, \eta)\frac{\partial u_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \eta}+c(\xi, \eta)u_{n-1}(\xi, \eta)\right]d\xi\, d\eta \quad (n=1, 2, \cdots). \tag{104}$$

作一些簡單估計，能証明函数列

$$u_n(x, y), \quad \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y}$$

在圖 5 所画的矩形 R 中一致收斂，并且我們假設方程的系数是这矩形中的連續函数。把关系式(104)取極限，我們不难断定，序列 $u_n(x, y)$ 的極限函数滿足方程(103)，且由此推知它滿足方程(94)和初始条件(96)。

现在轉向柯西問題。設 R 为含曲綫 l 的一段在内的矩形，在这一段上給定了柯西条件，并且方程的系数在矩形 R 内是連續函数。設 (x, y) 是这矩形内的某一点。用 D_{xy} 来記曲綫三角形 PAB，它由曲綫 l 的弧 AB 和从点 $P(x, y)$ 發出的兩条平行于軸的直綫 PA 和 PB 所圍成。我們可以写柯西初始条件为形狀：

$$u|_l=\varphi(x)+\psi(y); \quad u_x|_l=\varphi'(x); \quad u_y|_l=\psi'(y). \tag{105}$$

实际上，像我們已經說过的，我們总能認为 u_x 与 u_y 的初始条件通过 x 或 y 表示。积分这些函数，我們得到 u 的初始条件就取上述形狀。帶有初始条件(105)的方程(94)等价于方程：

$$u(x, y)=\varphi(x)+\psi(y)+\iint_{D_{xy}}[a(\xi, \eta)u_\xi(\xi, \eta)+b(\xi, \eta)u_\eta(\xi, \eta)+$$
$$+c(\xi, \eta)u(\xi, \eta)]d\xi\, d\eta.$$

在公式(103)中我們写过有所說上下限的二次积分，并且在这种写的方式中点 $P(x, y)$ 关于特征 $x=x_0$ 和 $y=y_0$ 所处位置是沒有关系的。在最后公式中我們写出二重积分，并且取点，曲綫和軸的相互位置是如圖 5 所指出的。作为第一次逼近我們取：

$$u_0(x, y)=\varphi(x)+\psi(y),$$

而其次的逼近按照下面公式計算：

$$u_n(x, y)=u_0(x, y)+\iint_{D_{xy}}\left[a(\xi, \eta)\frac{\partial u_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \xi}+b(\xi, \eta)\frac{\partial u_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \eta}+\right.$$
$$\left.+c(\xi, \eta)u_{n-1}(\xi, \eta)\right]d\xi\, d\eta.$$

完全像上面一样，借助于积分的簡單估計，能証明序列 $u_n(x, y)$ 在矩形 R 中一致收斂于極限函数，它就是柯西問題的解。

我們从前見过 [II; 51]，就是在非綫性微分方程情形，逐次逼近法也应用于存在定理的証明。完全一样，上述的逐次逼近法也能应用于下面形狀的非綫性偏微分方程：

(106) $$u_{xy}=f(x, y, u, p, q)。$$

假定說，在曲綫 $l(y=y(x))$ 上的柯西初始条件用自变量 x 表示：$u(x)$，$p(x)$，$q(x)$，而且我們必須有 $u'(x)=p(x)+y'(x)q(x)$。假設上述諸函数有連續导数。作輔助函数

$$\omega(x, y)=u(x)+[y-y(x)]q(x),$$

显然它有連續导数 ω_x 与 ω_y。函数 ω 在曲綫 l 上滿足所需要的初始条件。替代 u 引进新未知函数：$u_1=u-\omega$，对于它我們得到在 l 上等于零的柯西初始条件。同时，不待說，方程(106)改变为新未知函数的方程。因此，我們能够假設对方程(106)有等于零的柯西初始条件。假設对充分鄰近于曲綫 l 的值 (x, y) 和对充分接近于零的值 (u, p, q)，方程右边的函数 f 有关于自己的一切变量的連續一阶导数。有零初始条件的方程(106)变为方程：

$$u(x, y)=-\iint\limits_{D_{xy}} f(\xi, \eta, u, p, q)d\xi\, d\eta,$$

而对于这个方程应用通常的逐次逼近法，只要我們把值 (x, y) 限制在曲綫 l 的某鄰域內。作为第一次逼近我們应当取 $u_0=p_0=q_0=0$，而以后的逼近按公式計算：

$$u_n(x, y)=-\iint\limits_{D_{xy}} f(\xi, \eta, u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})\,d\xi\, d\eta,$$

$$p_n(x, y)=\int_{BP} f(x, \eta, u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})d\eta,$$

$$q_n(x, y)=\int_{AP} f(\xi, y, u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})d\xi。$$

要指出，在对綫性方程应用逐次逼近法时，不待說，我們也可以考慮到非齐次方程，并像上面对方程(94)完全一样，我們能把柯西問題或有特征初始条件的問題中的初始条件化为零。同时，原来出發的齐次方程对变后函数一定是非齐次的。

147. 格林公式 在自变量的个数多于二的情形下，解二阶方程的柯西問題有大得多的困难，而我們在这个問題上只限于一般

的叙述。

应記起，对于波动方程当初始条件在 $t=0$ 給定时，我們講过柯西問題的解法 [II; 171]。但是这个特殊方法不能推广到有变系数的方程。在这一段我們談解常系数方程柯西問題的另外方法。这个方法是黎曼方法的推广，就同后者一样，以格林公式的适当的应用为基础。当初始条件不仅在平面 $t=0$ 上面且在某个非特征曲面 S 上給定时，这个方法給出柯西問題的解。按着它的基本思想，它接近于也能对变系数方程应用的方法。在下一段我們以变系数的波动方程为例，来叙說有变系数的綫性方程的柯西問題解法，这解法是屬于 С. Л. 索伯列夫的。

在方程左边有特殊形狀的情形，我們曾建立过格林公式[143]。現在对二阶偏导数的綫性算子的一般情形来推导格林公式。往后我們假設所有有关的导数存在和連续。

設

$$L(u)=\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}u_{x_ix_k}+\sum_{k=1}^{m} b_k u_{x_k}+cu \quad (a_{ki}=a_{ik}) \tag{107}$$

和

$$M(v)=\sum_{i,k=1}^{m}\frac{\partial^2(a_{ik}v)}{\partial x_i\,\partial x_k}-\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial(b_k v)}{\partial x_k}+cv, \tag{108}$$

其中 a_{ik}, b_k 及 c 是自变量的已知函数。設 D 为 m 維空間 $(x_1,\cdots,x_m)$ 中的有界区域，又 S 是包圍它的曲面。

格林公式將 m 重积分

$$\int\cdots\int_D [vL(u)-uM(v)]d\tau \tag{109}$$

用曲面 S 上的 $(m-1)$ 重积分表出。不难直接由微分驗証以下的恒等式：

$$vL(u)-uM(v)=\sum_{i,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ik}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_k}-u\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}uv\right]+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i uv),$$

并且应用奥斯特洛格拉得斯基公式，我們得到：

(110)
$$\int\cdots\int_D [vL(u)-uM(v)]d\tau=$$
$$=\int\cdots\int_S [vP(u)-uP(v)+uvQ]dS,$$

其中

(111)
$$\begin{cases} P(u)=\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\cos(n,\ x_i), \\ Q=\sum_{i=1}^{m}\left(b_i-\sum_{k=1}^{m}\dfrac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}\right)\cos(n,\ x_i), \end{cases}$$

而 n 是 S 的外法綫方向。在曲面 S 上各点我們来确定某方向 ν。为此置：

(112)
$$N=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\cos(n,\ x_i)\right]^2},$$

并按照公式

(113)　$\cos(\nu,\ x_k)=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\cos(n,\ x_i)\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$

确定方向 ν。同时(111)中前一公式可改写为形狀：

$$P(u)=N\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu,\ x_k)=N\frac{\partial u}{\partial \nu},$$

而格林公式(110)終于可改写为形狀：

(114)
$$\int\cdots\int_D [vL(u)-uM(v)]d\tau=$$
$$=\int\cdots\int_S \left[N\left(v\frac{\partial u}{\partial \nu}-u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)+uvQ\right]dS.$$

注意到，若以下等式成立：

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}=b_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m),$$

则 Q 变为零，算子 $M(v)$ 合于 $L(v)$，并且我們可改写 $L(u)$ 为形状：

$$L(u)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}u_{x_k}+cu。$$

在这种情形算子 $L(u)$ 称为自共軛的。

假定說，超曲面 S 是方程 $L(u)=0$ 或 $L(u)=f$ 的特征超曲面，其中 f 是自变量的已給函数。設 $\omega(x_1, \cdots, x_m)=0$ 是这超曲面的方程。諸量 $\cos(n, x_i)$ 和偏导数 $p_i=\omega_{x_i}$ 成比例，且由于(113)，方向 ν 的方向余弦和量

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ik}p_i$$

成比例。写出的和式是双特征的方程的右边[139]

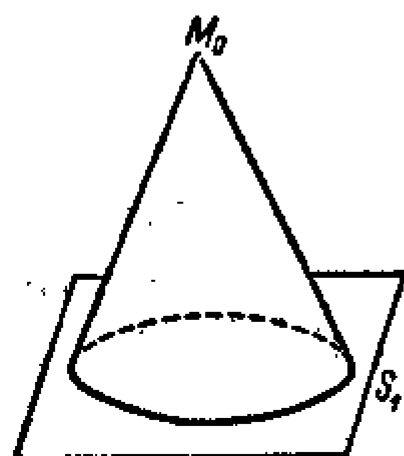
$$\frac{dx_k}{ds}=\sum_{i=1}^{m}a_{ik}p_i,$$

这些双特征構成特征超曲面 S，因此我們能断定：若 S 是特征超曲面，則它上面的方向 ν 在每一点和落在 S 上并通过这一点的双特征方向相合。由此推知，在所考慮的情形方向 ν 落在 S 的切平面上。方向 ν 有时称为 S 上的余法綫方向。現在講明格林公式(114)在解柯西問題时的作用。設需要求得方程

$$L(u)=-f \tag{115}$$

的解，只是 u 和余法綫导数 $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ 在某曲面 S_1 上之值为已知的。我們假定 S_1 是这样的，在其上各点的方向 ν 不在切平面上。同时在 S_1 上給定了 u 和 $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ 就确定了函数 u 沿任何方向的导数在 S_1 上的值。为了求 u 在 S_1 的外面某点 $M_0(x_1^0, \cdots, x_m^0)$ 之值可按以下方式进行。引方程(115)的以 M_0 为頂点的特征角錐，且假設这角錐的一半同曲面 S_1 的一部分圍成空間 $(x_1, \cdots, x_m)$ 的有界区域 D（圖 7）。其次对区域 D 应用格林公式(114)，而我們取要求的方

程(115)的解为 u，共轭方程 $M(v)=0$ 的某个奇解为 v。区域 D 的表面由曲面 S_1 的一塊和特征角錐的側面 Γ 組成，在 S_1 上，u 及 $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ 为已知的。在 Γ 上，方向 ν 合于落在 Γ 上的双特征的切綫方向，而这使在沿 Γ 积分时有进行分部积分的可能性。



(圖七)

对波动方程

$$L(u)=u_{xx}+u_{yy}-u_{tt}=-f(x, y, t) \tag{116}$$

施行这个方法。在这情形下，特征角錐是圓錐面，而母綫和高的夾角等于 $\frac{\pi}{4}$。算子 $L(u)$ 是自共轭算子，公式(112)給出 $N=1$，由公式(113)得到：

$$\cos(\nu, x)=\cos(n, x); \ \cos(\nu, y)=\cos(n, y);$$
$$\cos(\nu, t)=-\cos(n, t),$$

于是可見，方向 ν 是方向 n 关于平面 $t=0$ 的反射的像。頂点为 (x_0, y_0, t_0) 的特征錐面的方程为：

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-(t-t_0)^2=0。\tag{117}$$

利用方程 $L(v)=0$ 的如下的解：

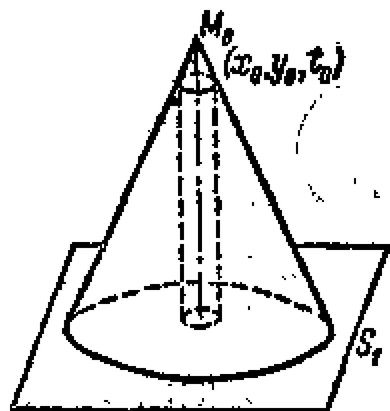
$$v=\lg\left[\sqrt{\frac{(t-t_0)^2}{r^2}-1}-\frac{t-t_0}{r}\right], \tag{118}$$

其中

$$r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2。$$

取由減少的 t 值的一方所生成錐面(117)的那一半。在这錐面的側面 Γ 上 $\frac{t-t_0}{r}=-1$，并且解(118)在这曲面上变为零。在 Γ 上关于 ν 的微分是关于 Γ 上的余法綫方向的微分，也就是关于錐面的母綫微分，由此推出，在 Γ 上我們不仅 $v=0$，而且 $\frac{\partial v}{\partial \nu}=0$。但

是解 (118) 当 $r=0$ 时有奇异性，也就是通过頂点而平行于 t 軸的直綫是解 (118) 的奇綫。用半徑为 ε 的圓柱面 T_ε 划出这条綫。区域 D 剩下的部分記为 D'。这区域的境界除 S_1 和 Γ 而外，將包含所說柱面 T_ε 的側面 (圖 8)。設 S_1' 是曲面 S_1 含在圓錐內而扣除在圓柱 T_ε 之內的部分。現在应用公式 (114)。考慮到 $L(v)=M(v)$，$L(u)=-f(x, y, t)$，$L(v)=0$，又在 Γ 上：$v=\frac{\partial v}{\partial \nu}=0$，卽得：



(圖八)

$$\iint\limits_{T_\varepsilon+S_1'} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu}-u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)dS=-\iiint\limits_{D'} fv\, d\tau。 \tag{119}$$

在曲面 T_ε 上方向 ν 合于外法綫方向，就是和从軸 t 算起的方向 r 相反。以 φ 記坐标系統：$x-x_0=r\cos\varphi$ 和 $y-y_0=r\sin\varphi$ 的極角，則得：

$$\iint\limits_{T_\varepsilon} v\frac{\partial u}{\partial \nu}dS=\iint\limits_{T_\varepsilon} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\varepsilon\, d\varphi\, dt。 \tag{120}$$

在 T_ε 上我們有 $r=\varepsilon$，并且由于 (118)，v 是 $\lg\varepsilon$ 級。因为当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\varepsilon\lg\varepsilon\to 0$，所以我們能够断定积分 (120) 和 ε 同时趋向于零。其次，我們有：

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}=-\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{t-t_0}{r\sqrt{(t-t_0)^2-r^2}},$$

而根式必須算做正的。在 T_ε 上：

$$\sqrt{(t-t_0)^2-r^2}=\sqrt{(t-t_0)^2-\varepsilon^2},$$

且当 $\varepsilon\to 0$ 时，这根式趋向于 (t_0-t)，因为 $t<t_0$。这样我們有：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{T_\varepsilon} u\frac{\partial v}{\partial \nu}dS=-\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{T_\varepsilon}\frac{(t-t_0)u}{\sqrt{(t-t_0)^2-\varepsilon^2}}d\varphi\, dt=$$

$$=2\pi\int_{t'}^{t_0} u(x_0, y_0, t)\,dt,$$

其中 t' 是直綫 $r=0$ 和曲面 S_1 的交点所对应的 t 値。因此公式(119)給出：

$$2\pi\int_{t'}^{t_0} u(x_0, y_0, t)\,dt=\iint_{S_2}\left(v\frac{\partial u}{\partial \nu}-u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)dS+\iiint_D fv\,d\tau,$$

其中 S_2 是曲面 S_1 在上述圓錐之內的部分。右边是已知量，而关于 t_0 微分，我們得到最后的結果：

$$(121)\quad u(x_0, y_0, t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_0}\left[\iint_{S_2}\left(v\frac{\partial u}{\partial \nu}-u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)dS+\iiint_D fv\,d\tau\right]。$$

假設了問題的解存在，我們才得到这个公式。严格地說，我們还須驗証右边滿足問題的一切条件。这需要較多的工作，因为在变动 t_0 时，錐面(117)的位置要改变。若 S_2 是平面 $t=0$，那末解是我們以前得到过的。上述的柯西問題解法屬于渥尔特拉。它的詳細的叙說可以在下書中找到：韋伯斯特尔和賽格"数学物理中的偏微分方程"(II 卷 6 章)[Вебстер и Сеге "Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики"]。

和格林公式相联系的还有柯西問題的其他解法，就是阿达馬方法。在应用这个方法时，取方程 $M(v)=0$ 的解使得在特征角錐或錐面(117)的整个侧面上成为無穷，而后者是当方程为(116)的情形。这种場合在应用格林公式时需要特別謹慎，并且很自然地引出新的奇异积分的概念。

对形狀为

$$L(u)=\sum_{s=1}^{m} u_{x_s x_s}-u_{tt}=-f$$

的方程，阿达馬奇解有形狀：

$$v=\left[(t-t_0)^2-\sum_{s=1}^{m}(x_s-x_s^{(0)})^2\right]^{\frac{1}{2}-\frac{m}{2}}。$$

阿达馬方法对变系数綫性方程的应用的詳細說明能在他的書中找到："柯西問題和双曲型綫性偏微分方程"（巴黎，1932）["Le probléme de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques"]。在柯朗与希尔伯特的書"数学物理方法"卷 II ["Methoden der Mathematischen Physik" t. II]中有阿达馬方法应用于常系数方程的叙述。

148. 索伯列夫公式 对四个自变量的波动方程我們有过克希荷夫公式[II; 202]。設 u 是波动方程的解，在空間 (x_1, x_2, x_3) 由曲面 S 所圍成的某区域 D 内有到二阶为止的連續导数。克希荷夫公式用沿曲面 S 的积分表示出 u 在区域 D 内部的任何点的值，並且在这公式中出現 u 和它的一阶导数的推后值。我們也見到过，当曲面 S 特別选取时，克希荷夫公式引出初始条件在 $t=0$ 給定时柯西問題的解 [II; 202]。克希荷夫公式能推广到有偶数个自变量的波动方程情形：

$$u_{tt}=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\cdots+u_{x_{2k+1}x_{2k+1}},$$

而且同从前一样，对这方程它給出柯西問題的解[参看 153]。

我們現在講在变系数的波动方程

$$u_{tt}=c^2(x, y, z)(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) \tag{122}$$

情形拓广的克希荷夫公式，其中 $c(x, y, z)$ 为一正函数而有足够数量的导数。往后替代 $c(x, y, z)$ 我們常常写为 $c(M)$，其中 M 为有坐标 (x, y, z) 的点。

考虑到对于方程(122)的特征論，我們自然要达到关于泛函：

$$J=\int_{M_0}^{M_1}\frac{ds}{c(x, y, z)}=\int_{M_0}^{M_1}\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{c(x, y, z)} \tag{123}$$

的極值問題。在这情形下，横截条件合于正交条件，並且如同在[79]中所說过的，我們能作变分問題的場。設 $\tau(M; M_0)$ 是以 M_0 为中

心的中心場的基本函数。这函数給出沿 M_0 到 M 的極綫所取积分 (123) 之值。方程 $\tau(M;M_0)=$ 常数給出在按公式 (123) 所确定的度量下以 M_0 为中心的拟似球面。对函数 $\tau(M;M_0)$ 我們有方程：

$$\text{grad}^2\,\tau(M;\,M_0)=\frac{1}{c^2(M)},\tag{124}$$

就是

$$\tau_x^2+\tau_y^2+\tau_z^2=\frac{1}{c^2(M)}。\tag{124$_1$}$$

函数 $\tau(M;M_0)$ 显然是 M_0 和 M 的对称函数。若 c 为常数，則 $\tau(M;\,M_0)=\dfrac{r}{c}$，其中 r 是 M_0 到 M 的距离。在一般情形，当确定任何函数 $u(M;\,t)$ 的推后値时，我們要用 τ 替代 $\dfrac{r}{c}$，并且和在 [II; 202] 中一样，我們引进記号：

$$u(M;\,t-\tau)=[u(M;\,t)]。$$

假定說，$u(M;t)$ 是方程 (122) 的解，并且为了簡化写法，記

$$u(M;\,t-\tau)=u_1(M;\,t)。$$

在方程 (122) 中改变为推后值：

$$[u_{tt}]=c^2(M)\,[\Delta u],\tag{125}$$

式中 Δ 是拉普拉斯算子。用 u_1 表示 $[\Delta u]$。我們有：

$$\left\{\begin{aligned}&\text{grad}\,u_1=[\text{grad}\,u]-[u_t]\text{grad}\,\tau\\&\Delta u_1=\text{div grad}\,u_1=[\Delta u]-2[\text{grad}\,u_t]\cdot\text{grad}\,\tau-\\&\qquad-[u_t]\,\Delta\tau+[u_{tt}]\text{grad}^2\,\tau,\end{aligned}\right.\tag{126}$$

并把从最后方程得到的 $[\Delta u]$ 的表达式代入 (125)，利用 (124)，即得：

$$\frac{1}{c^2(M)}[u_{tt}]=\Delta u_1+2[\text{grad}\,u_t]\cdot\text{grad}\,\tau+[u_t]\,\Delta\tau-[u_{tt}]\frac{1}{c^2(M)}。$$

类似于 (126) 中第一个公式，我們有：

$$\text{grad}\frac{\partial u_1}{\partial t}=[\text{grad}\,u_t]-[u_{tt}]\text{grad}\,\tau,$$

并且把从最后方程得到的 $[\mathrm{grad}\, u_t]$ 的表达式代入前一个公式，我們得到下面的对以后重要的公式：

$$\Delta u_1 = -2\,\mathrm{grad}\,\tau\cdot\mathrm{grad}\,\frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta\tau\,\frac{\partial u_1}{\partial t}。$$

对这等式的两边乘以待定的函数 $\sigma(M)$，得：

$$(127)\qquad \sigma\Delta u_1 = -2\sigma\,\mathrm{grad}\,\tau\cdot\mathrm{grad}\,\frac{\partial u_1}{\partial t} - \sigma\Delta\tau\,\frac{\partial u_1}{\partial t}$$

且选取函数 $\sigma(M)$ 使右边是形狀为 $\left(-\frac{\partial u_1}{\partial t}\boldsymbol{w}\right)$的某向量的散度，其中 $\boldsymbol{w}$ 是与 u_1 無关的向量：

$$(128)\qquad \sigma\Delta u_1 = \mathrm{div}\left(-\frac{\partial u_1}{\partial t}\boldsymbol{w}\right)。$$

展开右边：

$$\sigma\Delta u_1 = -\frac{\partial u_1}{\partial t}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{w} - \mathrm{grad}\,\frac{\partial u_1}{\partial t}\cdot\boldsymbol{w}。$$

和(127)相比較，我們看出，要是滿足下面兩个等式：

$$(129)\qquad \boldsymbol{w} = 2\sigma\,\mathrm{grad}\,\tau;\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{w} = \sigma\Delta\tau,$$

等式(128)就成立并且 $\boldsymbol{w}$ 也不与 u_1 相关。把这些等式的第一个代到第二个去，我們得到确定 σ 的方程：

$$\mathrm{div}(2\sigma\,\mathrm{grad}\,\tau) = \sigma\Delta\tau,$$

即

$$(130)\qquad 2\,\mathrm{grad}\,\sigma\cdot\mathrm{grad}\,\tau + \sigma\Delta\tau = 0,$$

或在坐标表示下为：

$$(131)\qquad 2(\sigma_x\tau_x + \sigma_y\tau_y + \sigma_z\tau_z) + \sigma\Delta\tau = 0,$$

就是說，为了确定 σ 我們有一阶綫性方程。有了 σ，我們就可以从(129)中前一式确定向量 $\boldsymbol{w}$。設 D 是三維空間 (x, y, z) 的某区域，而 S 是圍成它的曲面。假定在区域 D 内函数 σ 和 u_1 有到二阶为止的連續导数。应用格林公式：

$$\iiint\limits_D (\sigma\Delta u_1 - u_1\Delta\sigma)\,dv = \iint\limits_S \left(\sigma\frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1\frac{\partial\sigma}{\partial n}\right)dS,$$

其中 n 为 S 的外法綫方向。利用公式(128)和(129)，能改写格林公式为形狀：

$$-\iiint_D u_1 \Delta\sigma\, dv - \iiint_D \operatorname{div}\left(2\sigma \frac{\partial u_1}{\partial t} \operatorname{grad} \tau\right) dv =$$

$$= \iint_S \left(\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial \sigma}{\partial n}\right) dS,$$

并应用奥斯特洛格拉得斯基公式于包含散度的积分，即得：

$$\iint_S \left(\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial \sigma}{\partial n} + 2\sigma \frac{\partial \tau}{\partial n} \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) dS + \iiint_D u_1 \Delta\sigma\, dv = 0。$$

回到函数 u 并考虑到

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] \frac{\partial \tau}{\partial n},$$

便得到对以后重要的下面公式：

$$(132)\qquad \iint_S \left\{\sigma \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - [u] \frac{\partial \sigma}{\partial n} + \sigma \frac{\partial \tau}{\partial n} \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\right\} dS +$$

$$+ \iiint_D [u] \Delta\sigma\, dv = 0。$$

在所有以上的計算中，我們可以假設場不是中心的而为任意的。应当滿足方程(130)的函数 σ 明显的与 τ 有关，就是同場的选取有关。往后我們只考慮中心場并且函数 σ 將記为 $\sigma(M;M_0)$。所有我們的論斷只和 M_0 点的这种鄰域有关，在其中积分(128)的極綫不相交并且構成場。若 c 是常数，則如已指出过的 $\tau = \frac{r}{c}$，并且不难驗証，函数 $\sigma = \frac{1}{r}$ 滿足方程(130)。

149. 索伯列夫公式(續)　假定説，我們能作出函数 $\sigma(M;M_0)$，在 M_0 点的鄰域内有到二阶为止的連續导数，在 M_0 点有奇异性并且滿足下列条件：

(1)乘积 $\sigma(M;M_0)\tau(M;M_0)$ 包括对 M_0 点在内有到二阶为

止的連續导数，且

$$\lim_{M\to M_0}\sigma(M;M_0)\tau(M;M_0)=\frac{1}{c(M_0)};\tag{133}$$

(2)

$$\sigma(M_0;M)=\sigma(M;M_0);\tag{134}$$

(3)拉普拉斯算子用于 $\sigma(M;M_0)$ 满足不等式：

$$|\Delta\sigma(M;M_0)|\leqslant\frac{K}{\tau(M;M_0)},\tag{135}$$

式中 K 为(和 M 無关的)常数；

(4)若 S_1 为含 M_0 点在它里面的某一閉曲面，且 n 为 S_1 的外法綫方向，則当無限制地收缩 S_1 于 M_0 时成立極限的等式：

$$\lim_{S_1\to M_0}\iint_{S_1}\frac{\partial\sigma(M;M_0)}{\partial n}dS=-4\pi。\tag{136}$$

若 c 为常数，則函数 $\sigma=\frac{1}{r}$ 满足所有的这些条件。

利用有上述性質的函数 $\sigma(M;M_0)$，我們来建立对于方程(122)的解的公式。設 $u(M;t)$ 是区域 D 内这种解，D 由曲面 S 圍成，且設 M_0 是 D 内部的点。假定説，存在以 M_0 为中心的中心場，M_0 含在区域 D 内，并假定我們有了具上述性質的函数 $\sigma(M;M_0)$。

从区域 D 中划出中心为 M_0 而半徑为 ε 的小球 S_ε。对剩下的区域 D' 应用公式(132)：

$$\iint_S\left\{\sigma\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]-[u]\frac{\partial\sigma}{\partial n}+\sigma\frac{\partial\tau}{\partial n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\right\}dS+\\+\iint_{S_\varepsilon}\{\quad\}dS+\iiint_{D'}[u]\Delta\sigma dv=0。\tag{137}$$

要証明，当 $\varepsilon\to0$ 时沿 S_ε 的积分給出 $-4\pi u(M_0;t)$。实际上，量：

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\quad 和\quad \frac{\partial\tau}{\partial n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]$$

当接近于 M_0 时为有界的；$\tau(M;M_0)$ 在 S_1 上是 ε 阶，又由于(133)，$\sigma(M;M_0)$在 S_1 上是 $\frac{1}{\varepsilon}$ 阶，而 S_1 的面积是 ε^2 阶。由此推知，积分：

$$\iint_{S_\varepsilon}\sigma\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS \quad 和 \quad \iint_{S_\varepsilon}\sigma\frac{\partial \tau}{\partial n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]dS$$

与 ε 同时趋向于零。剩下积分：

$$-\iint_{S_\varepsilon}[u]\frac{\partial\sigma}{\partial n}dS=-\iint_{S_\varepsilon}u(M,t-\tau)\frac{\partial\sigma}{\partial n}dS。$$

这里法綫关于区域 D' 向外取，就是关于球面 S_ε 是向内的。在球面上当 $\varepsilon\to 0$ 时，$u(M;t-\tau)$ 趋向于 $u(M_0;t)$，又考虑到(136)和上述的法綫方向，我們看出，最后的积分确实給出極限 $-4\pi u(M_0;t)$。公式(137)在取極限下使我們有所求的公式：

$$(138)\qquad u(M_0;t)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{\sigma\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]-[u]\frac{\partial\sigma}{\partial n}+\right.$$

$$\left.+\sigma\frac{\partial\tau}{\partial n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\right\}dS+\frac{1}{4\pi}\iiint_D[u]\,\Delta\sigma dv,$$

它是 C. Л. 索伯列夫所建立的。

若 c 是常数，則 $\sigma=\frac{1}{r}$ 且 $\Delta\sigma=0$，三重积分消失，而我們得到通常的克希荷夫公式。在 c 是变量(非均匀介質)的情形，在 M_0 点 u 之值不只是从曲面 S 上的点，而且从整个区域 D 上的点發出推后值的結果而得到。

公式(138)能应用于解方程(122)的柯西問題。設需要求出方程(122)的解，而满足給定的初始条件：

$$(139)\qquad u(M;t)\big|_{t=0}=f_0(M);\quad u_t(M;t)\big|_{t=0}=f_1(M)。$$

对要求的解应用公式(138)，同时取中心 M_0 和半徑 t 的拟似球面 S_t 作为曲面 S，就是假定曲面 S 的方程有形狀：$\tau(M;M_0)=t$。同

时右边的函数值

$$[u],\quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right],\quad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]$$

应当取在时刻 $t-\tau(M;M_0)$，或者由于 $\tau(M;M_0)=t$，而取在时刻 $t=0$。考虑到初始条件(139)，我們能改写方程(138)为形狀：

$$u(M_0,t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_t}\left\{\sigma\frac{\partial f_0}{\partial n}-f_0\frac{\partial\sigma}{\partial n}+\sigma\frac{\partial\tau}{\partial n}f_1\right\}dS+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D_t}[u]\,\Delta\sigma dv,$$

其中 D_t 是拟似球面 S_t 所圍的区域。右边的二重积分是已知函数，我們記之为 $F(M_0;t)$。于是我們得到对于 $u(M;t)$ 的积分方程：

$$u(M_0;t)=F(M_0;t)+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D_t}[u]\,\Delta\sigma(M;M_0)dv。\tag{140}$$

在推导这方程时，我們必須假定 t 是这样的，使在区域 D_t 內存在中心为 M_0 的中心場并且函数 $\sigma(M;M_0)$ 有上述性質。

我們指出，当 M_0 和 t 变动时，区域 D_t 也变动，并且方程(140)类似于渥尔特拉方程。可以証明，对充分接近于零的 t，方程有唯一的解，它可以应用普通的逐次逼近法得到，并且这个解同时也是对方程(122)所建立的柯西問題的解。若我們有無界空間，則 t 是否接近于零要看当 D_t 扩張时变分問題場是否可能呈現奇性而定。在有境界时，我們自然应当考虑到到达境界而引起反射，实質上就限制了 t 变动的可能区間。

150. 函数 σ 的作出 轉来作出具有上述性質的函数 σ。我們証明，这个函数有有限形狀的显明表达式，只要假定構成上述中心場的極綫是已知的。預先証明兩个引理：

引理 1. 若有微分方程組

$$\frac{dx_k}{dt}=X_k(t,x_1,x_2,x_3)\quad (k=1,2,3)\tag{141}$$

并且已知它的通积分：

$$x_k=\varphi_k(t,\ a_1,\ a_2,\ a_3)\quad (k=1,\ 2,\ 3),\tag{142}$$

那末成立公式：

$$\frac{d}{dt}\lg\frac{D(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)}{D(a_1,\ a_2,\ a_3)}=\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\frac{\partial X_3}{\partial x_3}。\tag{143}$$

在这公式的对数記号下是函数(142)关于 a_1, a_2, a_3 的函数行列式，而在它的右边 x_k 应当换成函数(142)。写出剛才所說的行列式并把它关于 t 微分。考虑到行列式是它的元素乘积之和的基本定义，我們能肯定要微分行列式只須分别微分它的每一列，然后相加所有得到的行列式就行了[**III₂; 120**]。于是我們得到：

$$\frac{d}{dt}\frac{D(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)}{D(a_1,\ a_2,\ a_3)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial a_1\partial t}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_1}, & \frac{\partial\varphi_3}{\partial a_1}\\ \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial a_2\partial t}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_2}, & \frac{\partial\varphi_3}{\partial a_2}\\ \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial a_3\partial t}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_3}, & \frac{\partial\varphi_3}{\partial a_3}\end{vmatrix}+\tag{144}$$

$$+\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_1}, & \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial a_1\partial t}, & \frac{\partial\varphi_3}{\partial a_1}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_2}, & \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial a_2\partial t}, & \frac{\partial\varphi_3}{\partial a_2}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_3}, & \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial a_3\partial t}, & \frac{\partial\varphi_3}{\partial a_3}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_1}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_1}, & \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial a_1\partial t}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_2}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_2}, & \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial a_2\partial t}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_3}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_3}, & \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial a_3\partial t}\end{vmatrix}。$$

注意到，函数(142)必須满足方程組(141)，我們得到下面的关于 t 和 a_k 的恒等式：

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}=X_k(t,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)\quad (k=1,\ 2,\ 3)。$$

关于 a_s 微分这恒等式。就有：

$$\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial a_s\partial t}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a_s}。$$

把这些二阶导数的表达式代入公式(144)的右边，并且分解每个行列式为三个行列式之和，就有：

$$\frac{d}{dt}\ \frac{D(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)}{D(a_1,\ a_2,\ a_3)}=$$

$$=\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right)\cdot\frac{D(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)}{D(a_1,\ a_2,\ a_3)},$$

这样給出公式(143)。

引理 2. 設 $\boldsymbol{t}$ 是單位向量，切于某族曲綫，它們和兩个参数有关并填滿三維空間或它的某一部分，又 Δ 是从笛卡尔坐标到曲綫坐标的变换行列式，取确定上述族中曲綫的参数 a_1 和 a_2 以及沿这些曲綫的弧長 s 作为曲綫坐标的参数，弧長 s 从和族中所有曲綫相交的某曲面或是所有这些曲綫的交点算起。此时成立公式：

$$\operatorname{div}\boldsymbol{t}=\frac{\partial\lg\Delta}{\partial s}。\tag{145}$$

設 $X(x,\ y,\ z)$, $Y(x,\ y,\ z)$, $Z(x,\ y,\ z)$ 是向量 $\boldsymbol{t}$ 在点 $(x,\ y,\ z)$ 的分量。此时族中曲綫滿足微分方程組：

$$\frac{dx}{ds}=X;\quad \frac{dy}{ds}=Y;\quad \frac{dz}{ds}=Z。$$

因为右边不含 s，任意常数之一 s_0 作为 s 的附加数而出現，且方程組的通积分將有形狀：

$$x=\varphi_1(s+s_0,\ a_1,\ a_2);\ \ y=\varphi_2(s+s_0,\ a_1,\ a_2);$$

$$z=\varphi_3(s+s_0,\ a_1,\ a_2)。$$

应用前面引理，即得：

$$\operatorname{div}\boldsymbol{t}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial s}\lg\frac{D(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)}{D(s_0,\ a_1,\ a_2)},$$

并考虑到

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial s_0}=\frac{\partial\varphi_k}{\partial s},$$

我們就得到公式(145)。

現在回到上面考虑过的以 M_0 为中心的中心極綫場和函数 σ

所应当满足的方程(130)。向量 grad τ 切于極綫，并从(124)推知 $\frac{\partial\tau}{\partial s}=n(M)$，其中 $n(M)=1:c(M)$。注意到这个，可以改写方程(130)为形狀：

$$2\frac{\partial\sigma(M)}{\partial s}n(M)+\sigma(M)\Delta\tau(M)=0,$$

而弧長 s 从 M_0 点量起。

为了計算 $\Delta\tau(M)$，我們利用引理 2。就有：

$$\operatorname{grad}\tau(M)=n(M)\boldsymbol{t},$$

其中 $\boldsymbol{t}$ 是切于場的極綫的單位向量。由此

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\tau(M)=\Delta\tau(M)=\boldsymbol{t}\cdot\operatorname{grad}n(M)+n(M)\operatorname{div}\boldsymbol{t}.$$

右边第一項是 $n(M)$ 关于 s 的导数，而第二項由于引理 2 而等于

$$n(M)\frac{\partial\lg\Delta}{\partial s},$$

并且对于 $\sigma(M)$ 的方程可改写为形狀：

$$2\frac{\partial\sigma}{\partial s}n(M)+\sigma\left[\frac{\partial n(M)}{\partial s}+n(M)\frac{\partial\lg\Delta}{\partial s}\right]=0$$

或

$$2\frac{\partial\lg\sigma}{\partial s}=-\frac{\partial\lg n}{\partial s}-\frac{\partial\lg\Delta}{\partial s},$$

于是求积分，得到：

$$\sigma(M)=\frac{\Psi(a_1,a_2)}{\sqrt{n(M)\Delta}},$$

其中 $\Psi(a_1,a_2)$ 是变量的任何函数。取 M_0 点处極綫的切綫方向在球坐标系統中的角坐标 ϑ_0, φ_0 作为参数 a_1 与 a_2。前面的公式此时写为形狀：

$$\sigma(M)=\frac{\Psi(\vartheta_0,\varphi_0)}{\sqrt{n(M)\frac{D(x,y,z)}{D(s,\vartheta_0,\varphi_0)}}}.\tag{146}$$

函数 $\Psi(\vartheta_0,\varphi_0)$ 的形狀能由[149]中所說对于函数 $\sigma(M)$ 的

第一个条件确定。这个条件有形狀：

$$\lim_{M\to M_0}\sigma(M)\tau(M)=n(M_0)。$$

注意到积分(123)的形狀，我們能写出：

$$\tau(M)=\int_0^s n(M)\,ds,$$

其中积分沿極綫进行。应用中值定理，得：

$$\lim_{s\to 0}\frac{\tau(M)}{s}=n(M_0),$$

而上面对于 $\sigma(M)$ 的条件能写为形狀：

$$\lim_{s\to 0}\sigma(M)s=1。\tag{147}$$

应指出，当 $s\to 0$ 时，M 点趋向 M_0。

为了研究位于公式 (146) 中的函数行列式，要用到在 [81] 中对关于测地綫問題的标准变数所建立的公式。在这情形：

$$\varphi=n^2(M)\left(x'^2+y'^2+z'^2\right),$$

而标准变数有形狀：

$$p_1=2n^2(M)x';\quad p_2=2n^2(M)y';\quad p_3=2n^2(M)z'。$$

我們有以下的初始条件：

$$x_0'=\sin\vartheta_0\cos\varphi_0;\quad y_0'=\sin\vartheta_0\sin\varphi_0;\quad z_0'=\cos\vartheta_0$$

及

$$\begin{gathered}p_{10}=2n^2(M_0)\sin\vartheta_0\cos\varphi_0;\quad p_{20}=2n^2(M_0)\sin\vartheta_0\sin\varphi_0;\\ p_{30}=2n^2(M_0)\cos\vartheta_0。\end{gathered}\tag{148}$$

場的極綫方程为：

$$x=\varphi_1(r_1,r_2,r_3,x_0,y_0,z_0);\quad y=\varphi_2(\ );\quad z=\varphi_3(\ ),\tag{149}$$

其中 $r_k=sp_{k0}$，又 φ_k 为有到某阶为止連續导数的函数。关于 s 微分第一个式子，然后置 $s=0$，得到：

$$\sin\vartheta_0\cos\varphi_0=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r_1}\right)_{s=0}p_{10}+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r_2}\right)_{s=0}p_{20}+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r_3}\right)_{s=0}p_{30}。$$

利用公式(148)以及 ϑ_0 和 φ_0 的任意性，得：

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r_2}\right)_{s=0}=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r_3}\right)_{s=0}=0;\quad \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r_1}\right)_{s=0}=1:2n^2(M_0)。$$

利用(149)中其余的公式，得到以下的一般公式：

$$\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial r_k}\right)_{s=0}=1:2n^2(M_0);\quad \left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial r_l}\right)_{s=0}=0\quad (l\neq k)。$$

利用公式(148)和(149)，我們能写出函数 φ_k 关于变量 s, ϑ_0, φ_0 的函数行列式。通过 r_k 而关于 ϑ_0 和 φ_0 微分时，我們得到乘数 s，而这行列式有兩列包含这个乘数。以 s^2 除行列式，我們令 s 趋于零取極限。利用以前的公式，我們因而得到：

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2}\frac{D(x, y, z)}{D(s, \vartheta_0, \varphi_0)}=$$

$$=\begin{vmatrix}\sin\vartheta_0\cos\varphi_0, & \cos\vartheta_0\cos\varphi_0, & -\sin\vartheta_0\sin\varphi_0\\ \sin\vartheta_0\sin\varphi_0, & \cos\vartheta_0\sin\varphi_0, & \sin\vartheta_0\cos\varphi_0\\ \cos\vartheta_0, & -\sin\vartheta_0, & 0\end{vmatrix}=\sin\vartheta_0。$$

为了确定公式(146)中任意函数，以 s 乘它的兩边并將 s 趋向于零。利用最末的公式和公式(147)，就有：

$$1=\frac{\Psi(\vartheta_0, \varphi_0)}{\sqrt{n(M_0)\sin\vartheta_0}},\quad 即\quad \Psi(\vartheta_0, \varphi_0)=\sqrt{n(M_0)\sin\vartheta_0},$$

総于我們得到函数 σ 的以下的表达式：

$$\sigma(M;M_0)=\sqrt{\frac{n(M_0)\sin\vartheta_0}{n(M)\dfrac{D(x, y, z)}{D(s, \vartheta_0, \varphi_0)}}}。\tag{150}$$

可以驗証，这函数有在[149]所說的一切性質。若 $n(M)=$ =常数，则(s, ϑ_0, φ_0)是 M 点的通常的坐标，并且最后的公式給出：$\sigma=\frac{1}{r}$。

151. 初始条件的一般情形　現在假定初始条件不在平面 $t=0$ 上，而在有方程 $t=\varphi(M)$ 的某一曲面上給定：

(151) $$u\big|_{t=\varphi(M)}=f_0(M);\quad u_t\big|_{t=\varphi(M)}=f_1(M)。$$

要解决当 $t>\varphi(M)$ 的問題。替代超球面 $\tau(M;M_0)=t$ 考慮曲面

(152) $$\tau(M;M_0)+\varphi(M)=t,$$

且假設，对差$[t-\varphi(M)]$的所有充分接近于零的正值，曲面 (152) 是含 M_0 点在内的三維空間的閉曲面，并且含在曲面内部的空間部分，由以下不等式确定：

(153) $$\tau(M;M_0)+\varphi(M)<t。$$

現在应用公式(138)，取曲面(152)作为 S。同时在沿 S 积分的被积函数中我們要有：

$$[u]=u(M;t-\tau)=u(M;\ \varphi(M))=f_0(M);\ \ [u_t]=f_1(M)。$$

今証明，$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]$ 也能用初始条件表示。我們有：

$$\frac{\partial f_0(M)}{\partial n}=\frac{\partial u(M;\varphi(M))}{\partial n}=\frac{\partial u(M;\ t)}{\partial n}\bigg|_{t=\varphi(M)}+$$

$$+\frac{\partial u(M;\ t)}{\partial t}\bigg|_{t=\varphi(M)}\cdot\frac{\partial\varphi(M)}{\partial n},$$

于是

$$\frac{\partial u(M;\ t)}{\partial n}\bigg|_{t=\varphi(M)}=\frac{\partial f_0(M)}{\partial n}-\frac{\partial u(M;\ t)}{\partial t}\bigg|_{t=\varphi(M)}\cdot\frac{\partial\varphi(M)}{\partial n},$$

也就是

$$\left[\frac{\partial u(M;\ t)}{\partial n}\right]=\frac{\partial f_0(M)}{\partial n}-\frac{\partial\varphi(M)}{\partial n}f_1(M)。$$

引进記号

$$F(M_0;t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\tau(M;M_0)+\varphi(M)=t}\left\{\sigma\frac{\partial f_0(M)}{\partial n}+\right.$$

$$\left.+\sigma\left(\frac{\partial\tau}{\partial n}-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)f_1(M)-\frac{\partial\sigma}{\partial n}f_0\right\}dS,$$

对于 $u(M_0;\ t)$，我們得到类似于(140)的方程：

(154) $$u(M_0;\ t)=F(M_0;\ t)+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\tau(M;M_0)+\varphi(M)<t}[u]\Delta\sigma(M;M_0)\,dv。$$

同以前一样，它能够用逐次逼近法来解，且給出条件为(151)时柯西問題的解。全部証明的严格推导需要函数 $c(M)$，$f_0(M)$，$f_1(M)$，$\varphi(M)$ 有若干个数的連續偏导数。

我們来闡明曲面(152)与特征論的联系。对于方程(122)頂点在 $(M_0;\ t)$ 的特征角錐，在四維空間 $(M;\ t_1)$ 中有方程

$$t_1=t-\tau(M;\ M_0), \tag{155}$$

其中 t_1 和 $M(x,\ y,\ z)$ 是流动坐标，而 t 与 M_0 为参数。曲面(152)是三維空間有同样坐标 $(x,\ y,\ z)$ 的那些点的几何軌迹，也是特征角錐(155)和四維空間曲面 $t_1=\varphi(M)$ 的交点，就是說，曲面(152)是上述交截在三維空間 $(x,\ y,\ z)$ 的投影。为了明显起見，設想这一切在三維空間 $(x,\ y,\ t_1)$ 發生。方程(155)相应于通常的錐型曲面。这曲面与曲面 $t_1=\varphi(x,y)$ 沿某曲綫相交。投影这曲綫到平面 $(x,\ y)$ 上应是閉曲綫 l，它正是曲面(152)的类似。角錐的頂点在 $(x,\ y)$ 平面上的投影应当落在 l 的內部，且公式(154)中三重积分有其类似的沿平面 $(x,\ y)$ 上的 l 內部区域的二重积分。这区域当然和角錐頂点 $(x_0,\ y_0,\ t)$ 的位置有关。若这頂点趋向于曲面 $t_1=$ $=\varphi(x,\ y)$ 上的某一点，那末曲綫必須縮到点 $(x_0',\ y_0')$。完全类似的，若角錐(155)的頂点趋向于曲面 $t_1=\varphi(M)$ 上某一点 $(M_0',\ t')$，則閉曲面 S 必須縮到点 M_0。

曲面 S 的所有这些几何学特性，对于柯西問題解的存在性的严格証明是必要的，因为这个緣故，曲面 $t=\varphi(M)$ 的切平面和平面 $t=0$ 不应偏差太多。可以証明，这条件能写成形狀：

$$\operatorname{grad}^2\varphi(M)<\frac{1}{c^2(M)}。 \tag{156}$$

同时重要的是函数 $c^2(M)$ 和 $\tau(M;M_0)$ 由方程(124)联系。当保持条件(156)时，說是曲面 $t=\varphi(M)$ 为空向的。对于更一般的双曲型方程：

$$u_{tt}-\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}u_{x_ix_j}+\cdots=0,$$

其中 u 为自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的函数，說是曲面 $t=\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 在它的某一点为空向的，只要在这点滿足不等式：

$$\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}<1。$$

上述方法的建立以及完全說明它在解关于方程 (122) 的柯西問題上的应用，可以在 С. Л. 索伯列夫的工作中找到[苏联科学院地震学研究所彙报，6 期 (1930) 和 42 期 (1934)。Труды Сейсмологического Института Академии Наук СССР № 6 и № 42, 1930 и 1934 г. г.]。这一方法 В. Г. 戈戈拉得斯对更一般的四个自变量的双曲型綫性方程曾应用过 (苏联科学院报告，1934)。其次在 С. Л. 索伯列夫的工作中[数学彙刊，1(43)，1 期；1936。Математ. сборник, 1 (43), вып. 1; 1936 г.]，上述方法对偶数个自变量的一般双曲型方程有拓广。在下一段我們要指出对更一般方程在叙說的方法上的一些变动，这就是 В. Г. 戈戈拉得斯工作中已經做的，然后只对有常系数 c^2 的波动方程，叙述在自变量为任意偶数时方法的拓广。

152. 推广的波动方程 替代(122)考慮更一般方程：

$$\frac{1}{c^2}u_{tt}=\sum_{i=1}^{3}a_iu_{x_ix_i}+\sum_{i=1}^{3}b_iu_{x_i}+hu, \tag{157}$$

其中系数 a_i, b_i, c 及 h 为自变量 x_1, x_2, x_3 的函数，并且 a_i 大于某一正数。替代泛函(123)作泛函：

$$J=\int_{M_0}^{M_1}\frac{ds}{c}, \tag{158}$$

其中

$$ds^2=\sum_{i=1}^{3}\frac{dx_i^2}{a_i}。 \tag{159}$$

中心場的基本函数 $\tau(M; M_0)$ 滿足以下方程：

$$(160)\qquad \sum_{i=1}^{3} a_i \tau_{x_i}^2 = \frac{1}{c^2}。$$

就像在[148]中一样，定义任何函数 $u(M;t)$ 的推后值。替代(131)得到对于函数 σ 的以下的方程：

$$(161)\qquad 2\sum_{i=1}^{3} a_i \tau_{x_i}\sigma_{x_i} + \sigma\sum_{i=1}^{3}\left[a_i\tau_{x_ix_i} + \left(2\frac{\partial a_i}{\partial x_i} - b_i\right)\tau_{x_i}\right] = 0。$$

条件(133)取形狀：

$$(162)\qquad \lim_{M\to M_0} \sigma(M;M_0)\tau(M;M_0) = \frac{n(M_0)}{\sqrt{a_1^0 a_2^0 a_3^0}}$$

$$\left(n(M) = \frac{1}{c(M)}\right),$$

其中 a_i^0 是函数 a_i 在 M_0 点之值。替代(135)有估計

$$(163)\qquad |L(\sigma)| \leqslant \frac{K}{\tau(M;M_0)},$$

式中 $L(u)$ 是方程(157)的右边，而 K 为常数，并且公式(136)取形狀：

$$(164)\qquad \lim_{S_1\to M_0} \iint_{S_1} \sum_{i=1}^{3} a_i \sigma_{x_i} \cos(n,\, x_i)\, dS = -4\pi。$$

替代(138)成立公式：

$$(165)\qquad u(M_0;t) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left\{\sigma P([u]) - [u]P(\sigma) + \right.$$

$$\left. + \sigma\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]P(\tau) + \sigma R[u]\right\} dS + \frac{1}{4\pi}\iiint_D [u]M(\sigma)\,dv,$$

其中

$$P(v) = \sum_{i=1}^{3} a_i v_{x_i} \cos(n,\, x_i)$$

$$R = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} - b_i\right)\cos(n,\, x_i)$$

$$M(\sigma) = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 a_i\sigma}{\partial x_i^2} - \frac{\partial b_i\sigma}{\partial x_i} + h\sigma\right),$$

而 $M(\sigma)$ 是共轭于 $L(\sigma)$ 的算子。利用公式(165)，可以和在[149]中一样，把初始条件为(139)的柯西問題化为积分方程：

$$u(M_0;\,t)=F(M_0;\,t)+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D [v]M(\sigma)\,dv_\circ$$

应当指出，方程(157)的写法中有某些不定性，由于这样，我們可以按不同方式选取乘数 c^2。特别，用 c^2 乘方程的兩边，而把这函数包括到方程的系数中去，我們可以認为 $c=1$。

对于函数 $\sigma(M;M_0)$ 可以得到类似于(150)的公式：

$$\sigma^2(M;M_0)=\frac{n(M_0)\sin\vartheta_0\, e^{\int_0^s \sum\limits_{i=1}^{3}\left(b_i-\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right)\frac{1}{a_i}\frac{dx_i}{ds}ds}}{n(M)\dfrac{D(x_1,\,x_2,\,x_3)}{D(s,\,\vartheta_0,\,\varphi_0)}\sqrt{a_1^0a_2^0a_3^0}}, \tag{166}$$

式中 s 是連接 M_0 和 M 的極綫弧長，并且 ds^2 按照公式(159)計算。

153. 任意个数自变量的情形 在应用 С. Л. 索伯列夫方法于許多个自变量的情形，需要引进一些函数 σ_i。我們对于常系数的波动方程来說明这个方法的应用：

$$\frac{1}{c^2}u_{tt}=\sum_{i=1}^{2k+1}u_{x_ix_i} \tag{167}$$

(参看 С. Л. 索伯列夫"关于一个推广的克希荷夫公式"苏联科学院报告，1933)。

用 M 来記空間 R_{2k+1} 中坐标为$(x_1,\,\cdots,\,x_{2k+1})$的点。除此而外，要考虑坐标为$(x_1,\,\cdots,\,x_{2k+1},\,t_1)$或$(M;t)$的空間 R_{2k+2}。对于方程(167)頂点在$(M_0;\,t)$的特征錐面在 R_{2k+2} 中有方程

$$t_1=t-\frac{r}{c}, \tag{168}$$

其中：

$$r^2=\sum_{i=1}^{2k+1}(x_i-x_i^0)^2{}_\circ \tag{169}$$

照例用$[\varphi]$記函数 φ 的推后值：

$$[\varphi(M;t)]=\varphi\left(M;\,t-\frac{r}{c}\right),$$

就是説，数值 φ 在关于 t 是下面的半錐面 (168) 上。如同我們已經指出的[138]，在特征曲面上，满足方程(167)的函数 u 与它的导数之間存有关系。要对于 u 关于 t 的导数

$$u_s=\left[\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right]\quad (s=0,1,2,\cdots)\tag{170}$$

来确定这些关系，而且我們將設想 u_s 是 R_{2k+1} 中的函数。預先指出，基本方程(124)在这情形下有形狀：

$$\left(\operatorname{grad}\frac{r}{c}\right)^2=\frac{1}{c^2}。\tag{171}$$

將函数 u_s 对坐标直接微分，并也通过变量 $\left(t-\frac{r}{c}\right)$ 来微分，且利用容易驗証的公式：

$$\operatorname{grad}u_{s+1}\cdot\operatorname{grad}\frac{r}{c}=\left[\operatorname{grad}\frac{\partial^{s+1}u}{\partial t^{s+1}}\right]\cdot\operatorname{grad}\frac{r}{c}-$$
$$-\left[\frac{\partial^{s+2}u}{\partial t^{s+2}}\right]\operatorname{grad}^2\frac{r}{c},$$

其中点表示 R_{2k+1} 中的数量积，我們就得到以下的公式：

$$\Delta u_s=-2\operatorname{grad}u_{s+1}\cdot\operatorname{grad}\frac{r}{c}-u_{s+1}\Delta\frac{r}{c}。\tag{172}$$

引进算子：

$$L(v)=-2\operatorname{grad}v\cdot\operatorname{grad}\frac{r}{c}-v\Delta\frac{r}{c}=\tag{173}$$
$$=-\frac{2}{c}\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{x_i-x_i^0}{r}v_{x_i}-\frac{v}{c}\Delta r,$$

可以改写(172)为形狀：

$$\Delta u_s=L(u_{s+1})。\tag{174}$$

这就是在錐面(168)上滿足的关系式。算子 L 适合关系式：

$$vL(w)+wL(v)=-\operatorname{div}\left(2vw\operatorname{grad}\frac{r}{c}\right)。\tag{175}$$

对 r 的乘冪，我們有：

(176) $\Delta r^s=(2k+s-1)sr^{s-2}$; $L(r^s)=-\frac{2}{c}(s+k)r^{s-1}$。

导入函数 σ_i:

$$\sigma_i=\frac{(2k-2)(2k-4)\cdots(2i+2)2i}{(k-i)!c^{k-i}(2k-2)(2k-3)\cdots(k+i-1)}r^{-k-i+1};$$

(177) $$\sigma_k=r^{-2k+1} \qquad (i=1,2,\cdots,k-1)。$$

我們有：

(178) $$L(\sigma_1)=0;\quad L(\sigma_{i+1})=\Delta\sigma_i;\quad \Delta\sigma_k=0$$
$$(i=1,2,\cdots,k-1)。$$

設 D 是空間 R_{2k+1} 中不包含 M_0 点的某区域。写出 $(2k+1)$ 重积分：

(179) $$\int_D\sum_{s=1}^{k}(-1)^{s-1}[(u_{s-1}\Delta\sigma_{k-s+1}-\sigma_{k-s+1}\Delta u_{s-1})+$$
$$+(\sigma_{k-s+1}L(u_s)+u_sL(\sigma_{k-s+1}))]dx_1\cdots dx_{2k+1}。$$

从(174)与(178)推出这个积分等于零。注意到公式 (175) 和公式

$$v\Delta w-w\Delta v=\mathrm{div}(v\ \mathrm{grad}\ w-w\ \mathrm{grad}\ v),$$

可以改变积分(179)为沿包圍区域 D 的曲面 S 的积分。还考虑到公式：

$$\frac{\partial u_s}{\partial n}=\left[\frac{\partial^{s+1}u}{\partial t^s\partial n}\right]-\left[\frac{\partial^{s+1}u}{\partial t^{s+1}}\right]\frac{\partial\frac{r}{c}}{\partial n},$$

我們能写出：

$$\int_S\sum_{s=1}^{k}(-1)^s\left\{\frac{\partial\sigma_{k-s+1}}{\partial n}\left[\frac{\partial^{s-1}u}{\partial t^{s-1}}\right]-\sigma_{k-s+1}\left[\frac{\partial^s u}{\partial n\,\partial t^{s-1}}\right]-\right.$$
$$\left.-\sigma_{k-s+1}\frac{\partial\frac{r}{c}}{\partial n}\left[\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right]\right\}dS=0,$$

其中 n 是 S 的外法綫方向。若区域 D 含 M_0 点在内，在用小球划出 M_0 以后，上面公式仍旧适用。然后按通常方式过渡到極限，卽得以下公式：

$$(180)\quad u(M_0;t)=A\int_S \sum_{s=1}^{k}(-1)^s\left\{\frac{\partial\sigma_{k-s+1}}{\partial n}\left[\frac{\partial^{s-1}u}{\partial t^{s-1}}\right]-\right.$$

$$\left.-\sigma_{k-s+1}\left[\frac{\partial^s u}{\partial n\,\partial t^{s-1}}\right]-\sigma_{k-s+1}\frac{\partial\frac{r}{c}}{\partial n}\left[\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right]\right\}dS,$$

其中常数 A 由公式:

$$A=\frac{\prod_{i=1}^{2k-1}\Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)}{2(2k-1)\pi^{\frac{2k-1}{2}}\prod_{i=1}^{2k-1}\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}$$

来确定。当 $2k+1=3$, 公式(180)合于克希荷夫公式。若取中心为 M_0 及半徑为 ct 的球面作为曲面 S, 那末函数 u 的导数的推后値用 $t=0$ 时 u 与 u_t 的初始条件表出,并且我們得到柯西問題显式的解, 这是我們以前在別的形狀下有过的[II;171]。当初始条件給定在曲面 $t_1=\varphi(M)$ 上的情形, 利用公式(180)也能完全一样地解出柯西問題。要指出,在积分号下也出現初始条件的导数,因此为了問題能解,我們必須要求初始条件直到某一与 k 相关的确定阶数的导数的連續性,这也是我們以前指出过的。

在 C. A. 克利斯齐阿諾維奇的工作中(数学彙刊,卷 II,5 期, 1937),这个方法已扩充到非綫性双曲型方程上去。

154. 基本不等式 考虑具有形狀:

$$(181)\qquad \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{x_ix_k}+\sum_{i=1}^{n} b_iu_{x_i}+cu-u_{tt}=f$$

的双曲型方程, 其中 a_{ik}, b_i, c 及 f 与 $(x_1,\cdots,x_n,t)$ 有关, 并且 b_i, c 及 f 为連續,而 a_{ik} 在空間 $(x_1,\cdots,x_n,t)$ 的某区域上有連續一阶导数,这区域是我們以下要說到的。因为我們假設(181)是双曲型方程,就要成立不等式:

$$(182)\qquad \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k\geqslant\lambda\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\quad(\lambda>0),$$

并且我們設对上述区域 λ 为正常数。以后为了更加明显起見，我們考虑 $n=2$，这就是說，我們將考虑以 (x_1, x_2, t) 为坐标的三維空間 R。一切討論也能轉到一般情形去。

我們的問題是通过初始条件与系数来对方程 (181) 的解給出估計。順便說到，从这些估計立即就推出柯西問題的解的唯一性以及它和初始条件的連續相关性。我們以下的討論和那一些在对波动方程的柯西問題和边值問題的唯一性証明中我們用到过的事实相类似[II;179]。

設 D 为空間 R 的某一由光滑曲面 S 所圍成的有限区域，且假 n 为 S 的外法綫方向。假定說，方程 (181) 的解和到二阶为止的导数在 D 中直到 S 連續。写出积分：

$$(183)\qquad J=\iint_S\Big[\Big(\sum_{i,k=1}^{2}a_{ik}u_{x_i}u_{x_k}+u_t^2\Big)\cos(n, t)-\\ -2\sum_{i,k=1}^{2}a_{ik}u_{x_i}u_t\cos(n, x_k)\Big]dS。$$

应用奥斯特洛格拉得斯基公式并利用 (181)，得到：

$$(184)\qquad J=\iiint_D\Big\{2u_t\Big[\sum_{i=1}^{2}\Big(b_i-\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}\Big)u_{x_i}+cu-f\Big]+\\ +\sum_{i,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}u_{x_i}u_{x_k}\Big\}d\tau。$$

积分 (183) 中被积函数可以表示为形狀：

$$(185)\qquad \frac{1}{\cos(n, t)}\Big[\sum_{i,k=1}^{2}a_{ik}\big(u_{x_i}\cos(n, t)-\\ -u_t\cos(n, x_i)\big)\big(u_{x_k}\cos(n, t)-u_t\cos(n, x_k)\big)+\\ +u_t^2\Big(\cos^2(n, t)-\sum_{i,k=1}^{2}a_{ik}\cos(n, x_i)\cos(n, x_k)\Big)\Big]。$$

假定說，区域 D 由平面 $t=0, t=C\ (C>0)$ 和特征曲面所圍成，在最后的曲面上 $\cos(n, t)>0$。同时在它上面

$$(186)\qquad \cos^2(n, t)-\sum_{i,k=1}^{2}a_{ik}\cos(n, x_i)\cos(n, x_k)=0,$$

且由于 (182)，表达式(185)在側面上是非負的。应当指出，若側面并不是特征的，可是在其上适合条件

$$(187)\qquad \cos^2(n,\,t)-\sum_{i,k=1}^{2}a_{ik}\cos(n,\,x_i)\cos(n,\,x_k)\geqslant 0,$$

就要有同样的結論。在这情形下，称曲面是空向的 [参看 151]。其次，当 $t=C$ 时，$\cos(n,\,t)=1$ 及 $t=0$ 时 $\cos(n,\,t)=-1$，而同时 $\cos(n,\,x_1)$ 和 $\cos(n,\,x_2)$ 等于零。記

$$(188)\qquad K(t)=\iint\limits_{B(t)}\left(\sum_{i,k=1}^{2}a_{ik}u_{x_i}u_{x_k}+u_t^2\right)dx_1dx_2,$$

其中 $B(t_0)$ 是 D 与平面 $t=t_0$ 的截面，并且注意到，表达式(185)在整个側面上是非負的，就得到：

$$(189)\qquad \int_0^t\iint\limits_{B(t_1)}2u_t\left[\sum_{i=1}^{2}\left(b_i-\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}\right)u_{x_i}+cu-f\right]dx_1dx_2dt_1+$$
$$+\int_0^t\iint\limits_{B(t_1)}\sum_{i,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}u_{x_i}u_{x_k}dx_1dx_2dt_1\geqslant K(t)-K(0)$$
$$(0<t\leqslant C)。$$

假定說，不等式：

$$(190)\qquad \left|\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}\right|\leqslant P_0$$

成立，其中 P_0 为某正数，于是

$$\left|\iint\limits_{B(t_1)}\sum_{i,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}u_{x_i}u_{x_k}dx_1dx_2\right|\leqslant P_0\iint\limits_{B(t_1)}\sum_{i,k=1}^{2}|u_{x_i}|\cdot|u_{x_k}|dx_1dx_2。$$

其次，我們有：

$$\sum_{i,k=1}^{2}|u_{x_i}|\cdot|u_{x_k}|\leqslant 2\sum_{i=1}^{2}u_{x_i}^2。$$

但是由于(182)，

$$\sum_{i=1}^{2}u_{x_i}^2\leqslant\frac{1}{\lambda}\sum_{i,k=1}^{2}a_{ik}u_{x_i}u_{x_k},$$

于是推知，

$$\left|\int_0^t \iint_{B(t_1)} \sum_{i,k=1}^{2} \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} u_{x_i} u_{x_k} dx_1 dx_2 dt_1\right| \leqslant P_1 \int_0^t K(t_1) dt_1,$$

其中 P_1 是与系数有关的正常数。完全类似地：

$$\left|\int_0^t \iint_{B(t_1)} 2u_t \sum_{i=1}^{2}\left(b_i - \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}\right) u_{x_i} dx_1 dx_2 dt_1\right| \leqslant$$
$$\leqslant P_2 \int_0^t K(t_1) dt_1,$$

其中 P_2 是类似于 P_1 的常数。記：

(191) $$L(t) = \iint_{B(t)} u^2 dx_1 dx_2,$$

应用不等式 $2ab \leqslant a^2 + b^2$ 并且注意到，

$$\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} \geqslant 0,$$

得到：

$$\left|\int_0^t \iint_{B(t_1)} 2cu_t u dx_1 dx_2 dt_1\right| \leqslant P_3 \int_0^t [K(t_1) + L(t_1)] dt_1.$$

最后假設成立不等式：

(192) $$|f| \leqslant M,$$

注意到 $2|u_t| \leqslant (u_t^2 + 1)$，我們得着：

$$\left|\iint_{B(t_1)} 2f u_t dx_1 dx_2\right| \leqslant 2M \iint_{B(t_1)} |u_t| dx_1 dx_2 \leqslant ME +$$
$$+ M \iint_{B(t_1)} u_t^2 dx_1 dx_2,$$

其中 E 为当 $0 \leqslant t_1 \leqslant C$ 时面积 $B(t_1)$ 的最大值，或者

$$\left|\iint_{B(t_1)} 2f u_t dx_1 dx_2\right| \leqslant ME + MK(t_1),$$

于是推出：

(193) $$\left|\int_0^t \iint_{B(t_1)} 2f u_t dx_1 dx_2 dt_1\right| \leqslant MEt + M\int_0^t K(t_1) dt_1.$$

將所有得到的估計式代入(189),就有:

$$(194)\quad K(t)\leqslant K(0)+M_1t+(P+M)\int_0^t K(t_1)dt_1+P\int_0^t L(t_1)dt_1,$$

式中 P 为常数,它与系数 a_{ik}, b_i, c 以及 a_{ik} 的导数在所考虑的区域内的数值有关,且 $M_1=ME$。

对于 $L(t)$ 非常簡單地得到类似的不等式:

$$\iint\limits_{B(t)} u^2dx_1dx_2=\iint\limits_{B(0)} u^2dx_1dx_2+\int_0^t \iint\limits_{B(t_1)} 2uu_tdx_1dx_2dt_1,$$

从这里,注意到不等式 $2ab\leqslant a^2+b^2$, 即得:

$$(195)\qquad L(t)\leqslant L(0)+\int_0^t K(t_1)dt_1+\int_0^t L(t_1)dt_1。$$

把(194)与(195)相加:

$$(196)\quad K(t)+L(t)\leqslant K(0)+L(0)+M_1t+\gamma\int_0^t [K(t_1)+ +L(t_1)]dt_1,$$

其中

$$(197)\qquad \gamma=P+M+1。$$

引用記号: $$w(t)=\int_0^t [K(t_1)+L(t_1)]dt_1,$$

能写出: $$\frac{d}{dt}[e^{-\gamma t}w(t)]\leqslant(\delta+M_1t)e^{-\gamma t},$$

其中

$$(198)\qquad \delta=K(0)+L(0)。$$

对最后的不等式求积分并用 $e^{\gamma t}$ 乘兩边,即得:

$$w(t)\leqslant\left(\frac{\delta}{\gamma}+\frac{M_1}{\gamma^2}\right)e^{\gamma t}-\frac{M_1}{\gamma}t-\frac{\delta}{\gamma}-\frac{M_1}{\gamma^2}。$$

用这不等式的右边来替代(196)右边的 $w(t)$:

$$(199)\qquad K(t)+L(t)\leqslant\left(\delta+\frac{M_1}{\gamma}\right)e^{\gamma t}-\frac{M_1}{\gamma}。$$

更加有不等式：

$$(200_1)\qquad K(t)\leqslant\left(\delta+\frac{M_1}{\gamma}\right)e^{\gamma t}-\frac{M_1}{\gamma}$$

$$(200_2)\qquad L(t)\leqslant\left(\delta+\frac{M_1}{\gamma}\right)e^{\gamma t}-\frac{M_1}{\gamma}。$$

对于齐次方程($f=0$)必須假定 $M=M_1=0$：

$$(201_1)\qquad K(t)\leqslant\delta e^{(P+1)t}$$

$$(201_2)\qquad L(t)\leqslant\delta e^{(P+1)t}。$$

注意到(182)，我們能在(201_1)的左边换 $K(t)$ 为

$$\iint\limits_{B(t)}(\lambda u_{x_1}^2+\lambda u_{x_2}^2+u_t^2)\,dx_1dx_2。$$

并不限制一般性，可以假設在(182)中 $\lambda<1$，那末不等式(201_1)能换为較弱的不等式：

$$(202)\qquad \iint\limits_{B(t)}(u_{x_1}^2+u_{x_2}^2+u_t^2)\;dx_1dx_2\leqslant\frac{\delta}{\lambda}e^{(P+1)t}。$$

对于任意个数自变量 x_k，也能完全与上面一样地来証明不等式(200)。应当指出，这个不等式对于一切的 t 适用，只要当其时我們能作出上述类型区域 D。

形狀(200)的不等式的推导和这些不等式对于双曲型偏微分方程論的应用，可以在 C. Л. 索伯列夫的工作中找到："偏微分方程論的一些新問題"(数学彙刊，5卷1期)和"非綫性双曲型偏微分方程論"(数学彙刊，5卷1期，1939)。

155. 解的唯一性和連續相关性的定理 从証明了的不等式容易推出柯西問題的解的唯一性以及解与初始条件和方程的自由項的連續相关性定理。考虑在同一初始条件下柯西問題的兩个解之差，我們把唯一性定理化为以下的方式：若在方程(181)中自由項 f 等于零，并且初始条件有形狀：

(203)
$$u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0,$$
那末問题的解必須是 $u\equiv 0$。通过任何点 $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, t^{(0)})$ 引特征角錐，并假定它和平面 $t=0$ 一起产生上述类型的区域 D。設 $u(x_1, x_2, t)$ 为当 $f\equiv 0$ 以及有初始条件(203)时問題的解，它連同到二阶为止的导数在区域 D 中連續。比如說不等式 (201_2) 就可以应用，而且由以上所說的推知 $\delta=0$。因此

$$L(t)=\iint\limits_{B(t)} u^2 dx_1 dx_2=0,$$

于是推知在 D 中 $u\equiv 0$。若齐次的初始条件 (203) 不在整个平面 (x, y) 上而只在区域 D 的底面 $B(0)$ 上成立，这个論断仍旧有效，因为这时同样有 $\delta=0$。从此可以作出結論：齐次方程 (181) 的解在点 $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, t^{(0)})$ 的值只同顶点在 $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, t^{(0)})$ 的特征角錐的底面 $B(0)$ 上的初始条件之值有关。这里假設这个角錐同平面 $t=0$ 产生前述类型的区域 D。

完全和上面一样，解和初始条件的連續相关性归結于，若 $f\equiv 0$ 而且出現在初始条件

(204)
$$u|_{t=0}=\varphi_0(x_1, x_2);\quad u_t|_{t=0}=\varphi_1(x_1, x_2)$$
中的函数 $\varphi_0(x_1, x_2)$ 与 $\varphi_1(x_1, x_2)$ 很小（在某一意义下），那末解 $u(x_1, x_2, t)$ 也同样是很小的。假定說，我們取初始条件的微小是在那样的意义下，就是积分 $L(0)$ 与 $K(0)$ 很小，也就是假設我們有不等式 $L(0)\leqslant\varepsilon$ 和 $K(0)\leqslant\varepsilon$，其中 ε 是小的正数。同时从 (201_1) 和 (201_2) 立即推出，$L(t)$ 和 $K(t)$ 在整个区域 D 上有以下形状的估計：

$$K(t)\leqslant 2\varepsilon e^{(P+1)t};\quad L(t)\leqslant 2\varepsilon e^{(P+1)t}。$$

若仅仅是 $n=1$，就是說，若我們有兩个自变量 x_1 和 t，与初始条件的連續相关性，可以証明不仅在估計积分 $K(t)$ 及 $L(t)$ 的意义上，而且在估計函数本身的絕对值的意义上。这直接由黎曼方法

推出[143]，只要方程已化为在应用黎曼方法时所采取的那种标准形式。如果自变量的个数大于 2，則从 $|\varphi_0|$ 与 $|\varphi_1|$ 的微小性不能推出 $|u|$ 的微小性(当 $f=0$ 时)。借助于上面所推导的不等式来研究一下 $n=1$ 的情形。

此时我們有自变量 (x, t)，而区域 D 一般說来是有曲綫斜边的梯形 ABB_1A_1。直綫 A_1B_1 有方程 $t=C$。假定說，$x=\xi_1(t)$ 是边 AA_1 的方程，$x=\xi_2(t)$ 是边 BB_1 的方程。我們假設，不仅出现在初始条件(204)中的函数 $\varphi_0(x)$ 与 $\varphi_1(x)$，而且导数 $\varphi_0'(x)$ 按絕对值皆是很小的。同时这些量的平方沿着区域 D 的底边 AB 的积分也是很小的，因而值 $L(0)$ 与 $K(0)$ 很小，而且在所給的情形下，我們有：

$$K(t)=\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)}[a(x, t)u_x^2+u_t^2]dx,$$

其中 $a(x, t)\geqslant m>0$。由于上述的估計，从 $L(0)$ 和 $K(0)$ 的微小性推知量 $L(t)$ 与 $K(t)$ 当 $0\leqslant t\leqslant C$ 时的微小性，于是我們能断定以下諸积分的微小性：

$$(205)\qquad \int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)}u^2(x, t)dx;\quad \int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)}u_x^2(x, t)dx;\quad \int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)}u_t^2(x, t)dx。$$

假定說，这些积分不超过某正数 η。应用布略柯夫斯基不等式，我們有：

$$\{u(x, t)-u[\xi_1(t), t]\}^2=\left[\int_{\xi_1(t)}^{x}u_x(x', t)dx'\right]^2\leqslant$$
$$\leqslant\int_{\xi_1(t)}^{x}u_x^2(x', t)dx'\cdot\int_{\xi_1(t)}^{x}1^2dx',$$

于是

$$(206)\qquad \{u(x, t)-u[\xi_1(t), t]\}^2\leqslant a\eta$$
$$[\xi_1(t)\leqslant x\leqslant\xi_2(t)],$$

式中 a 为差式 $\xi_2(t)-\xi_1(t)$ 在 D 中之最大值。

完全一样，得到估計：

$$\left[\int_{\xi_1(t)}^{x} u(x', t)\,dx'\right]^2 \leqslant a\eta, \tag{207}$$

$$[\xi_1(t) \leqslant x \leqslant \xi_2(t)]。$$

从(206)推出：

$$u[\xi_1(t), t] = u(x, t) + v(x, t) \quad [|v(x, t)| \leqslant \sqrt{a\eta}]。\tag{208}$$

在范圍 $\xi_1(t) \leqslant x \leqslant \xi_2(t)$ 內关于 x 求兩边的积分，并利用 (207)，得：

$$|u[\xi_1(t), t]| \leqslant \frac{\sqrt{a\eta}}{b} + \sqrt{a\eta}, \tag{209}$$

其中 b 是差式$[\xi_2(t) - \xi_1(t)]$在 D 中的最小值，就是說，$|u[\xi_1(t), t]| \leqslant c\eta^{\frac{1}{2}}$，其中 c 为某常数。利用 (208) 并根据剛才所說的不等式，得到估計：

$$|u(x, t)| \leqslant d\eta^{\frac{1}{2}}, \tag{210}$$

其中 η 是积分 (205) 的估計，而 d 是对于 D 中一切点皆相同的常数。这样一来，我們就有了 $|u(x, t)|$ 在整个区域 D 上的估計式。現在轉到解 $u(x, t)$ 与自由項 f 相关性的估計。

假定說，在齐次初始条件(203)时自由項 f 异于零。这时不等式 (200_1) 与 (200_2) 化为形狀：

$$\left.\begin{aligned} K(t) &\leqslant M_1\left(\frac{1}{\gamma}e^{\gamma t} - \frac{1}{\gamma}\right) \\ L(t) &\leqslant M_1\left(\frac{1}{\gamma}e^{\gamma t} - \frac{1}{\gamma}\right), \end{aligned}\right. \quad (M_1 = ME;\ |f| \leqslant M) \tag{211}$$

于是推知在所說意义下解与自由項的連續相关性。

有不同的自由項但有相同的初始条件的方程 (181) 的兩个解 u_1 与 u_2，其差 $u_2 - u_1$ 的积分 $K(t)$ 和 $L(t)$ 可以任意小，只要差的

絕对值 $|f_2-f_1|$ 为充分小。当 $n=1$ 时，和上面一样，也可以得到 $|u_2-u_1|$ 的估計。

156. 波动方程的情形 考虑齐次波动方程：

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}-u_{tt}=0。$$

我們对于它能作出有初始条件：

$$u|_{t=0}=\varphi(x_1,\ x_2);\quad u_t|_{t=0}=\psi(x_1,\ x_2)$$

的柯西問題的解，其中 $\varphi(x_1, x_2)$ 和 $\psi(x_1, x_2)$ 依次有到三阶和二阶为止的連續导数，[**II;171,172**]。若是 $\varphi(x_1, x_2)$ 有到六阶为止而 $\psi(x_1, x_2)$ 有到五阶为止的連續导数，那末利用普阿松公式，我們能断定，u 关于坐标 (x_1, x_2) 到三阶为止的任何导数同样是波动方程的解，而在初始条件中 φ 与 ψ 換成相应的导数。因此，例如 u_{x_1} 是有初始条件 φ_{x_1} 与 ψ_{x_1} 的柯西問題的解等等。設 D 为波动方程的以某点 $M_1(x_1, y_1, t_1)$ $(t_1>0)$ 为頂点的特征錐面，下面由平面 $t=0$ 所限制。与平面 $t=t_0$ 相截的任一截口 $B(t_0)$ 是圓，其中 $0\leqslant t_0<t_1$。假定說，对于函数 φ 和 ψ 以及它們的导数有估計：

$$\iint\limits_{B(0)}\left(\frac{\partial^\alpha\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}}\right)^2 dS\leqslant\varepsilon^2;\quad \iint\limits_{B(0)}\left(\frac{\partial^\alpha\psi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}}\right)^2 dS\leqslant\varepsilon^2。$$

$$(\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)\qquad\qquad (\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

对于波动方程，$K(t)$ 成为关于 x_1, x_2 及 t 的导数平方和在 $B(t)$ 上的积分，并且考虑对于 u 和它的关于 (x_1, x_2) 直到三阶的导数的柯西問題，由于以上所述，我們有 $K(0)\leqslant 3\varepsilon^2$ 及 $L(0)\leqslant\varepsilon^2$，于是 $\delta\leqslant 4\varepsilon^2$，且不等式 (201_1) 和 (201_2) 給出：

$$K(t)\leqslant 4\varepsilon^2 e^{(P+1)t};\quad L(t)\leqslant 4\varepsilon^2 e^{(P+1)t}。$$

这些不等式不論是对于 u，或者是对于它的直到三阶为止关于 (x_1, x_2) 的导数皆成立。尤其是成立不等式：

$$\iint\limits_{B(t)}\left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}}\right)^2 dS\leqslant 4\varepsilon^2 e^{(P+1)t}\quad (\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4);$$

$$\iint\limits_{K(t)}\left(\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}}\right)^2 dS\leqslant 4\varepsilon^2 e^{(P+1)t}\quad(\alpha=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

其中 $K(t)$ 为圓。如同我們現在要証明的，从此能得到对于函数本身以及它的导数在有較小半徑的 $K(t)$ 的任何同心圓 $K_1(t)$ 上成立的不等式：

$$|u|,\ |u_{x_1}|,\ |u_{x_2}|,\ |u_{x_1x_1}|,\ |u_{x_1x_2}|,\ |u_{x_2x_2}|,\ |u_t|,\ |u_{tx_1}|,\ |u_{tx_2}|\leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon c e^{\frac{P+1}{2}t},$$

其中 c 是某常数。u_{tt} 的估計直接从波动方程本身推得。因此，我們得到的不是平方平均估計，而是函数自身和它的到二阶为止导数的估計。

上述的一切可直接从下面的一般性定理推出，我們对任意維数空間来叙述和証明它。在下一章这个定理我們也是需要的。

定理 若函数 $f(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 在 n 維球 D 的内部有到某一阶数 l 为止的連續导数，并且成立估計：

$$\int_D\left(\frac{\partial^{\alpha}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2 dx_1\cdots dx_n\leqslant A^2\qquad(\alpha=0,\ 1,\ \cdots,\ l),\tag{212}$$

那末在里面的任何同心球 D_1 内，对于函数 u 本身和它的到 $l-\left[\frac{n}{2}\right]-1$ 阶的导数成立估計：

$$\left|\frac{\partial^{\beta}f}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}\right|\leqslant cA\quad\left(\beta=0,\ 1,\ \cdots,\ l-\left[\frac{n}{2}\right]-1\right),\tag{213}$$

其中 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 是正数 $\frac{n}{2}$ 的整数部分，而常数 c 只与 D_1 的选取有关。

作輔助函数

$$\sigma(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x\leqslant\frac{1}{3},\\ 0 & \text{当 } x\geqslant\frac{2}{3},\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}} & \text{当 } \frac{1}{3}<x<\frac{2}{3},\end{cases}\tag{214}$$

其中
$$u=\frac{\frac{1}{2}-x}{\left(\frac{2}{3}-x\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)}。$$

显然，当 x 从大于 $\frac{1}{3}$ 的值趋向于 $\frac{1}{3}$ 时 $u\to+\infty$，而当 x 从小于 $\frac{2}{3}$ 的值趋向于 $\frac{2}{3}$ 时 $u\to-\infty$。同时 $\sigma(x)$ 相应地趋向 1 和 0，并且不难驗証，$\sigma(x)$ 的一切导数在 $x=\frac{1}{3}$ 和 $x=\frac{2}{3}$ 时为連續。設 M_0 为 D_1 中某一点且 h 为 D 与 D_1 的半徑之差。引进中心在 M_0 的球坐标系：

$$x_1=r\cos\theta_1;$$
$$x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n-2}=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2};$$
$$x_{n-1}=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\psi;$$
$$x_n=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\psi,$$

而 $0\leqslant\theta_k\leqslant\pi$ 及 $0\leqslant\psi<2\pi$。我們有体积元素：

$$d\omega_n=r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}drd\theta_1\cdots d\theta_{n-2}d\psi。$$

划去 dr 并置 $r=1$，得到單位球面的面积單元 $d\sigma_n$。引进函数：

$$F(M)=f(M)\cdot\frac{\partial^{l-1}}{\partial r^{l-1}}\left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!}\sigma\left(\frac{r}{h}\right)\right]-$$
$$-\frac{\partial f(M)}{\partial r}\cdot\frac{\partial^{l-2}}{\partial r^{l-2}}\left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!}\sigma\left(\frac{r}{h}\right)\right]+$$
$$+\cdots+(-1)^{l-1}\frac{\partial^{l-1}f(M)}{\partial r^{l-1}}\cdot\left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!}\sigma\left(\frac{r}{h}\right)\right],$$

其中 r 为距离 $\overline{M_0M}$。能直接驗証以下公式：

$$F(M_0)=f(M_0);\quad F(M)=0\quad 当\ r=h,$$

(215)
$$\frac{\partial F(M)}{\partial r}=f(M)\cdot\frac{\partial^l}{\partial r^l}\left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!}\sigma\left(\frac{r}{h}\right)\right]+$$
$$+(-1)^{l-1}\frac{\partial^l f}{\partial r^l}\cdot\left[\frac{r^{l-1}}{(l-1)!}\sigma\left(\frac{r}{h}\right)\right],$$

并且我們能写出：

$$f(M_0)=-\int_0^h\frac{\partial F(M)}{\partial r}dr,$$

而积分沿从 M_0 点發出的射綫进行。用 $d\sigma_n=d\omega_n:r^{n-1}dr$ 乘这公式的兩边，在范圍 $0\leqslant\theta_s\leqslant\pi$；$0\leqslant\psi\leqslant 2\pi$ 上积分，得：

$$f(M_0)=-\frac{1}{\sigma_n}\int_{D_0}\frac{\partial F(M)}{\partial r}r^{-n+1}dx_1\cdots dx_n,$$

其中 D_0 是中心在 M_0 和半徑为 h 的球，而 σ_n 是 R_n 中單位球面的面积。置 $k=\left[\frac{n}{2}\right]$，改写前面的公式为形狀：

$$f(M_0)=-\frac{1}{\sigma_n}\int_{D_0}\frac{1}{r^k}\frac{\partial F(M)}{\partial r}r^{k-n+1}dx_1\cdots dx_n,$$

并应用布略柯夫斯基不等式，得：

$$f^2(M_0)\leqslant\frac{1}{\sigma_n^2}\int_{D_0}\left(\frac{1}{r^k}\frac{\partial F(M)}{\partial r}\right)^2dx_1\cdots dx_n\times$$
$$\times\int_{D_0}r^{2k-2n+2}r^{n-1}drd\theta_1\cdots d\theta_{n-2}d\psi。$$

当 n 为偶数时，最末积分中的冪指数等于 1，而当 n 为奇数时等于零。因此我們得到：

(216)
$$f^2(M_0)\leqslant c_1\int_{D_0}\left(\frac{1}{r^k}\frac{\partial F(M)}{\partial r}\right)^2dx_1\cdots dx_n,$$

其中常数 c_1 只和 h 有关。轉向公式(215)。右边 f 的系数当 $r\leqslant\leqslant\frac{h}{3}$ 时，由于(214)而等于零。另一方面，注意到复合函数的微分法則，就能断定。$\frac{\partial^l f}{\partial r^l}$ 是关于 $x_1, \cdots, x_n$ 的 l 阶导数有有界系数的綫性結合。注意到这个，可以写：

$$\frac{1}{r^k}\frac{\partial F(M)}{\partial r}=af+\sum a_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

其中 a 为有界連續函数而 $|a_{\alpha_1\cdots\alpha_n}|\leqslant c_2r^{l-k-1}$。当 $l\geqslant k+1$ 时，也就是 $l\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 时，在写出的公式中的一切系数都是有界的，并且考虑到不等式 $(x_1+\cdots+x_n)^2\leqslant n(x_1^2+\cdots+x_n^2)$ 及估計(212)，由于(216)，我們得到：

$$f^2(M_0)\leqslant c^2A^2,$$

其中常数 c 只和 h 有关。若对于正整数 β 成立不等式 $l-\beta\geqslant\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$，即 $\beta\leqslant l-\left[\frac{n}{2}\right]-1$，换 f 为 f 的任何 β 阶导数，又 l 为 $(l-\beta)$，那末我們可以运用所有以上的論断。这样，我們就得到估計 (213)。定理得証。这个定理以及所引的証明屬于 С. Л. 索伯列夫。

对于非齐次波动方程解的估計，假設不仅出現在初始条件中的函数可微，而且自由項也是充分可微上面証明的定理可以应用。除此而外，对于到推广的波动方程[**II;188**]：

$$u_{tt}=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+c^2u$$

以及波动方程中有任意个数自变量的情形以上所进行的討論也适用。

157. 輔助命題 現在我們叙說函数論的若干定理，它們是我們以后所必需的。这些定理在任何維数的欧氏空面成立。为了写法簡單，我們对平面的情形来叙述它們。

設 F 是平面上的有界閉集，又在其上已給定連續函数 $f(P)=-f(x,y)$。在 F 上連續性的定义和在閉区域上的一样 [**I;67 及 151**]，并且完全同样的可以証明 $f(P)$ 在 F 上有最大值和最小值。設 $A=\max|f(P)|$ 在 F 上。

定理 有界閉集 F 上的連續函数 $f(x,y)$ 能开拓到全平面上，

而保持連續性和上界 A。

开始証明下面引理:

引理　設 D 与 E 是平面上兩个沒有公共点的有界閉集，a 与 b 为給定的数 $(a<b)$，那末可以作出在整个平面上的連續函数 $\varphi_{a,b}(x, y)$，对 D 中点等于 a，对 E 中点等于 b，并且滿足不等式:

$$a \leqslant \varphi_{a,b}(x, y) \leqslant b。$$

注意到，若是点 (x, y) 不屬于 F，点 (x, y) 到有界閉集 F 的距离 $\rho(x, y; F)$ 为正的，若 (x, y) 屬于 F，就等于零，而且距离是 (x, y) 的連續函数[II;89]。若 $a=0$ 及 $b=1$，則函数

$$\varphi_{0,1}(x, y)=\frac{\rho(x, y; D)}{\rho(x, y; D)+\rho(x, y; E)}$$

显然滿足引理中一切要求。在一般情况下，置:

$$\varphi_{a,b}(x, y)=(b-a)\varphi_{0,1}(x, y)+a$$

就行了。

附注　若兩集之一，例如 E 是沒有的，則在整个平面上設 $\varphi(x, y)=a$ 就够了。

轉到定理的証明。令 $f_0(x, y)=f(x, y)$。用 D_0 与 E_0 表示由集 F 的点組成的閉集，在其中相应地有 $f(x, y) \leqslant -\frac{A}{3}$ 及 $f(x, y) \geqslant \frac{A}{3}$。依照引理可以作在全平面上的連續函数 $\varphi_0(x, y)$，在 D_0 上等于 $\left(-\frac{A}{3}\right)$，在 E_0 上等于 $\frac{A}{3}$，并且适合条件 $|\varphi_0(x, y)| \leqslant \frac{A}{3}$。設

$$f_1(x, y)=\varphi_0(x, y)-f_0(x, y) \quad [(x, y)\text{在 } F \text{ 上}]。$$

从 $\varphi_0(x, y)$ 和 $f_0(x, y)$ 的性質直接推知，若 $A_1=\max|f_1(x, y)|$ 在 F 上，則 $A_1 \leqslant \frac{2}{3}A$。現在对于 $f_1(x, y)$ 作新函数 $f_2(x, y)$，

完全像我們对于 $f_0(x, y)$ 作 $f_1(x, y)$ 一样。設 D_1 与 E_1 是 F 的一些点的集合，在其中 $f_1(x, y) \leqslant -\frac{A_1}{3}$ 与 $f_1(x, y) \geqslant \frac{A_1}{3}$。作 $\varphi_1(x, y)$，在全面上連續，在 D_1 上等于 $\left(-\frac{A_1}{3}\right)$，在 E_1 上等于 $\frac{A_1}{3}$ 且滿足条件 $|\varphi_1(x, y)| \leqslant \frac{A_1}{3}$。然后置：

$$f_2(x, y) = \varphi_1(x, y) - f_1(x, y) \quad [(x, y)\text{在 } F \text{ 上}]。$$

若 $A_2 = \max|f_2(x, y)|$ 在 F 上，則 $A_2 \leqslant \frac{2}{3}A_1$。于是作出兩个連續函数列：在 F 上定义的 $f_n(x, y)$ 和确定在整个平面上的函数 $\varphi_n(x, y)$，并且

$$(217) \qquad f_{n+1}(x, y) = f_n(x, y) - \varphi_n(x, y) \quad [(x, y)\text{在 } F \text{ 上}]$$

及

$$(218) \qquad |f_n(x, y)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n A \quad [(x, y)\text{在 } F \text{ 上}];$$

$$|\varphi_n(x, y)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{A}{3} \quad [(x, y)\text{任意的}]。$$

从最后的不等式推知，級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x, y)$$

在全平面上一致收斂。它的和 $\varphi(x, y)$ 在全平面上連續，且

$$|\varphi(x, y)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{A}{3} = A。$$

剩下要証明 $\varphi(x, y)$ 在 F 上符合于 $f(x, y)$。关于 n 从 $n=0$ 到 $n=p$ 求等式(217)的和，得：

$$\sum_{n=0}^{p} \varphi_n(x, y) = f_0(x, y) - f_{p+1}(x, y) \quad [(x, y)\text{在 } F \text{ 上}]。$$

当 $p \to \infty$ 时，由于 (218) 中前一个不等式，得到在 F 上 $\varphi(x, y) = f_0(x, y)$，也就是，在 F 上 $\varphi(x, y) = f(x, y)$，定理証畢。

上述的証明我們取自 П. С. 亞历山大洛夫的書“集与函數泛

論初阶" ["Введение в общую теорию множеств и функций"]。現在对于在全平面上給定且連續的任何函数 $f(x, y)$，引进某种平均化过程。它向我們引出函数列 $F_n(x, y)$，$F_n(x, y)$ 有各阶导数且当 n 的值大时接近于 $f(x, y)$。

設 $\omega(t)$ 为对所有实数 t 定义的某函数，具有一切阶数的普通导数，在区間 $[-1, +1]$ 上非負，在这区間外面等于零，并且使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t)\,dt = \int_{-1}^{+1} \omega(t)\,dt = 1。\tag{219}$$

作为例子我們指出按以下方式定义的函数：

$$\omega(t) = ce^{\frac{1}{t^2-1}} \text{ 当 } |t|<1 \quad \text{及} \quad \omega(t)=0 \text{ 当 } |t|\geqslant 1,\tag{220}$$

其中常数 c 由条件

$$c\int_{-1}^{+1} e^{\frac{1}{t^2-1}}\,dt = 1$$

来确定。若 t 从小于 1 的值趋向 1，则 $\frac{1}{t^2-1} \to -\infty$，因而函数 $\omega(t)$ 的各阶导数当 t 通过 $t=1$ 时并不失去連續性，而轉到当 $t\geqslant 1$ 时等于零的数值去。当 t 从大于 -1 的值趋向 -1 时也相类似。

現在作在平面上的平均化核的序列

$$\psi_n(x, y; \xi, \eta) = n^2\omega(nx-n\xi)\,\omega(ny-n\eta)。$$

非負函数 $\psi_n(x, y; \xi, \eta)$ 有各阶連續偏导数，只与差 $x-\xi$, $y-\eta$ 有关，在二維区間

$$\Delta_n^{(\xi,\eta)}\left(|x-\xi|\leqslant\frac{1}{n},\ |y-\eta|\leqslant\frac{1}{n}\right)$$

的外部成为零，且由于(219)，我們有：

$$\iint\limits_{\Delta_n^{(\xi,\eta)}} \psi_n(x, y; \xi, \eta)\,dx\,dy = 1。\tag{221}$$

設 $f(x, y)$ 在全平面上定义且連續。作平均函数列：

$$F_n(\xi, \eta) = \iint f(x, y)\,\psi_n(x, y; \xi, \eta)\,dx\,dy\tag{222}$$

$$(n=1, 2, \cdots)。$$

对于任意固定的(ξ, η)被积函数在 $\Delta_n^{(\xi,\eta)}$ 的外面等于零，且所写的积分可以視为或是关于区間 $\Delta_n^{(\xi,\eta)}$ 或是关于全平面面取。被积函数是点对 (x, y)，(ξ, η) 的連續函数，且有关于(ξ, η)的各阶連續导数。由此推知[II; 80]，$F_n(\xi, \eta)$ 在全平面上連續且有各阶連續导数。

今証明在平面的任何有限閉区域 $\overline{B}$ 上，$F_n(\xi, \eta)$一致趋向于 $f(\xi, \eta)$。注意到(221)与(222)，可以写出：

$$f(\xi, \eta)-F_n(\xi, \eta)=\iint[f(\xi, \eta)-$$

$$-f(x, y)]\psi_n(x, y;\xi, \eta)dx\,dy,$$

于是，因 ψ_n 为正：

$$|f(\xi, \eta)-F_n(\xi, \eta)|\leqslant\iint|f(\xi, \eta)- \tag{223}$$

$$-f(x, y)|\psi_n(x, y;\xi, \eta)dx\,dy。$$

我們选取这样大的 N，使得当 $n\geqslant N$ 时对于 $\overline{B}$ 中任意选取的 (ξ, η)，有 $|f(\xi, \eta)-f(x, y)|\leqslant\varepsilon$，只要$(x, y)$屬于 $\Delta_n^{(\xi,\eta)}$。由于在任何有界区域上 $f(x, y)$ 的一致連續性，这样的 N 存在。

注意到 (223) 和在 $\Delta_n^{(\xi,\eta)}$ 外面 $\psi_n(x, y;\xi, \eta)=0$ 的事实，根据(221)得到：当 $n\geqslant N$，若(ξ,η)屬于 $\overline{B}$，則 $|f(\xi, \eta)-F_n(\xi, \eta)|\leqslant\leqslant\varepsilon$，这就証明了我們的断言。

若 $f(x, y)$ 适合不等式 $|f(x, y)|\leqslant A$，則对每一 n，$|F_n(\xi, \eta)|\leqslant A$。

实际上：

$$|F_n(\xi, \eta)|\leqslant\iint|f(x, y)|\psi_n(x, y;\xi, \eta)dx\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\iint A\psi_n(x, y;\xi, \eta)dx\,dy=A。$$

还要指出以下事实。若 $f(x, y)$ 在某有限区域 B_1 的外部等于零，则在平面上到 B_1 境界的距离大于 $\frac{1}{n}$ 的一切点，函数 $F_n(\xi, \eta)$ 成为零。由此推知，在位于 B_1 外面的每一点，对所有充分大的值 n，函数 $F_n(\xi, \eta)$ 等于零。在这情形下，在全平面上 $F_n(\xi, \eta) \to f(\xi, \eta)$（一致地）。

上述作平均函数的步驟也能运用到当 $f(x, y)$ 仅为可积的情形。关于这方面在第五卷中將更詳細地叙述。

158. 波动方程的广义解 利用格林公式，能推广关于偏微分方程解的概念。从波动方程

$$\square u = u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0 \tag{224}$$

开始。設 D 为三維空間 (x, y, t) 的某有界区域，S 是包圍它的曲面。格林公式有形狀：

$$\iiint_D (v \square u - u \square v)\, d\tau = \iint_S [\sigma P(u) - uP(\sigma)]\, dS, \tag{225}$$

其中

$$P(u) = u_x \cos(n, x) + u_y \cos(n, y) - \frac{1}{a^2} u_t \cos(n, t)。\tag{226}$$

假定說，函数 u 有在 D 內到二阶为止的連續导数并滿足方程 (224)，而 σ 为任意函数，在 D 內部有到二阶为止的連續导数，并且在 D 內的到 S 的距离不超过某一（对不同的 σ 是不同的）正数的一切点处等于零。这时公式 (225) 給出：

$$\iiint_D u \square \sigma\, d\tau = 0。\tag{227}$$

这公式不包含函数 u 的导数，而以上的想法很自然地使我們引出下面的定义：在区域 D 內可积函数 u 称为方程 (224) 的广义解，如果它对于具有上述性質的任何函数 σ 适合方程 (227)。

假定說，我們有和參数 λ 相关的一族广义解 $u(M, \lambda)$。条件

(227)写成形狀：

$$\iiint_D u(M,\lambda)\Box\sigma(M)d\tau=0, \tag{228}$$

其中 $M(x, y, t)$ 为动点。为了确定起見，假定当 λ 在固定的有限区間 $[a,b]$ 上变动时，$u(M,\lambda)$ 是四个变量 (x, y, t,λ) 的連續函数。关于 λ 在区間 $[a, b]$ 上积分(228)，得：

$$\iiint_D u_1(M)\Box\sigma(M)d\tau=0,$$

其中
$$u_1(M)=\int_a^b u(M,\lambda)d\lambda,$$

就是說，函数 $u_1(M)$ 适合条件 (227) 因而也是方程 (224) 的广义解，这就是，关于参数求与参数有关的某些广义解的积分，我們得到的也是广义解。

波动方程广义解的理論是 С. Л. 索伯列夫在他的工作“在黎曼曲面上波的繞射的一般理論” (В. А. 斯捷克洛夫数学研究所彙报)[“Общая теория диффракции волн на Римановых поверхностях” (Труды Математического института им. В. А. Стеклова)]中闡明的。我們要提到在这工作中所証明的兩个結果。为了 $u(M)$ 是在 D 内部的广义解起見，必要而充分的是存在方程 (224) 的这样一列解 $u_n(M)$，在 D 内有到二阶为止的連續导数，使

$$\lim_{n\to\infty}\iiint_D |u(M)-u_n(M)|d\tau=0.$$

此外，在所提到的工作中，建立了关于广义解的柯西問題并証明了它的解的唯一性。其次广义解也应用于解决在黎曼曲面上波的繞射問題。从 [142] 的討論推出，当保持了运动学的相容条件时，波动方程广义解的弱性間斷只能在特征曲面上發生。

給出波动方程：

$$\square u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-\frac{1}{a^2}u_{tt}=0$$

的广义解的例子。設 $\omega(\xi)$ 为有限区間 $J(a\leqslant\xi\leqslant b)$ 上的連續函数，而不具有导数。設 D 是四維空間 (x, y, z, t) 这样的有限区域，在它的一切点处 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$ 且量 $\left(t-\frac{r}{a}\right)$ 屬于区間 J。存在函数列 $\omega_n(\xi)$，对一切 ξ 有任何阶的导数，在区間 J 中均匀趋向于 $\omega(\xi)$ [157]。函数

$$\frac{\omega_n\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}$$

有在 D 中連續的各阶导数且滿足方程 (224) [II;200]。按照格林公式，我們有：

$$\iiint\limits_D \frac{\omega_n\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}\square\sigma d\tau=0,$$

其中 σ 适合上述条件。当 $n\to\infty$ 时，过渡到極限，得：

$$\iiint\limits_D \frac{\omega\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}\square\sigma d\tau=0,$$

也就是，函数

$$u=\frac{\omega\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r},$$

甚至沒有一阶导数，而是区域 D 中方程 (224) 的广义解。完全一样，能够証明，$\omega(x-at)$ 是在平面 (x, t) 上的某区域內方程 $u_{xx}-\frac{1}{a^2}u_{tt}=0$ 的广义解。利用格林公式作为导引的方法，对于非齐次波动方程或者甚至对于以下形狀的方程 [147]：

$$L(u)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{x_ix_k}+\sum_{k=1}^{n} b_k u_{x_k}+cu=f, \tag{229}$$

也可以定义广义解。同上面一样，利用格林公式，我們来引出这方

程的广义解的定义：方程(229)的广义解是指任何满足条件：

$$\int\cdots\int_D uM(\sigma)d\tau=\int\cdots\int_D f\sigma d\tau \tag{230}$$

的連續函数，其中 σ 为在 D 內有到二阶为止連續导数的任何函数，而在到 D 的境界距离不超过某一正数的所有点处等于零。我們用 $M(\sigma)$ 来記和 $L(u)$ 共軛的算子 [147]。若 u 满足 (230) 且在 D 內有到二阶为止的連續导数，那末我們可以应用公式(110)，并且利用靠近 D 的境界 σ 成为零的事实，就有：

$$\int\cdots\int_D [\sigma L(u)-uM(\sigma)]d\tau=0。$$

考虑到(230)，即得：

$$\int\cdots\int_D \sigma[L(u)-f]d\tau=0,$$

由于 σ 在 D 內的任意性，因之可以断定[62]，在 D 內 $L(u)=f$。这样一来，当函数 u 在 D 內部具有到二阶为止的連續导数时，由(230)推出，函数 u 在 D 內部确实满足方程(229)。定义(230)本身甚至并不要求函数 u 有一阶导数。

函数 u 的連續性的要求，实質上也一样是多余的，而可以改为它的可积性条件。广义解的一般研究需要实变函数論，而我們把它擱置到第五卷去。

关于广义解較詳細的知識，可在 С. Л. 索伯列夫的"数学物理方程"(1950)書中看到。

159. 椭圓型方程 在柯西問題的研究中，直到現在，我們考虑的是双曲型方程。現在要講最簡單的椭圓型方程，就是兩个自变量的拉普拉斯方程：

$$u_{xx}+u_{yy}=0。\tag{231}$$

我們知道，这方程的任何解是某解析函数：$f(z)=u(x,y)+$

$+v(x, y)i$ 的实部 [III; 22]。考察方程(231)在某一点的鄰域內的解，而这一点我們可取作坐标原点。假設 u 在这点和它的近旁有到二阶为止的連續导数，对于 $f(z)$ 將有冪級数展开式：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

在某一圓 $|z|<R$ 內收斂，并且 $c_n=a_n+b_n i$ 是一些复数。在級数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n i)(x+yi)^n$$

的各項中分出实部，对于 $u(x, y)$ 我們得到关于 (x, y) 的齐次多項式級数形的表示式：

$$u(x, y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{a_n\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2+\cdots\right]+\right.$$
$$\left.+b_n\left[-nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3-\cdots\right]\right\}, \tag{232}$$

并且这个級数在条件：$\sqrt{x^2+y^2}<R$ 之下絕对收斂。把最后的級数写为关于 x 和 y 正整次冪的二重級数的形狀：

$$\sum_{p,q=0}^{\infty} d_{pq}x^p y^q \tag{233}$$

并証明，只要实値 x 和 y 充分接近于零，它同样是收斂的。实际上，級数(233)各項的絕对値不超出从級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|(|x|+|y|)^n$$

所得到的二重級数的項。但是級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n \quad (r>0)$$

当 $r<R$ 时收斂，从此推出，級数(233)在条件：$|x|+|y|<R$ 之下絕对收斂。在这級数中我們可以分別聚集各項，因此得到級数(232)，也就是，級数(233)的和等于 $u(x, y)$。所以方程(231)的每个解在任一点的鄰域內表示为冪級数，只要所考慮的解在这一点沒有奇异性，簡單地說，就是方程(231)的每个解是 (x, y) 的解

析函数。从此立即推知，調和函数有各阶导数，且若两个調和函数在平面(x, y)的某二維部分上一致，那末它們到处符合。

要指出，对于双曲型方程：

$$u_{yy}-a^2u_{xx}=0, \tag{234}$$

我們有完全另外一种情况，式中a是已知实数。这方程有明显的解[II;164]：

$$u=\varphi(x+ay), \tag{235}$$

其中φ为有到二阶为止連續导数的函数。在实变数函数論中証明了，可以作出具有連續的一阶和二阶导数而对任何t值沒有三阶导数的函数。对这样的函数$\varphi(t)$，不論是怎样的(x, y)，解(234)沒有三阶导数，因此，自然不可能是(x, y)的解析函数。在方程(234)及公式(235)中，置$a=i$。此时$a^2=-1$，而方程(234)过渡为方程(231)，公式(235)給出它的以下形狀的解：$u=\varphi(x+yi)$。这个函数应有关于自己的变数的連續导数，在当前情形，变量是复素的。可是有連續导数的复变量函数就是解析函数。在解$u=\varphi(x+yi)$中分开实数部分，同样地得到方程(231)的解析的解。这个論断帶有表面性而并不严格，但是利用它非常簡單地說明了，我們以前所断定的方程(231)和(235)的解在性質上的那种区别的原因。

对方程(231)可以建立柯西問題。例如，可以求出方程(231)的解，如果在$x=0$时u和它的偏导数u_x是給定的：

$$u|_{x=0}=f_0(y); \quad u_x|_{x=0}=f_1(y), \tag{236}$$

其中$f_0(y)$与$f_1(y)$为y的已知解析函数[127]。这个問題在$x=0$的鄰域中將有一个确定的解。可是問題的这种提法，从物理学的观点看來是不自然的。我們还不知道有这样的物理問題是归結到方程(231)的柯西問題的。可用例子來証明，即使从数学的观点来看，所建立問題的解可能有本質上的缺点。假定說：

(237) $$f_0(y)=0 \quad 及 \quad f_1(y)=\frac{1}{n}\sin(ny),$$

其中 n 为給定的正数。不难驗証，方程 (231) 的满足这些初始条件的解为：

(238) $$u=\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{2n^2}\sin(ny)。$$

讓 $n\to\infty$。同时由于 $|\sin(ny)|\leqslant 1$，初始条件 $f_1(y)$ 关于 y 一致地趋向于零，而如果 $x\neq 0$，ny 不是 π 的倍数，解 (238) 就会趋向于無限大。实际上，假如 $x>0$，則 $e^{-nx}\to 0$，而当 $n\to\infty$ 时，比式 $e^{nx}/n^2\to\infty$，因为指数函数 e^{nx} 的增加比 n^2 快。这样一来，当初始条件趋向于零时，解本身無限增大。換句話說，我們从所举的例題看出，对于方程 (231)，柯西問題的解沒有对初始条件的連續相关性。对于双曲型方程，这种連續相关性总归是有的[**155**]。

对兩个自变量的情形，我們証过拉普拉斯方程的解的解析性。同样的事情也發生在三个自变量的場合：

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0。$$

来拟定这个断言的証明。設有这方程的解，在原点和它的鄰域內有到二阶为止的連續导数。因此函数 u 是中心在原点和半徑为 R 的某个閉球內的調和函数。我們能够按照下面的公式 [**II; 197**]，用这函数在球面 S 上各点 (ξ,η,ζ) 的值来表示函数在球內部任何点 (x,y,z) 的值：

(239) $$u(x,y,z)=$$
$$=\frac{1}{4\pi R}\iint_S u(\xi,\eta,\zeta)\,\frac{R^2-(x^2+y^2+z^2)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}\,dS。$$

当所有 x, y, z 充分接近于零时，利用牛頓二項公式，我們可以展开函数：

$$[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{-\frac{3}{2}}=$$
$$=R^{-3}\left[1+\frac{(x^2+y^2+z^2)-(2\xi x+2\eta y+2\zeta z)}{R^2}\right]^{-\frac{3}{2}}$$

为(x, y, z)的正整次幂的幂級数。同时积分(239)的整个被积函数表示为系数与(ξ, η, ζ)相关的这样的級数。沿S对这个級数逐項求积分，得到对于$u(x, y, z)$的幂級数。

按照类似的方法，可以証明，方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k^2 u=0 \tag{240}$$

的解也是变数(x, y)的解析函数，我們將在下一章說到它。

对于广泛的一类橢圓型方程，解的解析性的証明是在 C. H. 白恩斯坦的工作中給出的。

160. 普阿松方程的广义解 在三維的情形拉普拉斯方程的广义解应当按照关系式：

$$\iiint_D u\Delta\sigma d\tau=0 \tag{241}$$

定义，其中σ为在D內有到二阶为止連續导数以及在充分接近于D的境界的一切点处等于零的任何函数。来証明一个定理，它向我們指出，拉普拉斯方程的每个連續的广义解是拉普拉斯方程的通常解。

定理 若在D內部的連續函数$u(M)$满足关系(241)，那末这就是D內的調和函数。

預先証明簡單的引理。

引理 若在D內部的連續函数$u(M)$具有性質：它在D內任何点M_0之值等于它在以M_0为中心和充分小半徑的任意球面上的平均值，那末$u(M)$是D內的調和函数。

証明$u(M)$是以D內任何点M_0为中心的球內的調和函数就行了。取有充分小半徑的这种球C，且設$u_0(M)$是C內的調和函数，在C的境界上取和$u(M)$相同的值。差$u(M)-u_0(M)$在C內的每一点有引理中所說的平均性，因而按条件$u(M)$有这个性質，

而調和函数 $u_0(M)$ 也一样是有的。从这个平均性推出，所説的差在 C 的境界上到达最大値和最小値。但是它在这境界上的所有点等于零，于是 $u(M)$ 在 C 内部符合于調和函数 $u_0(M)$，这就証得引理。

轉到定理的証明。按照剛才証明的引理，我們証明，从(241)推出 $u(M)$ 在每一点 M_0 滿足引理中所說的平均性就够了。設 D_ε 是中心 M_0 和半徑 ε 而落在 D 内部的球。作函数：

$$\sigma(M)=\begin{cases}(r^2-\varepsilon^2)^3 & \text{若 } r\leqslant\varepsilon\text{，即 } M \text{ 屬于 } D_\varepsilon;\\ 0 & \text{若 } r>\varepsilon\text{，即 } M \text{ 在 } D_\varepsilon \text{ 外面，}\end{cases}$$

其中 $r=|M_0M|$。

这个函数满足我們上面对 $\sigma(M)$ 所加的那些要求。我們有：

$$\frac{1}{6}\Delta\sigma(M)=\begin{cases}7r^4-10\varepsilon^2r^2+3\varepsilon^4 & \text{当 } r\leqslant\varepsilon;\\ 0 & \text{当 } r>\varepsilon,\end{cases}$$

并且公式(241)給出：

$$\iiint\limits_{r\leqslant\varepsilon} u(M)(7r^4-10\varepsilon^2r^2+3\varepsilon^4)\,d\tau=0。$$

关于 ε 微分这个等式。我們必須同时不仅关于 ε 微分被积函数，并且要添上沿球面 $r=\varepsilon$ 的二重积分[II;171]。可是当 $r=\varepsilon$，被积函数成为零，而我們得到：

$$\iiint\limits_{r\leqslant\varepsilon} u(M)(12\varepsilon^3-20\varepsilon r^2)\,d\tau=0。$$

关于 ε 再微分一次，得：

$$\varepsilon\iint\limits_{r=\varepsilon} u(M)\,dS-3\iiint\limits_{r\leqslant\varepsilon} u(M)\,d\tau=0。$$

这个等式可以改写为：

$$4\pi\varepsilon^2\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint\limits_{r=\varepsilon} u(M)\,dS\right]-3\iiint\limits_{r\leqslant\varepsilon} u(M)\,d\tau=0。$$

关于 ε 再一次微分，得：

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint\limits_{r=\varepsilon} u(M)dS\right]=0,$$

于是可見，在方括弧中沿球面的平均值与球的半徑無关，就是說，

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint\limits_{r=\varepsilon} u(M)dS=C。$$

令 ε 趋向于零，我們看出，常数 C 等于 $u(M_0)$，就是說，$u(M)$ 确实有引理中所說的平均性，而定理得証。

因此，不可能存在拉普拉斯方程的异于通常解的連續广义解。但是，例如，若函数 $f(M)$ 沒有足够好的性質，可以存在普阿松方程：

$$\Delta u(M)=f(M) \tag{242}$$

的广义解，它在以前关于 σ 的条件下，由关系式

$$\iiint\limits_D u\Delta\sigma d\tau=\iiint\limits_D f\sigma d\tau \tag{243}$$

所定义。譬如，假定說，$f(M)$ 在閉区域 $\overline{D}$ 上連續但是沒有导数。我們自然可以开拓 $f(M)$ 到整个空間而保持連續性。設 $F_n(x, y, z)$ 是对于 $f(M)$ 的平均函数。它們在閉区域 $\overline{D}$ 上一致趋向于 $f(M)$。

我們証明牛頓勢量

$$u(x, y, z)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{r}d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{244}$$

$$\left(r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right)$$

适合关系 (243)，即为普阿松方程的广义解。同时它可以沒有二阶导数[II;200]。作出勢量：

$$u_n(x, y, z)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D \frac{F_n(\xi, \eta, \zeta)}{r}d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{245}$$

它們在 D 的內部滿足方程 $\Delta u_n(x, y, z)=F_n(x, y, z)$。写出格林公式：

$$\iiint_D (u_n \Delta\sigma - \sigma \Delta u_n)\,d\tau = 0,$$

并且我們注意到 σ 在充分接近于 D 的境界各点等于零的事实。于是推出：

$$\iiint_D u_n \Delta\sigma\, d\tau = \iiint_D F_n \sigma\, d\tau。$$

过渡到極限，不难驗証，我們就得到关系式 (243)，其中 u 由公式 (244) 确定。抛物型方程一般性質的研究，要在关于边值問題的一章中进行。仅仅指出，像对于拉普拉斯方程一样，可以証明，齐次的热傳导方程的每一广义解有連續导数并且是在通常說法意义下的解[С. Л. 索伯列夫"数学物理方程" 1950，314 頁]。

§ 3. 方程組

161. 方程組的特征　我們現在轉到偏微分方程組的研究。在解析的情形关于柯西問題解的存在性与唯一性問題，我們以前已經說过了 [**126**]。在非解析的情形，这个問題就比一个方程时困难得多。在这方面很一般的結果已經由 И. Г. 彼得罗夫斯基在他的以下的工作中得到："对于偏微分方程組的柯西問題"(数学彙刊，II 卷 5 期，1937) 及"关于非解析函数域中的綫性偏微分方程組的柯西問題"(莫斯科大学通报，1938) ["О проблеме Коши для систем уравнений с частными производными" (Математический сборник, т. II, вып. 5, 1937 г.) и "О проблеме Коши для системы линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций" (Бюллетень Московского Университета,

1938 г.)]。某些有关于此的結果叙述在 И. Г. 彼得罗夫斯基的"偏微分方程講义"中。在那里也指出了問題的文献和結果的概括。

对于方程組我們限于不多的几个方面，而从特征論以及与这一理論相联系的关于間断解問題的叙述开始。

考虑方程組：

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ij}^{(k)}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\overline{\Phi}_i(x_k, u_s)=0 \tag{1}$$

$$(i=1, 2, \cdots, m)。$$

由于这組是一阶方程組，柯西条件成为在空間 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的已知曲面上給定函数 $u_s(x_1, \cdots, x_n)$ 的初始值。假定說，帶有这些条件的曲面是平面 $x_1=0$，就是說，我們有特殊的柯西条件：

$$u_j|_{x_1=0}=\varphi_j(x_2, \cdots, x_n) \quad (j=1, \cdots, m)。 \tag{2}$$

这些初始条件給出在平面上計算除导数 $\frac{\partial u_j}{\partial x_1}$ 以外的所有一阶导数的可能性。若方程組(1)在 $x_1=0$ 以及其他的初始条件代入之后，关于 $\frac{\partial u_j}{\partial x_1}$ 可以解出，則在 $x_1=0$ 上我們有了一切的一阶导数。不然的話，就称平面 $x_1=0$ 为特征的。一般的，某曲面

$$\omega_1(x_1, \cdots, x_n)=0 \tag{3}$$

連同确定在它上面的初始条件称为特征的，如果这些初始条件和方程組(1)一起，并不給出在它上面所有一阶导数單值确定的可能性。当系数 $a_{ij}^{(k)}$ 只包含 x_s 的情形，知道曲面(3)上函数 u_j 的初始值对我們并不重要。为了得到特征曲面(3)所必須滿足条件，可以像在[138]中一样，替代 x_k 按照公式

$$x_k'=\omega_k(x_1, \cdots, x_n) \quad (k=1, \cdots, n) \tag{4}$$

引进新自变量 x_k'，式中 $(n-1)$ 个函数 $\omega_2, \cdots, \omega_n$ 这样来选取，使得所写公式关于 x_k 能够解出。用关于新变量的导数来表示关于

原来变量的导数，我們得到：

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x'_s}\frac{\partial \omega_s}{\partial x_k}。$$

把这些表达式代入方程組（1），并且只写出包含导数 $\frac{\partial u_j}{\partial x'_1}$ 的那些項：

$$(1_1)\qquad \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ij}^{(k)}\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x'_1}+\cdots=0\quad (i=1,\ \cdots,\ m)。$$

对新变量，我們有特殊形狀的柯西条件，也就是这些条件是关于平面 $x'_1=0$ 的。假如后面的方程組不能确定导数 $\frac{\partial u_j}{\partial x'_1}$，就是說，如果由 $\frac{\partial u_j}{\partial x'_1}$ 的系数構成的行列式等于零，这平面就是特征的。为了簡略起見，引用記号：

$$(5)\qquad \omega_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ij}^{(k)}\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k},$$

我們得到方程組（1）的每个特征曲面所必須滿足的以下的一阶方程：

$$(6)\qquad |\omega_{ij}|=\begin{vmatrix}\omega_{11}, & \omega_{12}, & \cdots, & \omega_{1m}\\ \omega_{21}, & \omega_{22}, & \cdots, & \omega_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \omega_{m1}, & \omega_{m2}, & \cdots, & \omega_{mm}\end{vmatrix}=0。$$

这一阶方程关于导数 $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$ 是 m 次。它完全类似于[138]中的方程(53)。

方程（6）应当由于（3）而滿足。如果我們要求它是恒滿足，就是說，若我們設想它是函数 $\omega_1(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 的通常的一阶方程，那末我們就有方程組（1）的特征曲面族 $\omega_1(x_1,\ \cdots,\ x_n)=C$。可以証明（参看[101]），每一特征曲面能包含在这样的族中。

如果函数 $\omega_1(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 使方程（6）的左边在曲面 $\omega_1=0$ 上

异于零，那末作变数变换(4)，我們可以关于 $\frac{\partial u_j}{\partial x_1'}$ 解变后方程組 (1_1)。

若在方程(6)的左边改 $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$ 为 α_k，那末就得到对于向量 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 的分量的 m 次方程，这向量在每一点确定特征法綫方向。在特征曲面的每一点，法綫有特征方向。

完全类似地，我們也可以考察二阶方程組：

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} + \cdots = 0, \tag{7}$$

而且我們照例可以假設 $a_{ij}^{kl} = a_{ij}^{lk}$。如果我們有在超平面 $x_1 = 0$ 上的特殊柯西条件：

$$u_j \Big|_{x_1=0} = \varphi_j(x_2, \cdots, x_n); \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} =$$
$$= \psi_j(x_2, \cdots, x_n) \quad (j=1, \cdots, m),$$

那末我們可以知道在这超平面上的所有一阶导数和除 $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2}$ 以外的所有二阶导数。把初始条件代到方程組的系数中去，并且把由 $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2}$ 的系数所作的行列式等于零，我們得到超平面 $x_1 = 0$ 是特征曲面的条件。在一般情形，函数本身和它的一阶导数在曲面(3)上給定，而我們应当求出方程組(7)連同初始条件不能使一阶导数單值确定的条件。仍旧按公式(4)引入新变量 x_k' 以替代 x_k。原来变量的导数用新变量的导数表示的式子为：

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u_j}{\partial x_1'} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} + \cdots$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1'^2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_l} + \cdots。$$

代入(7)并且只写出包含 $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1'^2}$ 的項，我們得到在新自变量下的方程組：

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{n}a_{ij}^{kl}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_l}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1'^2}+\cdots=0。$$

在新变量下初始条件是关于平面 $x_1'=0$ 的，面我們必須写出最后方程組不能單值确定导数 $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1'^2}$ 的条件。和上面相类似，来引用記号：

(8)
$$\omega_{ij}'=\sum_{k,l=1}^{n}a_{ij}^{kl}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_l},$$

我們可以写这条件为形狀：

(9)
$$|\omega_{ij}'|=\begin{vmatrix}\omega_{11}', & \omega_{12}', & \cdots, & \omega_{1m}'\\ \omega_{21}', & \omega_{22}', & \cdots, & \omega_{2m}'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \omega_{m1}', & \omega_{m2}', & \cdots, & \omega_{mm}'\end{vmatrix}=0。$$

这一阶方程的左边是关于导数 $\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}$ 的齐 $2m$ 次多項式。

回到一阶方程組。若在方程(6)的左边改 $\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}$ 为 α_k，那末我們得到方程：

(10)
$$\bar{\Phi}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=0,$$

其中 $\bar{\Phi}$ 是系数与 $(x_1,\cdots,x_n)$ 相关的关于变量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的 m 次齐次多項式。若在空間 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的某区域 D 内，方程(10)的左边只在 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$ 时成为零，就說方程組(1)在区域 D 中是椭圓型的。类似的也对方程組(7)定义椭圓型。双曲型的术語在几种不同的意义下应用于方程組。我們还要回来講对两个自变量情形的这个問題。若在某一点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 或在某一区域 D 内，能用变量 α_n 的适当的綫性变换把齐次多項式 $\Phi(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 化为較少的变量，那末就說方程組(1)在所提到的点或区域为抛物型退化的。

若方程組(1)的系数 $a_{ij}^{(k)}$ 含有函数 u_j(拟綫性方程組)，那末，

把在曲面 $\omega_1=0$ 上任意給定的函数 u_j 代到这些系数中去，我們可以作方程（6），而解决曲面 $\omega_1=0$ 是否为特征的問題。类似的附語对方程組（7）也有，只要它的系数中包含函数 u_j 和它們的一阶偏导数[参看 **128**]。要指出，方程組（7）可以化为一阶方程組，如果引入 mn 个新函数：

$$(10_1) \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_k}=w_{jk} \quad \begin{pmatrix} j=1, \cdots, m \\ k=1, \cdots, n \end{pmatrix}$$

的話。將变换 (10_1) 施行于方程（7），我們得到关于 $(m+mn)$ 个函数 u_j 与 w_{jk} 的 m 个一阶方程。对这些方程再添上 mn 个方程 (10_1)。

162. 运动学的相容条件 为了进一步討論，我們必須証明一个关于沿曲面函数的微分法的命题。为具备更多的几何直观性起見，我們將对三个自变量的情形来証明这个引理。

設函数 $f(x_1, x_2, x_3)$ 从某曲面 S：

$$\psi(x_1, x_2, x_3)=0$$

的一侧直到 S 为連續，并假定它的一阶偏导数在 S 所提到的一侧也是連續的，而在 S 上有确定的極限值 f_{x_i}。若从曲面的同一侧給定某曲綫 l: $x_i=x_i(t)$ $(i=1, 2, 3)$，其中 $x_i(t)$ 关于 t 有連續导数，那末沿 l 函数 f 是 t 的函数，并且我們有：

$$(11) \qquad \frac{df}{dt}=\sum_{k=1}^{3} f_{x_k} x_k'(t)。$$

引理 若 l 在 S 上，公式(11)成立。

我們能假設曲綫 l 充分小。設 N_1 和 N_2 为其端点，而 N 是 l 上的动点。通过 N 引直綫平行于曲面在点 N_1 的法綫 n_1，而法綫指向函数 f 有定义的那一侧，又在每一这样的直綫上，取同样長度 δ 的一段 NN'。我們假設这綫段的端点 N' 構成某曲綫 l'，它不自相交而落在函数 f 的定义区域內。这曲綫上的点有坐标：

$\xi_i=x_i(t)+\delta\cos(n_1, x_i)$。沿 l' 我們应用公式(11)：

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{l'}=\sum_{k=1}^{3} f_{x_k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)x_k'(t)。$$

关于 t 在从对应于 N_1 的值 t_1 到变动的 t 的范圍上积分兩边：

$$f(t)\,|_{l'}-f(t_1)\,|_{l'}=\int_{t_1}^{t}\sum_{k=1}^{3} f_{x_k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)x_k'(t)\,dt,$$

其中左边的 $f(t_1)$ 和 $f(t)$ 为 f 在 l' 上对应于所指值 t 的点处之值。按条件 f 与 f_{x_k} 直到 S 連續，因此右边的被积函数是參数 δ 的均匀連續函数。在最后的公式当 $\delta\to 0$ 取極限，得到

$$f(t)-f(t_1)=\int_{t_1}^{t}\sum_{k=1}^{3} f_{x_k}[x_1(t), x_2(t), x_3(t)]x_k'(t)\,dt,$$

其中左边是 f 在 l 上的值。关于 t 微分兩边，即得公式(11)。所証的引理我們不仅在这一段要用，在下一章也是需要的。

轉到任意个数变量的情形，并且現在假定某函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 当通过曲面 S：

$$\psi(x_1, \cdots, x_n)=0 \tag{12}$$

时为連續，而它的一阶偏导数从曲面的每一側有确定的極限，但是在曲面的不同側这些極限不同，簡單地說，就是函数 f 的一阶导数在曲面 (12) 上有第一类的間斷。我們称曲面的兩側为正側和負側。为了标出在正側所得到的極限，我們在对应量上附以記号 $(+)$，而对負側用記号 $(-)$。例如，在通过 S 时 f 为連續的条件可写成形狀 $f^+=f^-$。在考察中引进一阶导数的躍度：

$$[f_{x_k}]=f^+_{x_k}-f^-_{x_k}。$$

沿落在曲面(12)上的每一曲綫，按条件 f^+ 与 f^- 一致。因此，应用引理，得：

$$\sum_{k=1}^{n} f^+_{x_k}dx_k=\sum_{k=1}^{n} f^-_{x_k}dx_k \qquad (\text{在} S \text{上})。\tag{13}$$

在曲面 S 上变量 x_k 不能看为独立的。例如，若曲面的方程是显式

确定的，则坐标之一是其余坐标的函数，后面这些坐标已經能看做自变量。

我們可以改写前面的公式为形狀：

$$\sum_{k=1}^{n}[f_{x_k}]dx_k=0。$$

此外我們有：

$$\sum_{k=1}^{n}\psi_{x_k}dx_k=0。$$

用待定的乘数 h 来乘最后的等式，并从前一式来减：

$$\sum_{k=1}^{n}\{[f_{x_k}]-h\psi_{x_k}\}\,dx_k=0。$$

現在确定 h，使因变量微分的系数变为零。剩下的自变量微分的系数显然必須等于零[I;167]，因此，得到下面的 n 个等式：

$$[f_{x_k}]=h\psi_{x_k},\tag{14}$$

就是說，一阶导数的躍度应当和 (12) 的左边关于相应变量的偏导数成比例。所写的条件通常称为运动学的相容条件。

現在考察当通过曲面 (12) 时，函数 f 本身和它的一阶导数保持連續，而二阶导数受到連續性間断的那种情形。我們把上面的討論应用到每个函数 f_{x_k}。每个这样的函数在运动学的相容条件中將有自己的比例系数 h_k，而且函数 f_{x_k} 关于每个变量 x_l 导数的躍度必須和 ψ_{x_l} 成比例，就是說，对于二阶导数的躍度，我們將有以下的等式：

$$[f_{x_kx_l}]=f^{+}_{x_kx_l}-f^{-}_{x_kx_l}=h_k\psi_{x_l}。$$

注意到，不論在曲面的正側和負側，微分的結果和微分順序是無关的，我們能写出 $h_k\psi_{x_l}=h_l\psi_{x_k}$，即 $\dfrac{h_k}{\psi_{x_k}}=\dfrac{h_l}{\psi_{x_l}}$。换句話說，比 $h_k:\psi_{x_k}$ 不应当和标数 k 有关。置 $h_k:\psi_{x_k}=h$，我們終于改变最后的公式为形狀：

$$[f_{x_kx_l}]=h\psi_{x_k}\psi_{x_l}。\tag{15}$$

这些公式給出二阶間断的运动学的相容条件，即二阶导数間断的情形的运动学的相容条件。

163. 动力学的相容条件 回到一阶方程組（1），幷假定曲面（3）是所写的方程組的特征曲面，而且某个解 u 在这曲面上有弱性間断，就是說，u 自身連續，也許是一阶导数就有間断。設 u^+ 为从曲面正側的連續解，而 u^- 为从曲面負側的連續解，它們相合于 u。我們能对 u^+ 和 u^- 写出方程組（1）。取这些方程在曲面（3）本身上的差。这时，当通过曲面时諸項 Φ_i 連續而在相減时消去。我們因此得到一阶导数的躍度所必須滿足的以下的 m 个方程：

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{(k)}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right]=0 \quad (i=1, \cdots, m)。\tag{16}$$

在推导这些条件时，我們主要是利用方程組（1）本身，它通常描述某种物理过程；对躍度所得的条件称为*动力学的相容条件*。在运动学的相容条件(14)中，函数 u_j 的每一个有自己的比例系数 h_j：

$$\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right]=h_j\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \quad (j=1, 2, \cdots, m)。\tag{17}$$

把这些表达式代入条件(16)，幷注意到記号（5），我們得到关于系数 h_j 的 m 个齐一次方程的方程組：

$$\sum_{j=1}^{m}\omega_{ij}h_j=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, m)。\tag{18}$$

从特征曲面的方程(6)立即推出，这方程組的行列式等于零，因此，我們能得到方程組异于零的解。在一般情形，当方程組(18)的系数矩陣的秩等于$(m-1)$时，这方程組的通解除任意常因子而外完全确定，这因子在确定間断特性时不起重要作用。

現在来考慮二阶方程組（7）。在这情况下，具有弱性間断的解就是函数本身和它的一阶导数为連續的解。完全同上面一样，我們得到对二阶导数的躍度的动力学的相容条件：

$$(19)\qquad \sum_{j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl}\left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l}\right]=0。$$

每一函数 u_j 在运动学的相容条件中，將有自己的比例系数 h_j：

$$(20)\qquad \left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l}\right]=h_j\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}\frac{\partial \omega_1}{\partial x_l}。$$

把这些表达式代入条件(19)且利用記号(8)，仍然得到关于乘数 h_j 的齐次方程組：

$$(21)\qquad \sum_{j=1}^{m}\omega_{ij}' h_j=0,$$

它的行列式由于(9)而等于零。

164. 流体动力学方程 我們应用特征論到流体动力学方程的情形去。用 (u_1, u_2, u_3) 記速度向量的分量，p 記压力，ρ 記密度，并以 f_1, f_2, f_3 記在單位質量上所計算的外力的分量。时間 t 和空間的坐标 x_1, x_2, x_3 为自变量。我們就有三个尤拉方程：

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}u_k+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}=f_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

和連續性方程 [II; 114, 115]：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \rho}{\partial x_k}u_k+\rho\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0。$$

假設流体是可压縮的，且假定物态方程由压力和密度的相关性 $p=p(\rho)$ 确定，其中 $p(\rho)$ 为已知函数。終于有关于自变量 x_1, x_2, x_3, t 的函数 u_1, u_2, u_3, ρ 的四个一阶方程：

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}u_k+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}=f_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

$$\rho\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \rho}{\partial x_k}u_k=0。$$

由公式(5)确定的量 ω_{ij} 在目前情形下將有形狀：

$$\omega_{12}=\omega_{21}=\omega_{13}=\omega_{31}=\omega_{23}=\omega_{32}=0;$$

$$\omega_{ii}=\frac{d\omega_1}{dt}=\frac{\partial \omega_1}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}u_k \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$$\omega_{i4}=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i};\qquad \omega_{4i}=\rho\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \qquad (i\neq 4),$$

和从前一样其中 ω_1 是特征曲面方程

(22) $$\omega_1(x_1, x_2, x_3, t)=0$$

的左边。正如从前，用 g^2 来記和式：

$$g^2=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}\right)^2。$$

特征曲面(22)所必須滿足的一阶方程(6)，在当前情况下將有形狀：

$$\begin{vmatrix} \frac{d\omega_1}{dt}, & 0, & 0, & \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} \\ 0, & \frac{d\omega_1}{dt}, & 0, & \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2} \\ 0, & 0, & \frac{d\omega_1}{dt}, & \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3} \\ \rho\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}, & \rho\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}, & \rho\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3}, & \frac{d\omega_1}{dt} \end{vmatrix}=0$$

$$\left(\frac{d\omega_1}{dt}=\frac{\partial\omega_1}{\partial t}+\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}u_1+\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}u_2+\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3}u_3\right)。$$

展开这行列式，得到：

(23) $$\left(\frac{d\omega_1}{dt}\right)^2\left[\left(\frac{d\omega_1}{dt}\right)^2-g^2\frac{dp}{d\rho}\right]=0。$$

曲面(22)在曲面法綫方向的移动速度 P，如所知道的，由[141]中公式(75)确定。在每一給定的时刻，曲面(22)要經过流体某些小部分。設 u_n 为在所說曲面上流体小部分的速度在对应点的曲面法綫上的分量。注意到，$\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}:g$ 是所提到的法綫(在 $\omega_1>0$ 的一側)的方向余弦，我們有：

$$u_n=\frac{1}{g}\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}。$$

曲面移动速度相对于流体小部分的移动速度表出的差式 $P-u_n$，通常称为波的傳播速度。对于这个速度，我們有以下的表达式：

$$V=P-u_n=-\frac{1}{g}\frac{\partial\omega_1}{\partial t}-\frac{1}{g}\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k},$$

或

(24) $$V=-\frac{1}{g}\frac{d\omega_1}{dt}。$$

特征曲面的微分方程(23)等价于兩个方程：

(25) $$V^2=0;\quad V^2=\frac{dp}{d\rho}。$$

这前一个方程对应于稳定的間断情形，以后我們只考虑第二个方程。公式

(25)所确定的速度 V 是声速：

(26) $$V=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}。$$

現在利用运动学的和动力学的相容条件来确定間断的特性。用 h_k 来記出現在公式(17)中函数 u_k 的間断系数，及以 r 記函数 ρ 的相当系数。在这情形下，方程(18)可写为形狀：

$$\frac{d\omega_1}{dt}h_k+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}r=0 \quad (k=1,\ 2,\ 3),$$

或者，注意到(24)和(25)：

$$-gh_k+\frac{1}{\rho}V\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}r=0,$$

即

(27) $$h_k=\frac{rV}{\rho}\cos\alpha_k,$$

式中 $\cos\alpha_k$ 是間断曲面的法綫的方向余弦。把 $(h_1,\ h_2,\ h_3)$ 看成是某向量 $\boldsymbol{h}$（速度导数的間断向量）的分量。上面的公式可以写成下面的向量形式：

$$\boldsymbol{h}=\frac{rV}{\rho}\boldsymbol{n},$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是間断曲面的單位法綫向量。因此，我們看到，速度导数的間断向量指向間断曲面的法綫(縱波)。

加速度向量的分量 w_i 由公式：

$$w_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}u_k \quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

表示，并且当通过曲面时有間断。假定在曲面的一側，我們有靜态。由于速度本身的連續性，从兩側到曲面上的極限值等于零，而速度的导数在曲面上有等于躍度之值，因为在到曲面之前我們有靜态，这些导数等于零。关于加速度向量的分量能够同样地来談到。这些分量的躍度，由于(27)和(24)而按下面的等式确定：

$$[w_i]=h_i\frac{\partial\omega_1}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}h_iu_k\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}=h_i\frac{d\omega_1}{dt}=-\frac{rgV^2}{\rho}\cos\alpha_i,$$

或者在向量形式下：

$$[\boldsymbol{w}]=-\frac{rgV^2}{\rho}\boldsymbol{n}。$$

在上述条件下，这公式將給出在間断曲面上的加速度向量。

現在考慮所謂穩定的情况，就是当函数 u_k 及 ρ 与 t 無关的那种情况。

假設 ω_1 也与 t 無关，將有 $P=0$ 和 $V=-u_n$。假定說，在某区域內流体流动速度小于声速 (26)。此时更不待說 $|u_n|<\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$，而等式 $V=-u_n$ 不可能。因此，我們看到，当不到声速时，我們不可能有在穩定情况下的間断傳播。

165. 彈性学方程　作为应用特征論到二阶方程組的例子，考虑在均匀的各向同性介質的最簡單情形的彈性学方程。以 (u_1, u_2, u_3) 記位移向量的分量，并以 λ 和 μ 記彈性物体的普通常数。彈性学的基本方程是下面的对于自变量 (x_1, x_2, x_3, t) 的函数 (u_1, u_2, u_3) 的三个二阶方程的方程組：

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\mu\Delta u_i-\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}+\cdots=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3)。$$

在这情形下，我們將有：

$$\omega'_{ij}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_j}+\delta_{ij}\left[\mu\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}\right)^2-\rho\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial t}\right)^2\right] \quad \begin{matrix}(i,\ j=1,\ 2,\ 3)\\ \left(\delta_{ij}=\begin{matrix}0,\ i\neq j\\ 1,\ i=j\end{matrix}\right)\end{matrix}。 \tag{28}$$

在展开所对应的行列式以后，方程(9)此刻將有形狀：

$$\left[(\lambda+2\mu)g^2-\rho\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial t}\right)^2\right]\left[\mu g^2-\rho\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial t}\right)^2\right]^2=0。 \tag{29}$$

由于[141]中公式 (75)，这方程使我們有間断曲面的以下兩种可能的移动速度：

$$P_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}};\quad P_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}。$$

在这情形下，形变假設为很小，并且單独地說傳播速度也就是关于介質小部分的移动速度是沒有意义的。

現在考察間断的特性。引进函数 u_j 的二阶导数的間断系数 h_j：

$$\left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\,\partial x_k}\right]=h_j\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}。 \tag{30}$$

由于(28)，方程(21)在目前情况下有形狀：

$$\left[\mu g^2-\rho\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial t}\right)^2\right]h_i+(\lambda+\mu)\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_j}h_j=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3)。$$

注意到，
$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}=g\cos(n,x_k) \qquad (k=1,\ 2,\ 3),$$

其中 n 为曲面(3)的法綫方向，我們可以改写上面的方程为形狀：

$$\left[\mu g^2-\rho\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial t}\right)^2\right]h_i+(\lambda+\mu)g^2\cos(n,\ x_i)\sum_{j=1}^{3}\cos(n,\ x_j)h_j=0。$$

引进分量为(h_1, h_2, h_3)的向量 $\boldsymbol{h}$。上面的方程可以写成形狀：

$$\left[\mu g^2-\rho\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial t}\right)^2\right]h_i+(\lambda+\mu)g^2\cos(n, x_i)h_n=0,$$

其中 h_n 是向量 $\boldsymbol{h}$ 在曲面(3)的法綫 n 上投影的大小，或者在向量形式下：

$$\left[\mu g^2-\rho\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial t}\right)^2\right]\boldsymbol{h}+(\lambda+\mu)g^2h_n\boldsymbol{n}=0, \tag{31}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面(3)的單位法綫向量。如果我們取移动速度 P_2，那末 $\boldsymbol{h}$ 的系数等于零，因而必有 $h_n=0$，就是說，向量 $\boldsymbol{h}$ 必須落在曲面(3)的切平面上(横波)。如果我們却是取了速度 P_1，則从(31)立即推出 $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 只有数因子相差，就是說，$\boldsymbol{h}$ 应当指向曲面(3)的法綫(縱波)。还要指出，方程(29)中給出横波速度的因子是一平方。这个情况在下一节得到解釋，在那里我們將考虑关于各向异性介質的彈性学方程。

要解釋向量 $\boldsymbol{h}$ 的力学意义。假定說，沿弱性間断曲面 $S:\omega_1(x_1,x_2,x_3,t)=$ $=0$ 的一側有靜态，即 $u_j(j=1, 2, 3)$ 等于零。在曲面 S 上各点 u_j 和它們的一阶导数同样等于零。u_j 在 S 上的从有移动的一側的二阶导数之值將由公式(30)确定，因为从曲面的另一側，这些导数恒等于零，就是說，

$$\left.\frac{\partial^2u_j}{\partial x_i\,\partial x_k}\right|_S=h_j\left.\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}\right|_S\quad(i, k=0, 1, 2, 3),$$

而我們設 $x_0=t$。在曲面 S 上取某一点 M，并且把它当作空間 (x_0,x_1,x_2,x_3) 的坐标原点。在 M 点的鄰域內展开 u_j 为麦克劳林級数，把展开式作到二次项。注意到上面的公式以及 u_j 同它的一阶偏导数在 M 点成为零的事实，我們得到近似等式：

$$u_j\sim\frac{h_j}{2}\sum_{i,k=0}^{3}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\right)_0\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}\right)_0x_ix_k,$$

而标数零表明导数之值必須取在 M 点。

注意到函数 ω_1 在 M 点成为零，得着以下的取到一次项为止的麦克劳林展开式：

$$\omega_1\sim\sum_{i=0}^{3}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\right)_0x_i,$$

面前面的公式可改写为形狀：

$$\boldsymbol{u}\sim\frac{\boldsymbol{h}}{2}\,\omega_1^2(x_0, x_1, x_2, x_3)。$$

这个关于位移向量 $\boldsymbol{u}$ 的近似等式將在有移动的一側接近間断曲面成立。

166. 各向异性彈性体 在討論中引进形变張量的分量，少許变动 [94]

中記号

$$\varepsilon_i=\frac{\partial u_i}{\partial x_i};\quad \gamma_1=\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3};\quad \gamma_2=\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1};\quad \gamma_3=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

$$(i=1,\ 2,\ 3)。$$

在有三个相互正交对称平面的各向异性的物体情形，單位体积所受形变力的功由形变張量的分量表达为以下的齐二次多項式的形狀：

$$A=\frac{1}{2}(a\varepsilon_1^2+b\varepsilon_2^2+c\varepsilon_3^2+2a'\varepsilon_2\varepsilon_3+2b'\varepsilon_3\varepsilon_1+2c'\varepsilon_1\varepsilon_2+a''\gamma_1^2+$$

$$+b''\gamma_2^2+c''\gamma_3^2),$$

其中 $a,\ b,\ \cdots,\ c''$ 是 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$ 的函数，或者在均匀介質的情形为常数。在出現慣性力时，[94]中方程可以写为形狀：

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_2}\right)-\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+X_1=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_1}\right)-\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+X_2=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_3}\right)-\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}+X_3=0。$$

把 A 的表达式代入，即得下面的方程：

$$a\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+c''\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+b''\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}+$$

$$+(c'+c'')\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}+(b'+b'')\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3}-\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\cdots=0$$

$$c''\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+b\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+a''\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}+$$

$$+(c'+c'')\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+(a'+a'')\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\partial x_3}-\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\cdots=0$$

$$b''\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+a''\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}+c\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+$$

$$+(b'+b'')\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_3}+(a'+a'')\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial x_3}-\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}+\cdots=0。$$

为了省写而引用記号：

$$p_0=\frac{\partial \omega_1}{\partial t};\quad p_i=\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}\quad (i=1,\ 2,\ 3),\tag{32}$$

我們可以写 ω'_{ij} 为形狀：

$$\omega'_{11}=ap_1^2+c''p_2^2+b''p_3^2-\rho p_0^2;\quad \omega'_{12}=(c'+c'')p_1p_2;\quad \omega'_{13}=(b'+b'')p_1p_3;$$

$$\omega'_{21}=(c'+c'')p_1p_2;\quad \omega'_{22}=c''p_1^2+bp_2^2+a''p_3^2-\rho p_0^2;\quad \omega'_{23}=(a'+a'')p_2p_3;$$

$\omega'_{21}=(b'+b'')p_3p_1$; $\omega'_{32}=(a'+a'')p_2p_3$;

$$\omega'_{33}=b''p_1^2+a''p_2^2+cp_3^2-\rho p_0^2。$$

不难看出，确定特征曲面的一阶方程(9)和关于 $\lambda=\rho p_0^2$ 的基本方程相符合，它是用来化椭圓面：

$$(33)\qquad (ap_1^2+c''p_2^2+b''p_3^2)\xi_1^2+(c''p_1^2+bp_2^2+a''p_3^2)\xi_2^2+$$
$$+(b''p_1^2+a''p_2^2+cp_3^2)\xi_3^2+2(a'+a'')p_2p_3\xi_2\xi_3+$$
$$+2(b'+b'')p_3p_1\xi_3\xi_1+2(c'+c'')p_1p_2\xi_1\xi_2=1$$

到对称軸的[III₁;32,33]。要指出，所写的方程能从表达式 $2A$ 得到，只要在其中，置：$\varepsilon_k=p_k\xi_k$；$\gamma_1=p_2\xi_3+p_3\xi_2$；$\gamma_2=p_3\xi_1+p_1\xi_3$；$\gamma_3=p_1\xi_2+p_2\xi_1$，所以它是关于 ξ_s 的正定二次形式(因为 $A>0$)，由此推知，方程 (33) 确实对应于椭圓面。对 λ 解出上述方程，我們在物体的每一点得到 p_0^2 的三个正根，而且 p_0^2 是 p_1, p_2, p_3 的齐二次函数。若是方程(33)的兩边以 g^2 来除，那末 p_k 换为 $\cos\alpha_k$，其中 $\cos\alpha_k$ 是波面的法綫方向余弦，并且所得的根 p_0^2 换为 P^2。因此，在每一点对任意固定的方向，我們將有波的三种可能的移动速度。

間断向量的分量 (h_1, h_2, h_3) 將从确定椭圓面(33)的对称軸方向的齐次方程組得到。因此当給了确定方向时，在每一点我們有相应于三种移动速度的三个相互正交的間断向量，为了有縱波和橫波起見，必要而充分的是椭圓面軸之一指向相应的波的法綫。如果这个已經滿足，那末我們將有一个縱波和兩个橫波，而我們假設在固定了方向时，所說的三次方程有不同的根。如我們見过的，在均匀的各向同性的介質情形，一个根將是二重的。波的法綫的方向余弦和 p_1, p_2, p_3 成比例，且由此推知，上述条件等价于：对某个根 $\lambda=\rho p_0^2$，在任意选取 p_k，也就是在任意选取方向时，量 (h_1,h_2,h_3) 必須和 (p_1, p_2, p_3) 成比例。在对于 h_k 的齐次方程組中，換这些量以成比例的量 p_k，我們得到：

$$(34)\qquad \begin{cases}(ap_1^2+c''p_2^2+b''p_3^2-\rho p_0^2)p_1+(c'+c'')p_1p_2^2+(b'+b'')p_1p_3^2=0\\ (c'+c'')p_1^2p_2+(c''p_1^2+bp_2^2+a''p_3^2-\rho p_0^2)p_2+(a'+a'')p_2p_3^2=0\\ (b'+b'')p_1^2p_3+(a'+a'')p_2^2p_3+(b''p_1^2+a''p_2^2+cp_3^2-\rho p_0^2)p_3=0。\end{cases}$$

如果我們注意到，在任意选取 p_1, p_2, p_3 时，我們应当从(34)的三个方程得到同样的 ρp_0^2 之値，那末我們得到对于彈性位能 A 的系數的以下的条件：

$$(35)\qquad a=b=c=a'+2a''=b'+2b''=c'+2c'',$$

并且所写的三个方程給出：$\rho p_0^2=ag^2$，就是說，我們得到对于縱波的速度：

$$P=\sqrt{\frac{a}{\rho}}。$$

余下的对应于横波的兩个根，一般說来是不同的，并且和波的方向的选取，也就是和 p_k 的选取有关。等式 (35) 使我們对于在彈性位能 A 的表达式中出現的九个系数有五个条件。

167. 电磁波 来考虑对于各向同性的介質的前面兩个馬克斯威尔方程：

$$c\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\lambda\boldsymbol{E}+\varepsilon\boldsymbol{E}_t;\quad c\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\mu\boldsymbol{H}_t, \tag{36}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 为电場和磁場的强度，c 为光速，λ 为介質的傳导系数，ε 与 μ 为介电常数与导磁率。向量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是自变量 (x_1, x_2, x_3, t) 的函数，以 (e_1, e_2, e_3) 和 (h_1, h_2, h_3) 記这些向量的分量，可以改写方程 (36) 为形狀：

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_1}{\partial t}+\frac{\partial h_2}{\partial x_3}-\frac{\partial h_3}{\partial x_2}+\cdots=0\\
&\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_2}{\partial t}+\frac{\partial h_3}{\partial x_1}-\frac{\partial h_1}{\partial x_3}+\cdots=0\\
&\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_3}{\partial t}+\frac{\partial h_1}{\partial x_2}-\frac{\partial h_2}{\partial x_1}+\cdots=0\\
&\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_1}{\partial t}+\frac{\partial e_3}{\partial x_2}-\frac{\partial e_2}{\partial x_3}=0\\
&\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_2}{\partial t}+\frac{\partial e_1}{\partial x_3}-\frac{\partial e_3}{\partial x_1}=0\\
&\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_3}{\partial t}+\frac{\partial e_2}{\partial x_1}-\frac{\partial e_1}{\partial x_2}=0
\end{aligned}\right. \tag{37}$$

面未写出的各項不包含函数 e_k 和 h_k 的导数。在这情形下，我們有帶有六个函数的六个一阶方程的方程組。把这些函数按以下順序标上号碼：

$$u_1=e_1;\quad u_2=e_2;\quad u_3=e_3;\quad u_4=h_1;\quad u_5=h_2;\quad u_6=h_3。$$

作表达式 (5) 并写出方程 (6)，我們得到以下的对特征曲面的一阶方程：

$$\begin{vmatrix}
\frac{\varepsilon}{c}p_0, & 0, & 0, & 0, & p_3, & -p_2\\
0, & \frac{\varepsilon}{c}p_0, & 0, & -p_3, & 0, & p_1\\
0, & 0, & \frac{\varepsilon}{c}p_0, & p_2, & -p_1, & 0\\
0, & -p_3, & p_2, & \frac{\mu}{c}p_0, & 0, & 0\\
p_3, & 0, & -p_1, & 0, & \frac{\mu}{c}p_0, & 0\\
-p_2, & p_1, & 0, & 0, & 0, & \frac{\mu}{c}p_0
\end{vmatrix}=0。 \tag{38}$$

用$\frac{\mu}{c}p_0$乘这行列式的前三列元素。随后，对第一列元素，加上第五列元素乘$(-p_3)$和第六列元素乘p_2；对第二列的元素，加上第四列元素乘p_3和第六列乘$(-p_1)$；对第三列元素加上第四列元素乘$(-p_2)$和第五列乘p_1。再关于第六，第五和第四行的元素展开，得到方程：

$$\begin{vmatrix} q+p_1^2, & p_1p_2, & p_1p_3 \\ p_2p_1, & q+p_2^2, & p_2p_3 \\ p_3p_1, & p_3p_2, & q+p_3^2 \end{vmatrix}=0, \tag{39}$$

其中

$$q=\frac{\varepsilon\mu}{c}p_0^2-g^2。\tag{40}$$

展开行列式，我們得到方程：

$$q^2(q+g^2)=0 \qquad (g^2=p_1^2+p_2^2+p_3^2), \tag{41}$$

它分解为二。如果把括弧中的和式等于零，則得$p_0=0$，而要有駐波[141]。往后講到当$q=0$的第二种情形，就是說，

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}p_0^2-g^2=0, \tag{42}$$

它給出已知的关于波的移动速度之值的表示式：

$$V=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}。\tag{43}$$

現在来考察間断的特性。以$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$来記对向量$\boldsymbol{E}$的分量的导数的間断系数，又以$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$記对于向量$\boldsymbol{H}$的分量的类似的量。在討論中照例引用間断向量$\boldsymbol{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$和$\boldsymbol{\beta}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$。我們能写出：

$$\begin{cases}[E_{x_k}]=p_k\,\boldsymbol{\alpha}\\ [H_{x_k}]=p_k\,\boldsymbol{\beta}\end{cases} \qquad (k=0, 1, 2, 3;\ x_0=t)。\tag{44}$$

在目前情形下，方程(18)中的前三个写为形狀：

$$\begin{cases}\frac{\varepsilon}{c}p_0\alpha_1+p_3\beta_2-p_2\beta_3=0\\ \frac{\varepsilon}{c}p_0\alpha_2+p_1\beta_3-p_3\beta_1=0\\ \frac{\varepsilon}{c}p_0\alpha_3+p_2\beta_1-p_1\beta_2=0,\end{cases} \tag{45}$$

或者，以$\boldsymbol{n}$記波面$\omega_1=0$的指向$\omega_1>0$一側的單位法綫向量，我們可以写最末的諸方程为形狀：

(46) $$\frac{\varepsilon V}{c}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{n},$$

而在右边是向量 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的向量积。完全一样，(18)后面的三个方程可以写为形狀：

(47) $$\frac{\mu V}{c}\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{n}。$$

从所写的方程直接推出，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 在波的切平面上并且相互正交。

假定説，在波面的前面，就是在 $\omega_1>0$ 的一面，我們有靜态，即 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 等于零。公式(44)使我們得到向量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的导数在波面本身上的值：

(48) $$\boldsymbol{E}_{x_k}=-p_k\boldsymbol{\alpha};\quad \boldsymbol{H}_{x_k}=-p_k\boldsymbol{\beta}。$$

在鄰近波前之处展开 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 为泰乐級数，取展开式到包含一阶导数的項。注意到 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在波面上成为零，利用公式(48)，我們可以写出下面的近似公式：

$$\boldsymbol{E}\sim-\boldsymbol{\alpha}\sum_{k=0}^{3}p_k(x_k-x_k^{(0)});\quad \boldsymbol{H}\sim-\boldsymbol{\beta}\sum_{k=0}^{3}p_k(x_k-x_k^{(0)}),$$

其中 $(x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ 是波面上的某一点。对函数 ω_1 应用泰乐公式，并考慮到 $\omega_1(x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})=0$，可以写：

$$\omega_1(x_0, x_1, x_2, x_3)\sim\sum_{k=0}^{3}p_k(x_k-x_k^{(0)}),$$

而前面的公式能够改写为形狀[参看 **164**]：

(49) $$\boldsymbol{E}\sim-\omega_1(x_0, x_1, x_2, x_3)\boldsymbol{\alpha};\quad \boldsymbol{H}\sim-\omega_1(x_0, x_1, x_2, x_3)\boldsymbol{\beta}。$$

这些近似公式从波的有电磁过程的一側接近波时成立。

在均匀的各向异性的介質情形，我們应認为量 ε 已經不是数，而是九个元素的对称的矩陣。这个量出現在联系电的位移向量和向量 $\boldsymbol{E}$ 的公式中[II; 118]。量 μ 仍旧可視作数。取坐标軸使矩陣 ε 化为对角綫形式，且設 $\varepsilon_3>\varepsilon_2>\varepsilon_1>0$ 是它的特征值 [III_1;32,33]。这时，方程(37)中的前三个有形狀：

$$\frac{\varepsilon_1}{c}\frac{\partial e_1}{\partial t}+\frac{\partial h_2}{\partial x_3}-\frac{\partial h_3}{\partial x_2}+\cdots=0$$

$$\frac{\varepsilon_2}{c}\frac{\partial e_2}{\partial t}+\frac{\partial h_3}{\partial x_1}-\frac{\partial h_1}{\partial x_3}+\cdots=0$$

$$\frac{\varepsilon_3}{c}\frac{\partial e_3}{\partial t}+\frac{\partial h_1}{\partial x_2}-\frac{\partial h_2}{\partial x_1}+\cdots=0,$$

并且替代(39)我們將有方程：

$$
(50)\qquad \begin{vmatrix} q_1+p_1^2, & p_1p_2, & p_1p_3 \\ p_1p_2, & q_2+p_2^2, & p_2p_3 \\ p_1p_3, & p_2p_3, & q_3+p_3^2 \end{vmatrix}=0,
$$

其中 $$q_i=\frac{\varepsilon_i\mu}{c^2}p_0^2-g^2 \quad (i=1,\ 2,\ 3)。$$

引入記号: $$V_i^2=\frac{c^2}{\varepsilon_i\mu},$$

我們可以写出:

$$
(51)\qquad q_i=\frac{p_0^2}{V_i^2}-g^2。
$$

以 g^2 除方程(50)的兩边,可以改写它为形狀:

$$
(52)\qquad q_2q_3\cos^2\alpha_1+q_3q_1\cos^2\alpha_2+q_1q_2\cos^2\alpha_3+\frac{1}{g^2}q_1q_2q_3=0。
$$

我們有这个方程的明显的解 $q_1=0$; $\cos\alpha_1=0$。注意到(51),我們看出,V_1 是波在平行于平面 $x_1=0$ 的任何方向的可能的傳播速度。完全类似的,V_2 和 V_3 是在平行于平面 $x_2=0$ 和 $x_3=0$ 的方向波的可能傳播速度。在一般情况下,用 g^2 乘(52)的兩边,并写: $q_1q_2q_3=q_1q_2q_3(\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3)$,我們可改写方程(52)为形狀 [141]:

$$
(53)\qquad V^2q_1q_2q_3\sum_{i=1}^{3}\frac{\cos^2\alpha_i}{V^2-V_i^2}=0。
$$

弃去相应于默波的解 $V=0$,我們在給定了由量 $\cos\alpha_k$ 所表出的方向时,得到为了确定 V 的关于 V^2 的二次方程:

$$
(54)\qquad \sum_{i=1}^{3}\frac{\cos^2\alpha_i}{V^2-V_i^2}=0。
$$

完全和在[II;137]中一样,可以證明这方程对 V^2 有兩个不同的正根。

如果我們关于 p_0 解方程(50)或(52),就得到下面形狀的方程:

$$
(55)\qquad p_0+F(p_1,\ p_2,\ p_3)=0,
$$

式中 F 为齐一次函数。由于方程(55)不包含 x_k,这方程的柯西方程組对 p_k 化为常数值,且双特征为直綫。它們的方程写为形狀:

$$
\frac{dx_k}{dt}=F_{p_k}\qquad (k=1,\ 2,\ 3)。
$$

引頂点在原点的特征角錐。它是点源在坐标原点在不同时刻的波面。它的方程为: $x_k=F_{p_k}t$,或者当 $t=1$:

$$
(56)\qquad x_k=F_{p_k}\qquad (k=1,\ 2,\ 3)。
$$

因为 F_{p_k} 是齐零次函数，方程(56)的右边含兩个参数，那就是量 p_1, p_2, p_3 中的兩个和第三个的比。設 S 为曲面(56)；$P(x_1, x_2, x_3)$ 为 S 上某一点，且 δ 为原点到 S 在 P 点切平面的距离。若 $\cos\alpha_i$ 是 S 在 P 点的法綫方向余弦，那末应用对于齐次函数的尤拉公式，我們有：

$$\delta=\sum_{i=1}^{3} x_i\cos\alpha_i=\sum_{i=1}^{3} F_{p_i}\cos\alpha_i=\pm\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{3} p_iF_{p_i}=$$

$$=\pm\frac{F}{g}=\pm\frac{p_0}{g}=\pm V。$$

为了确定起見取(+)号，这在以后并非主要的，我們可以写 S 的切平面方程为形狀：

$$\sum_{i=1}^{3} x_i\cos\alpha_i-V=0。\tag{57}$$

在这方程中出現四个参数 $\cos\alpha_i(i=1, 2, 3)$ 和 V，它們由兩个关系式联系：

$$\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i=1;\quad \sum_{i=1}^{3}\frac{\cos^2\alpha_i}{V^2-V_i^2}=0,$$

因此方程(57)包含兩个独立参数，这正是应当如此的。曲面 S 本身是和兩个参数有关的平面族(57)的包絡。若是作出一切計算，对它我們不去講了，那末我們得到以下的曲面方程：

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{V_i^2x_i^2}{V_i^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}=0。$$

假如 $V_1=V_2$，那末这个四阶曲面退化为球面和橢圓面的总合。

168. 彈性学中的强性間断　我們以前考慮过关于一个方程的解的强性間断問題[142]。現在从强性間断理論的观点来进行弹性学方程的研究。

同时我們限于考察平面的情形。設 (u, v) 是 (x, y) 平面上的位移向量的分量，又 X, Y 为体积力的分量。照例用 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 記張力張量的分量，我們將有以下的兩个彈性学的基本方程：

$$\begin{cases}\rho\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}-\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=X,\\[2mm] \rho\dfrac{\partial^2v}{\partial t^2}-\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}-\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}=Y。\end{cases}\tag{58}$$

对这些方程还須加上張力張量和形变張量間的联系(虎克定律)：

$$\sigma_x=\lambda(u_x+v_y)+2\mu u_x;\ \sigma_y=\lambda(u_x+v_y)+2\mu v_y;\ \tau_{xy}=\mu(u_y+v_x)。\tag{58$_1$}$$

把最后的表达式代入方程(58)，得到通过位移向量 ω 而表示的彈性学方程：

$$\rho\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\omega+\mu\Delta\omega+\boldsymbol{F}。$$

往后記号(u, v)指的是(x, y, t)的兩个任意函数，而具有到二阶为止的連續导数。同时方程(58)使我們有对应于所取函数(u, v)的量X和Y。还引进兩个綫性算子，含有函数(u, v)的一阶导数：

$$(59)\qquad \begin{cases} P_x(u, v)=\sigma_x\cos(n, x)+\tau_{xy}\cos(n, y)-\rho u_t\cos(n, t), \\ P_y(u, v)=\tau_{xy}\cos(n, x)+\sigma_y\cos(n, y)-\rho v_t\cos(n, t)。\end{cases}$$

考慮兩对函数(u, v)和(u', v')，且設σ_x', σ_y', τ_{xy}', X', Y'为相应于函数对(u', v')的量(58_1)和X, Y的値。因此我們有：

$$\sigma_x'=\lambda(u_x'+v_y')+2\mu u_x';\quad \sigma_y'=\lambda(u_x'+v_y')+2\mu v_y';\quad \tau_{xy}'=\mu(u_y'+v_x')。$$

利用这些表达式并应用通常的奥斯特洛格拉得斯基公式，我們得到格林公式的以下的类似：

$$(60)\qquad -\iiint\limits_D(uX'+vY'-u'X-v'Y)\,d\tau=$$

$$=\iint\limits_S[uP_x(u', v')+vP_y(u', v')-u'P_x(u, v)-v'P_y(u, v)]dS,$$

其中D像以前一样是空間(x, y, t)的某区域，S是包圍它的曲面且n是曲面S的外法綫方向。上述公式首先由渥尔特拉給出。应当指出，对X,Y我們簡單地了解为公式(58)左边的表达式，并且对于X', Y'也相类似。在推导公式(60)时，自然假定函数(u, v)和(u', v')在区域D中有到二阶为止的連續导数。

現在轉而考察当函数(u, v)的一阶导数有間斷的那种情形。設区域D被曲面σ分为兩部分D_1和D_2，并假定函数(u, v)的一阶导数在曲面σ上有間断，而满足[142]中所說的运动学的相容条件。除此而外，假定說，当通过曲面σ时，表达式(59)保持連續。以后我們要解释这些动力学的相容条件的力学意义。完全和在[142]中一样，我們可以断定公式(60)將在整个区域D成立，只要(u, v)滿足上述的间断性条件，而(u', v')为有到二阶为止連續导数的任何函数。

現要說明上述条件的一些推論。正像在[142]中一样，我們可以肯定向量$\operatorname{grad}u\times\boldsymbol{n}$和$\operatorname{grad}v\times\boldsymbol{n}$当通过$\sigma$时应当保持連續。若是我們写出这些向量的分量，就得到六个表达式，当通过σ时应保持連續。再添上表达式(59)，在其中把张力张量的分量代以它的按公式(58_1)的表达式来改变(59)，

我們就有在通过曲面 σ 时应当保持連續的下列的八个式子：

$$u_x \cos(n, y) - u_y \cos(n, x) = M_1,$$
$$u_y \cos(n, t) - u_t \cos(n, y) = M_2,$$
$$u_t \cos(n, x) - u_x \cos(n, t) = M_3,$$
$$v_x \cos(n, y) - v_y \cos(n, x) = M_4,$$
$$v_y \cos(n, t) - v_t \cos(n, y) = M_5,$$
$$v_t \cos(n, x) - v_x \cos(n, t) = M_6,$$
$$(\lambda+2\mu) u_x \cos(n, x) + \mu u_y \cos(n, y) - \rho u_t \cos(n, t) + \\ + \mu v_x \cos(n, y) + \lambda v_y \cos(n, x) = M_7,$$
$$\lambda u_x \cos(n, y) + \mu u_y \cos(n, x) + \mu v_x \cos(n, x) + \\ + (\lambda+2\mu) v_y \cos(n, y) - \rho v_t \cos(n, t) = M_8.$$

把所写的方程看成是关于函数 u 和 v 的六个一阶导数的八个方程。假若这些方程的系数矩陣至少含有一个异于零的六阶行列式，那末我們就能用連續函数 M_k 来解出 u 和 v 的所有一阶导数，而这些导数在 σ 上沒有間断。因此，我們可以断定上述矩陣的所有六阶行列式必須等于零。划去所提到的矩陣的最后兩行并將余下的行列式等于零，我們得到恒等式。考慮其余的情形，我們得着唯一的方程：

$$\{\rho \cos^2(n, t) - (\lambda+2\mu)[\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y)]\} \times \\ \times \{\rho\cos^2(n, t) - \mu[\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y)]\} = 0, \tag{61}$$

它表示上述的矩陣有小于六的秩数的那个事实。假設 σ 的方程有形狀 $\psi(x, y, t) = 0$。以上所写的方程分解为兩个方程：

$$\rho\psi_t^2 - (\lambda+2\mu)(\psi_x^2+\psi_y^2) = 0 \quad 及 \quad \rho\psi_t^2 - \mu(\psi_x^2+\psi_y^2) = 0,$$

因此，我們看到，曲面 σ 必須是彈性学方程的特征曲面[164]。

同一个波动方程时相比，在目前情形我們要有重要的区别。归結为 M_1, M_2, …, M_6 的連續性的运动学的相容条件和归結到方程(61)的 σ 是特征曲面的事实在一起，还沒有向我們保証 M_7 和 M_8 的連續性，就是說，沒有保証动力学的相容条件。要講明使我們得到 M_7 和 M_8 的連續性的那些附加的条件。

在 σ 上取某一点 N，且設 l 是 σ 在 N 点的切平面和通过 N 点的 $t=$ 常数平面相交的直綫。取这直綫 l 为 y 軸。t 軸有在 N 点正交于直綫 l 方向的固定方向。因而也确定了 x 軸。首先考慮当方程(61)左边的第一个因子等于零的情形：

(62) $$\rho\cos^2(n,t)-(\lambda+2\mu)[\cos^2(n,x)+\cos^2(n,y)]=0,$$
它对应于縱波的速度。由于所作 y 軸的选取，在N点我們有：$\cos(n,y)=0$，除此而外，当通过 σ 时在N点 u_y 和 v_y 保持連續。作表达式：

(63) $$(\lambda+2\mu)u_x\cos(n,x)-\rho u_t\cos(n,t)=r。$$

利用(62)，可以写出：

$$r\cos(n,x)=-\rho\cos(n,t)M_8,$$

由于运动学的相容条件和方程(62)，从而推知表达式(63)在N点連續。此时 M_7 在N点一样是連續的，而对于 M_8 的連續性成为必要和充分的是式子：

(64) $$\mu v_x\cos(n,x)-\rho v_t\cos(n,t)=M$$

的連續性。此外，我們有表达式：

(65) $$v_x\cos(n,t)-v_t\cos(n,x)=-M_6$$

的連續性。方程組(64)和(65)的行列式等于 $\rho\cos^2(n,t)-\mu\cos^2(n,x)$，由于(62)和 $\cos(n,y)=0$ 而异于零，且由此推知，式子(64)的連續性相当于偏导数 v_x 与 v_t 的連續性。此外，我們已經有在N点偏导数 v_y 的連續性。曲面 σ 和 $t=$常数平面的截口是 (x,y) 平面上在給定时刻的間断曲綫，而直綫 l 是这曲綫在N点的切綫。量 v 是位移向量在間断曲綫的切綫 l 方向的投影。我們上面說过 v 的一切一阶导数应当在N点連續，就是說，只有位移向量在正交于間断曲綫的方向的分量 u 可以感受到强性間断(縱間断)。因此，若滿足运动学的相容条件和方程(62)，则为了动力学的相容条件适合起見，必要和充分的是仅仅位移向量的正交于移动在 (x,y) 平面上的間断曲綫的分量有强性間断。完全一样，可以考虑方程：

$$\rho\cos^2(n,t)-\mu[\cos^2(n,x)+\cos^2(n,y)]=0。$$

此时只有位移向量在間断曲綫的切綫上的分量能感受到强性間断。

假定說，位移場是势量的：

$$(u,v)=\operatorname{grad}\varphi,$$

于是推知：
$$u_y=v_x。$$

取原来的坐标軸，在N点我們將有連續导数 u_y，v_y 及 v_x。那末从 M_6 的連續性將推得 v_t 的連續性，因此，在势量場的情形，位移向量只有在間断曲綫法綫上的分量能感受到間断。

現在假定位移場是管量的，就是說，

$$u_x+v_y=0。$$

这时我們要有連續导数 u_y，v_y 和 u_x，由于 M_8 的連續性，从而推知导数 u_t 也

是如此，就是說，在管量場时只是位移向量在間斷曲綫切綫上的分量可能是間斷的。

現在講明上述理論的力学意义，就是我們要指出，在一些最簡單的特殊情形下，公式(60)的存在表明了冲量定律对于含有間斷曲面在內的范圍也是正确的。在公式中置 $u'=1$ 和 $v'=0$。同时按照公式(58_1)，对于(u', v')的張力張量的分量要等于零，而公式(60)化为形狀：

$$\iiint\limits_D X d\tau = -\iint\limits_S P_x(u, v)\, dS。 \tag{66}$$

完全一样，若置 $u'=0$；$v'=1$，則得到公式：

$$\iiint\limits_D Y d\tau = -\iint\limits_S P_y(u, v)\, dS。 \tag{67}$$

取母綫平行于 t 軸的柱体为 D，且設这柱体的底 S_1 与 S_2 在平面 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 上。假定在这柱体內部有間斷曲面 σ。在下底和上底 S_1 与 S_2 上，我們有 $\cos(n, x)=\cos(n, y)=0$。在下底 $\cos(n, t)=-1$ 而在上底 $\cos(n, t)=+1$。在側面上 $\cos(n, t)=0$。以 S_t 記柱体和垂直于其母綫的平面变动的截面，并以 l_t 記这平面和柱体的側面的相截曲綫，我們可以改写公式(66)为形狀：

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\iint\limits_{S_t} X dx dy\right]dt = \iint\limits_{S_t} \rho u_t\, dx\, dy\bigg|_{t=t_2} - \iint\limits_{S_t} \rho u_t\, dx\, dy\bigg|_{t=t_1} - \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{l_t} \sigma_n ds\right]dt,$$

其中

$$\sigma_n = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy}\cos(n, y),$$

或者

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\iint\limits_{S_t} X dx dy\right]dt + \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{l_t} \sigma_n ds\right]dt = \iint\limits_{S_t} \rho u_t\, dx\, dy\bigg|_{t=t_2} - \iint\limits_{S_t} \rho u_t\, dx\, dy\bigg|_{t=t_1}。$$

左边的第一項給出在时間 $[t_1, t_2]$ 內加在 (x, y) 平面的区域 S_t 体积力的冲量。第二项給出这区域的境界上所受張力的冲量，而在右边的差是計算在同一区域上动量的增量，而不論是力的冲量，或者是动量的增量皆是投影在 x 軸上的。完全一样，公式(67)使我們对力的冲量和动量的增量在 y 軸上的投影有类似的关系式。于是我們实質上得到对于含間斷曲面的容积 D 的冲量

定律。

169．特征和高频率 在以前叙述方程組的特征論时所得到的那些公式与試圖用特殊类型的函数近似地滿足微分方程組所得到的公式之間存在着联系。設有二阶方程組：

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l}+\cdots=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)。 \tag{68}$$

試以形狀为

$$u_j=X_j e^{i\omega\Phi} \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{69}$$

的函数 u_j 来滿足这个方程組，其中 X_i 和 Φ 为自变量的某些未知函数，而 ω 是数。把(69)式代到方程(68)去，并且只保留包含 ω 的平方的各項，我們得到下面的方程組：

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl} X_j \Phi_{x_k}\Phi_{x_l}=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)。 \tag{70}$$

把这方程組看成是关于 X_j 的齐次方程組。为了得到异于零的解，我們应当使这方程組的行列式等于零。因此，我們得到对于未知函数 Φ 的一阶方程：

$$|\omega'_{ij}|=0 \quad \left(\omega'_{ij}=\sum_{k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl}\Phi_{x_k}\Phi_{x_l}\right),$$

它和特征曲面的方程相合。取这个方程的某一解，一般說来，我們可以从方程組(70)除一任意因子而外确定 X_j。这方程組与为了确定間断系数 h_j 我們有过的方程組 (21) 相一致。这最后的方程組应当只在波面上成立。方程(70)必須到处成立。但是此时我們只是用形狀 (69) 的函数組来近似地滿足方程組(68)的。在目前情形，$\Phi=$常数是同相曲面。

更仔細地研究一个波动方程的情形：

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), \tag{71}$$

而要求出它的关于时間 t 的频率为 ω 的調和振动形狀的解：

$$u=Ae^{i\omega(t+\Phi)},$$

其中 A 与 Φ 只是坐标$(x,\ y,\ z)$的未知函数。問題在于把表达式：

$$v=Ae^{i\omega\Phi} \tag{72}$$

代入到方程

$$\Delta v+k^2 v=0 \quad \left(k^2=\frac{\omega^2}{a^2}\right) \tag{73}$$

里。我們有：

$$v_x=(A_x+i\omega A\Phi_x)e^{i\omega\Phi}$$

$$v_{xx}=(A_{xx}+i\omega A\Phi_{xx}+2i\omega A_x\Phi_x-\omega^2A\Phi_x^2)e^{i\omega\Phi}。$$

对关于 y 和 z 的导数也得到类似的公式。代入方程(73)并使 ω^2 的系数等于零，即得到对于 Φ 的方程:

$$\Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2=\frac{1}{a^2}。\tag{74}$$

再把 ω 的系数等于零，我們得到方程，在其中將出現解(72)的振幅 $A(x, y, z)$:

$$A\Delta\Phi+2(A_x\Phi_x+A_y\Phi_y+A_z\Phi_z)=0,$$

或是

$$\operatorname{grad}\lg A\cdot\operatorname{grad}\Phi=-\frac{1}{2}\Delta\Phi。\tag{75}$$

容易建立方程 (74) 和特征曲面方程的联系。对于方程(71)，我們有以下的特征曲面方程:

$$a^2\left[\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial z}\right)^2\right]=\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial t}\right)^2,$$

并用 $\omega_1=t+\Phi$ 来代，我們也得到方程(74)。以 n 記在某一点 M 的通过这一点的同相曲面 $\Phi=$常数的單位法綫向量，我們可以写:

$$\operatorname{grad}\Phi=\varphi(x, y, z)n,$$

其中 $\varphi(x, y, z)$ 是在点 (x, y, z) 的向量 $\operatorname{grad}\Phi$ 的長度。同时方程(75)可以写为形狀:

$$\operatorname{grad}_n\lg A=-\frac{1}{2\varphi}\operatorname{div}(\varphi n),\tag{76}$$

其中 $\operatorname{grad}_n\lg A$ 是 $\operatorname{grad}\lg A$ 在 n 方向的投影。方程(74)与 (76) 必須在整个空間成立。可是我們来滿足方程(71)的只是近似的。

完全一样，如果我們在馬克斯威尔方程(36)中代以

$$E=ee^{i\omega\Phi};\quad H=he^{i\omega\Phi},\tag{77}$$

其中 e 和 h 为向量，Φ 为数量函数，皆和 (x_1, x_2, x_3, t) 有关，而 ω 是数，那末聚集含因子 ω 的各項，我們得到:

$$\Phi_t\frac{\varepsilon}{c}e=\operatorname{grad}\Phi\times h。\tag{78}$$

这个方程实际上和 [167] 中方程(46)相一致。完全一样，也得到类似于方程(47)的方程。方程(78)应当不只在 $\Phi=$常数曲面上成立，并且这最后的曲面不是間断曲面，而为在解(77)中的同相曲面。

170. 兩个自变量的情形 考虑有兩个自变量的一阶方程組，并假設它对关于 x_2 的导数可解出。因此我們有形狀为：

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_2}=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_1}+\Phi_i(x_1, x_2, u_j) \quad (i=1, \cdots, m) \tag{79}$$

的方程組，其中 a_{ij} 可以和 x_1, x_2 相关。

引入分量为 u_i 与 Φ_i 的向量 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{\Phi}$ 以及有元素 a_{ij} 的矩陣 A，可以改写方程組(79)为一个向量等式的形狀：

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_2}=A\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}+\boldsymbol{\Phi}(x_1, x_2, u_j)。 \tag{80}$$

按公式

$$\boldsymbol{u}=B\boldsymbol{v} \tag{81}$$

引进新向量 $\boldsymbol{v}$ 以替代 $\boldsymbol{u}$，其中 B 是有元素 b_{ik} 的某矩陣，b_{ik} 与 x_1, x_2 相关，在 (x_1, x_2) 平面的某区域 D 內有連續导数，并且 B 有异于零的行列式。我們有

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}=B\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i}+\frac{\partial B}{\partial x_i}\boldsymbol{v} \quad (i=1, 2), \tag{82}$$

其中矩陣 B 的微分法归結为它的元素的微分法。把(81)与(82)代入(80)，得到对于 $\boldsymbol{v}$ 的方程：

$$B\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_2}=AB\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1}+\boldsymbol{\Psi},$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}$ 是向量，其分量和 (x_1, x_2, v_j) 相关。以 B^{-1} 乘兩边，得到下面形狀的变后方程：

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_2}=B^{-1}AB\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1}+\boldsymbol{\Psi}_1。 \tag{83}$$

現在若有可能，取矩陣 B 使矩陣 $B^{-1}AB$ 有对角綫的形式。如同大家所知的，这与解对于矩陣 A 的特征方程[III₁;27]

$$D(A-\lambda)=0 \tag{84}$$

相联系，其中左边是矩陣 $(A-\lambda)$ 的行列式，或者，在展开的形狀：

$$(85)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & \cdots, & a_{1m} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & \cdots, & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mm}-\lambda \end{vmatrix}=0_{\circ}$$

假定說,在某一点 $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ 的鄰域内系数 a_{ik} 有連續导数,又方程(85)有不同的根 $\lambda_k(x_1, x_2)$ $(k=1, \cdots, m)$。最后的假定主要是为的以后。此时利用[III₁;27]中所說的方法,在所提到的鄰域内我們可以作出矩陣 B,使具有化 $B^{-1}AB$ 为純对角綫形式的特性,同时,在标明所有分量以后,我們能写方程(83)为形狀:

$$(86)\qquad \frac{\partial v_i}{\partial x_2}-\lambda_i(x_1, x_2)\frac{\partial v_i}{\partial x_1}+\psi_i(x_1, x_2, v_j)=0$$

$$(i=1, 2, \cdots, m)_{\circ}$$

如果所有的 $\lambda_i(x_1, x_2)$ 在所說到的鄰域内是实的,那末方程組称为在这鄰域内是双曲型的。

利用[161]中記号,对方程組我們有:

$$(87)\qquad a_{ij}^{(k)}=0 \quad 当\ i\neq j; \quad a_{ii}^{(2)}=1; \quad a_{ii}^{(1)}=-\lambda_i(x_1, x_2),$$

对于由公式(5)确定的量 ω_{ij} 得到:

$$\omega_{ij}=0 \quad 当\ i\neq j; \quad \omega_{ii}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}-\lambda_i(x_1, x_2)\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1},$$

方程(6)取形狀:

$$\left[\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}-\lambda_1(x_1, x_2)\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}\right]\cdots\left[\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}-\lambda_m(x_1, x_2)\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}\right]=0,$$

并且它分解为 m 个綫形方程:

$$(88)\qquad \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}-\lambda_i(x_1, x_2)\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}=0 \quad (i=1, \cdots, m)_{\circ}$$

若 $\omega_1(x_1, x_2)$ 是这些方程的一个解,則族 $\omega_1(x_1, x_2)=C$ 是对于方程組(86)的特征曲綫族或特征族。方程(88)相当于常微分方程:

$$(89)\qquad dx_1+\lambda_i(x_1, x_2)dx_2=0, \quad 即\ \frac{dx_1}{dx_2}=-\lambda_i(x_1, x_2),$$

并且对于平面上我們有具有連續一阶导数的函数 $\lambda_i(x_1, x_2)$ 的那种区域内的各点，有 m 条特征曲綫經过。

考慮充分接近于軸 $x_2=0$ 的点，且設 l_i 为方程 (89) 通过点 (x_1, x_2) 的积分曲綫的一部分，夾在这一点和这积分曲綫与軸 $x_2=0$ 相交的某一点 $(x_1^{(i)}, 0)$ 之間。沿曲綫 l_i，我們可以認为任何函数 $\psi(x_1, x_2)$ 只是 x_2 的函数，由于(89)有：

$$\frac{d\psi}{dx_2}=\frac{\partial\psi}{\partial x_2}-\lambda_i(x_1, x_2)\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \quad \text{沿 } l_i\text{。}$$

因而方程組(86)等价于以下的积分方程組：

$$v_i(x_1, x_2)=v_i(x_1^{(i)}, 0)-\int_{l_i}\psi_i(x_1, x_2, v_j)dx_2 \tag{90}$$

$$(i=1, \cdots, m)\text{。}$$

假設在軸 $x_2=0$ 上我們已給定函数 $v_i(x_1, x_2)$ 的数值，我們可以認为 $v_i(x_1^{(i)}, 0)$ 是已知的，并且能对方程組(90)应用逐次逼近法。这給出柯西問題的解的存在性和唯一性定理以及对初始条件的連續相关性。这个問題的詳細的說明以及当方程(85)有重根的情形的同样的研究，可以在前述的 И. Г. 彼得罗夫斯基的書中找到。

171. 例. 1. 考慮确定解析函数实部和虚部的方程組[III₂; 2]：

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0;\quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=0\text{。} \tag{91}$$

我們有：
$$a_{11}^{(1)}=a_{21}^{(2)}=a_{22}^{(1)}=1;\quad a_{12}^{(2)}=-1,$$

而其余的 $a_{ij}^{(k)}$ 等于零。方程(6)的左边在改 $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$ 为 α_k 时，有形狀：$\alpha_1^2+\alpha_2^2$，从而推知方程組 (91) 有椭圆型。考慮到以前說过的这方程組与解析函数的联系，可以肯定，它的每一个具有連續一阶导数的解是 x_1 和 x_2 的解析函数。

2. 考慮方程組(彼朗 (Perron), Math. Zeitschr., Bd. 27, H. 4; 1927)：

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0;\quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1}-a\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+F(x_2)=0, \tag{92}$$

其中 a 为常数。

方程 (6) 的左边把 $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$ 改为 α_k 时有形狀 $\alpha_1^2-a\alpha_2^2$，因此，当 $a<0$ 时方

程組为椭圓型，而对 $a=0$ 时为抛物型。若写方程組为关于 x_1 的偏导数解出的形式，方程(85)有形狀：

$$\begin{vmatrix} -\lambda, & 1 \\ a, & -\lambda \end{vmatrix}=0, \quad 即 \quad \lambda^2-a=0,$$

并且当 $a>0$ 时它有相异实根，就是說，当 $a>0$ 方程組是双曲型的。

首先假定 $a>0$。像在 [170] 所說的来做，替代 u_1, u_2 引入新函数：

(93) $$v_1=\sqrt{a}\,u_1+u_2; \quad v_2=\sqrt{a}\,u_1-u_2,$$

而得到兩个單独对于 v_1 与 v_2 的方程：

(94) $$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}-\sqrt{a}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+F(x_2)=0; \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_1}+\sqrt{a}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}-F(x_2)=0。$$

在引进新自变量

$$2\xi=\sqrt{a}\,x_1+x_2; \quad 2\eta=-\sqrt{a}\,x_1+x_2$$

以后，方程組改写为形狀：

(95) $$-\sqrt{a}\frac{\partial v_1}{\partial \eta}+F(\xi+\eta)=0; \quad \sqrt{a}\frac{\partial v_2}{\partial \xi}-F(\xi+\eta)=0。$$

求出方程組(95)的滿足初始条件

$$v_1|_{x_1=0}=v_2|_{x_1=0}=0, \quad 就是\ v_1|_{\eta=\xi}=0; \quad v_2|_{\eta=\xi}=0$$

的那种解。利用(95)，得到：

$$v_1=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{2\xi}^{\xi+\eta}F(t)dt; \quad v_2=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{2\eta}^{\xi+\eta}F(t)dt。$$

用原来自变量：

$$v_1=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\sqrt{a}\,x_1+x_2}^{x_2}F(t)dt; \quad v_2=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\sqrt{a}\,x_1+x_2}^{x_2}F(t)dt,$$

并且按照公式(93)可以确定 u_1 与 u_2，它們是方程組(92)的解且滿足初始条件：

(96) $$u_1|_{x_1=0}=u_2|_{x_1=0}=0。$$

这样的解显然是唯一的。

当 $a=0$，方程組(92)取形狀：

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1}+F(x_2)=0,$$

而我們得到滿足条件(96)它的唯一的解：

$$u_1=-\frac{x_1^2}{2}F'(x_2); \quad u_2=-x_1F(x_2),$$

并且我們应当假設 $F(x_2)$ 有二阶連續导数。

最后，考虑当 $a=-b^2<0$ 的情形。置

$$bx_1=x;\ x_2=y;\ v_1=bu_1+\frac{1}{b}\int_c^y F(t)\,dt;\ v_2=u_2, \tag{97}$$

改写方程組(92)为形狀：

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{\partial v_2}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial v_2}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}=0。$$

由此可見 v_1+v_2i 必須是 $z=x+yi$ 的正則函数，且由于(96)和(97)，这个函数当 $x\to0$ 时应趋向于实函数：

$$\frac{1}{b}\int_c^y F(t)\,dt。\tag{98}$$

我們可以斷定，所說的正則函数必須是通过直綫 $x=0$ 的解析延拓，于是推知，也必須是在这直綫本身上的解析函数[III$_2$; 24]。于是函数(98)，且因而 $F(y)$，应当是实变数 y 的解析函数。按照$(y-y_0)$的乘幂展开函数(98)：

$$-\frac{1}{b}\int_c^y F(t)\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(y-y_0)^k,$$

其中 y_0 为任何实数，当 z 接近于 iy_0 时，我們得到：

$$v_1+v_2i=\sum_{k=0}^{\infty}(-i)^k a_k(z-iy_0)^k\quad (z=x+yi)。$$

知道了 v_1 和 v_2，依照(97)能求出 u_1 和 u_2。

第四章　边值問題

§1. 常微分方程的边值問題

172. 二阶綫性方程的格林函数　这一章將从事于常微分方程与偏微分方程的边值問題的研究，我們已不止一次地遇到这样的問題的解法。本章目的是給出問題的系統的闡述。

在解数学物理中的一些边值問題时，富里埃方法的应用屡次地导向下述包含参数的常微分方程的边值問題：求参数 λ 的值，使得齐次方程

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + [\lambda r(x) - q(x)]y = 0 \tag{1}$$

在有限区間 $[a, b]$ 上存在不恒等于零的解，它在这一区間的端点还滿足某些齐次的边值条件：

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0; \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \tag{2}$$

这里 α_k 与 β_k 是已給的数。此外，我們自然还要假設，α_1 与 α_2 之中，β_1 与 β_2 之中都至少有一个不等于零。我們假定 $p(x)$，$q(x)$ 与 $r(x)$ 都是在閉区間 $[a, b]$ 上的連續函数，并且 $p(x)$ 在这区間上不等于 0 而且有連續的导数。对方程(1)左端中，不包含参数 λ 的那些項的和，引入特殊的記号：

$$L(y) = \frac{d}{dx}[p(x)y'] - q(x)y。$$

照例，把使所提的齐次問題有非零解的 λ 称为特征数或特征值，而把解的本身称为特征函数。特征函数显然还可有一常数因子的变

化。不难看出,每一特征值只可以对应一个特征函数。事实上,如果我們作了相反的假設:对某一 λ 存在兩个綫性無关的,滿足边値条件(2)的方程(1)的解,这时就会成立:方程(1)的通解也滿足这些边値条件。但是,对不滿足(2)式中第一个边値条件的那种初値 $y(a)$ 与 $y'(a)$ 也能够定出方程(1)的一个解,所以所述的情况决不可能。利用了我們已多次应用过的初等变換 [III₂; **102, 145, 157**],就可以証明:对应于不同特征値的特征函数 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 具有正交性,这就是:

$$\int_a^b r(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx=0_\circ$$

对于算子 $L(y)$,現在要引进一个函数,它类似于我們在 [**1**] 中所考察过的在集中力作用下弦的靜力弯曲。在那里算子 y'' 起着算子 $L(y)$ 的作用,为了用較自然的方法来解釋上述函数的性質起見,我們考察非齐次方程:

$$L(y)=\frac{d}{dx}[p(x)y']-q(x)y=-f(x), \tag{3}$$

并且假設,在整个区間 $[a, b]$ 中除了一个小区間 $[\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]$ 之外函数 $f(x)$ 为 0,这里 ξ 是 $[a, b]$ 内部的一个定点,它还滿足条件:

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f(x)\,dx=1_\circ \tag{4}$$

当 ε 趋近于零时,取極限,我們就得到类似于在点 $x=\xi$ 的集中力的函数。在关于 $f(x)$ 的这样的假設下,我們考察方程(1)滿足边値条件(2)的解 $y_\varepsilon(x)$,但須假設,这样的解是存在的。把方程(3)的兩边关于 x 积分,并注意到(4),就得到:

$$p(x)y_\varepsilon'(x)\Big|_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon}-\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} q(x)y_\varepsilon(x)\,dx=-1,$$

并且，在 $\varepsilon\to0$ 的極限情形下，就有：

$$y'(\xi+0)-y'(\xi-0)=-\frac{1}{p(\xi)},$$

这就是，上述解的导数 $y'(x)$ 在点 $x=\xi$ 应当有第一类的間断，它的躍度等于 $-\frac{1}{p(\xi)}$。自然，这一个解將依賴于区間 $[a, b]$ 中的点 ξ 的选擇，这就是說，它是兩个变量 (x, ξ) 的函数。在以后我們用 $G(x, \xi)$ 来記它，称它为算子 $L(y)$ 在边值条件（2）下的格林函数。以上的論述导引到格林函数的如下的严格定义：算子 $L(y)$ 在边值条件（2）下的格林函数是指滿足下列条件的函数 $G(x, \xi)$：（1）它在依不等式 $a\leqslant x, \xi\leqslant b$ 所确定的正方形 k_0 中有定义且为連續，（2）如果把它看成变量 x 的函数，它在 $a\leqslant x<\xi$ 与 $\xi<x\leqslant b$ 有到二阶的連續导数，且滿足齐次方程 $L(y)=0$；（3）如果把它看成 x 的函数，它滿足边值条件（2）；（4）在所說的正方形 k_0 的对角綫上，即在 $x=\xi$ 时，它关于变量 x 的导数（我們記它为 $G'(x, \xi)$）有第一类的間断，还应滿足如下的兩个条件：

$$(5)\qquad \begin{aligned} &G'(\xi+0, \xi)-G'(\xi-0, \xi)=-\frac{1}{p(\xi)}\\ &G'(\xi, \xi+0)-G'(\xi, \xi-0)=\frac{1}{p(\xi)}。\end{aligned}$$

最后的条件可归結到如下的一个要求：对于所說的对角綫 $x=\xi$ 上的一点，如从上面，即从区域 $\xi>x$ 来趋近它以及从下面，即从区域 $\xi<x$ 来趋近它，导数 $G'(x, \xi)$ 应当有定值，而这兩个極限值之差应当等于 $\frac{1}{p(\xi)}$。在这兩个区域的每一个之中，由于 $L(G)=0$ 之故，它关于第一个变量的二阶导数可表述如下：

$$p(x)G''(x, \xi)=-p'(x)G'(x, \xi)+q(x)G(x, \xi),$$

因而，当一点从对角綫的某一侧来趋近于对角綫上的点时，这二阶导数就会有确定的極限值。

现在要証明，满足上述所有条件的格林函数存在且唯一。这时我們假設 $\lambda=0$ 并非特征值，这就是説，方程 $L(y)=0$ 沒有满足条件(2)的不恒等于 0 的解。以后我們会看到当在 $\lambda=0$ 是特征值时，格林函数的定义要作怎样的改变。作齐次方程 $L(y)=0$ 的一个解 $y_1(x)$，它取满足条件(2)的第一式的某二数为初值 $y_1(a)$ 与 $y_1'(a)$，这个解 $y_1(x)$，和一般所有的解 $c_1y_1(x)$ (c_1 是任意常数) 都会满足第一个边值条件。不难見到，它們也已取尽了满足(2)中第一个条件的所有解。事实上，如果某一个解 $y(x)$ 也满足这一条件，那末就有关于 α_1 与 α_2 的兩个齐次方程：

$$\alpha_1y_1(a)+\alpha_2y_1'(a)=0;\quad \alpha_1y(a)+\alpha_2y'(a)=0,$$

因为，我們自然要假設这兩个数中至少有一个不为 0，所述方程組的行列式应当等于零，这就是，解 $y(x)$ 与 $y_1(x)$ 的朗斯基行列式在 $x=a$ 时等于零，因而 $y(x)$ 与 $y_1(x)$ 綫性相关，即 $y(x)=cy_1(x)$ [**II**; **24**]。

同样地可設 $c_2y_2(x)$ 是方程 $L(y)=0$ 的满足条件(2)中第二式的解，这里 c_2 是任意常数。根据存在及唯一性定理，兩个解 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 都在全区間 $[a, b]$ 定义，而且是綫性無关。事实上，如果它們是綫性相关，那末 $y_1(x)$ 就会使条件(2)的兩个边值条件都得到满足，而 $\lambda=0$ 就会是特征值，这与以上所作的假設相矛盾。在 $x\leqslant\xi$ 时，$G(x,\xi)$ 应当具有 $c_1y_1(x)$ 的形式，而在 $x\geqslant\xi$ 时，它应当具有形式 $c_2y_2(x)$。所余下来的就是要选擇常数 c_1 与 c_2，使得在点 $x=\xi$ 时函数是連續的，而它的一阶导数具有上述的躍度。这就导引到决定 c_1 与 c_2 的下列兩个方程：

$$\begin{aligned}&c_1y_1(\xi)-c_2y_2(\xi)=0\\ &c_1y_1'(\xi)-c_2y_2'(\xi)=\frac{1}{p(\xi)}。\end{aligned}\tag{6}$$

这一方程組的行列式 $[y_2(\xi)y_1'(\xi)-y_1(\xi)y_2'(\xi)]$ 不等于 0，这是

因为这两个解是綫性独立的緣故。因而，我們就得到常数 c_1 与 c_2 的确定数値。不难見到这两个解的朗斯基行列式应当由公式

$$y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)=\frac{c}{p(x)}$$

所表达 [II; 24]，这里 c 是某一非零常数。添加常数因子（例如对解 $y_1(x)$），我們就可以假定这两个解满足条件：

$$p(x)[y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)]=1。$$

从此直接可推出，方程組（6）有解 $c_1=y_2(\xi)$ 与 $c_2=y_1(\xi)$，而格林函数 $G(x,\xi)$ 就依以下方式所确定：

$$G(x,\xi)=\begin{cases}y_1(x)y_2(\xi) & (x\leqslant\xi)\\ y_2(x)y_1(\xi) & (x\geqslant\xi)\end{cases} \tag{7}$$

不难直接驗証，它滿足所有的四个条件。它的唯一性直接从以前的論述中得出。

173. 边値問題化为积分方程 考察非齐次方程：

$$L(y)=\frac{d}{dx}[p(x)y']-q(x)y=-f(x), \tag{8}$$

这里 $f(x)$ 是在区間 $[a,b]$ 上給定的連續函数，要求方程（8）的滿足边値条件（2）的解。这样的解只能有一个，因为如果有两个的話，那么，它們的差就滿足齐次方程 $L(y)=0$ 以及边値条件（2），这就是，$\lambda=0$ 就会是特征値了。現要驗証，方程（8）的滿足边値条件（2）的唯一解是由公式

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi \tag{9}$$

所給出，在 [1] 中所指出的那个相类似的函数，具有簡單的力学意义：如果知道集中力的靜力弯曲，那末用积分法就可以得出連續分布力的靜力弯曲。

現在来証明公式（9）所定义的函数滿足方程（8）与边値条件（2）。考慮到格林函数有上述的不連續性，我們把积分区間划分

为二：

$$y=\int_a^x G(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int_x^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi。$$

对 x 求导数，就得到：

$$y'=\int_a^x G'(x,\xi)f(\xi)d\xi+G(x,x-0)f(x)+$$
$$+\int_x^b G'(x,\xi)f(\xi)d\xi-G(x,x+0)f(x),$$

由于格林函数本身是連續的，即 $G(x,x+0)=G(x,x-0)$，上式即：

$$y'=\int_a^x G'(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int_x^b G'(x,\xi)f(\xi)d\xi=$$
$$=\int_a^b G'(x,\xi)f(\xi)d\xi。\tag{10}$$

从公式(9)与(10)以及 $G(x,\xi)$ 滿足边值条件(2)这一事实，直接得出，函数(9)也滿足这些边值条件。为了驗証方程(8)，把 y' 再对 x 微分一次，經过簡單的变形后，我們得到：

$$y''=\int_a^b G''(x,\xi)f(\xi)d\xi+[G'(x,x-0)-G'(x,x+0)]f(x),$$

而从(5)式就得出：

$$y''=\int_a^b G''(x,\xi)f(\xi)d\xi-\frac{f(x)}{p(x)}。\tag{11}$$

把(8)式的右端的 y, y' 与 y'' 用它們的表示式(9)，(10)与(11)来代入，就得到：

$$\int_a^b L(G)f(\xi)d\xi-f(x)=-f(x),$$

因为函数 $G(x,\xi)$ 是齐次方程 $L(y)=0$ 的解，所以方程(8)得到滿足。还可指出，从上述公式直接推知：公式(9)所定义的函数 y 在整个区間有到二阶的連續导数。因而，我們导得如下的断言：如果 $\lambda=0$ 并非微分方程(8)的特征值，那末这一方程对任意給定在

$[a, b]$ 的連續函数 $f(x)$ 有唯一的，滿足边值条件（2）的解，并且，这个解是由公式（9）所确定。还可以用另外的方式来說：对于任意的已給連續函数 $f(x)$，函数（9）有到二阶的連續导数，它还滿足方程（8）与边值条件（2）。

我們指出，如果 $y(x)$ 是任意的在区間 $[a, b]$ 有到二阶的連續导数的函数，并滿足边值条件（2），那末，如果把这函数代到方程（8）的左端，就可以作出对应的連續函数 $f(x)$，因此，依上面所証，函数 $y(x)$ 可按公式（9）用 $f(x)$ 来表出。

这样，公式（8）与（9）建立起兩类函数之間一对一的相互对应：在区間 $[a, b]$ 具有到二阶的連續导数，且滿足边值条件（2）的函数 $y(x)$ 屬于第一类，而在区間 $[a, b]$ 連續的函数 $f(x)$ 屬于第二类，借助公式（8）可由 $y(x)$ 得到 $f(x)$，而按公式（9）可由 $f(x)$ 得到 $y(x)$。

由上所述，直接可得出把上节开端所叙述的边值問題化为积分方程的可能性。事实上，把方程（1）改写为形式：

$$L(y) = -\lambda r(x) y$$

之后，从上面所确立的結果，就直接地得到：帶有边值条件（2）的这个方程与积分方程：

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) y(\xi) d\xi \tag{12}$$

等价。完全同样地，帶有边值条件（2）的非齐次方程：

$$\frac{d}{dx}[p(x) y'] + [\lambda r(x) - q(x)] y = F(x) \tag{12_1}$$

与积分方程：

$$y(x) = F_1(x) + \lambda \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) y(\xi) d\xi \tag{12_2}$$

等价，这里

$$F_1(x) = -\int_a^b G(x, \xi) F(\xi) d\xi,$$

并且，我們应当从这两个积分方程来求連續解 $y(x)$。

174. 格林函数的对称性 公式(7)不仅在 $a<x<b$ 时确定格林函数，而且也在端点 $x=a$ 与 $x=b$ (这就是在整个閉正方形 $a\leqslant x, \xi\leqslant b$)确定它，从这一公式直接可推出，在整个正方形内，格林函数具有对称性：

$$G(x, \xi)=G(\xi, x)。\tag{13}$$

現給出格林函数对称性的另一証明，它所根据的思想可适用于更一般的情况。不难驗証如下的恒等式：

$$uL(v)-vL(u)=\frac{d}{dx}[p(x)(uv'-vu')]。\tag{14}$$

在这恒等式中，$u(x)$ 与 $v(x)$ 是具有到二阶的連續导数的任意函数。把 $u=G(x, \xi_1)$ 与 $v=G(x, \xi_2)$ 代入公式(14)，这时，为了确定起見，假設 $\xi_1<\xi_2$。沿区間 $[a, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2]$ 与 $[\xi_2, b]$ 积分，注意到格林函数满足齐次方程 $L(y)=0$，我們就得到：

$$[p(x)(G(x, \xi_1)G'(x, \xi_2)-G(x, \xi_2)G'(x, \xi_1))]_{x=a}^{x=\xi_1}=0$$

$$[p(x)(G(x, \xi_1)G'(x, \xi_2)-G(x, \xi_2)G'(x, \xi_1))]_{x=\xi_1}^{x=\xi_2}=0$$

$$[p(x)(G(x, \xi_1)G'(x, \xi_2)-G(x, \xi_2)G'(x, \xi_1))]_{x=\xi_2}^{x=b}=0。$$

把这三式相加，并注意到格林函数本身的連續性与它的第一阶导数的間断性，我們引导到如下的关系式：

$$G(\xi_1, \xi_2)-G(\xi_2, \xi_1)=\tag{15}$$

$$=[p(x)(G(x, \xi_1)G'(x, \xi_2)-G(x, \xi_2)G'(x, \xi_1))]_{x=a}^{x=b}。$$

不难驗証，所写出的公式的右端的差式当 $x=a$ 与 $x=b$ 时均变为零。事实上，格林函数满足边值条件(2)的第一个，即：

$$\alpha_1 G(a, \xi_1)+\alpha_2 G'(a, \xi_1)=0$$

$$\alpha_1 G(a, \xi_2)+\alpha_2 G'(a, \xi_2)=0,$$

并因为，我們自然假設所給常数 α_1 与 α_2 不能同时为零，所以所写的齐次方程組的行列式应該等于零，这就是以上所說的差式在

$x=a$ 时确实变为零。可类似地証明，它在 $x=b$ 时也变为零，那末公式(15)就給出格林函数的对称性。

还可以研究比条件(2)更广泛的边值条件，这就是，函数 $y(x)$ 及其导数在区間兩端的数值都出現在兩个条件之中：

$$\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)+\alpha_3 y(b)+\alpha_4 y'(b)=0$$
$$\beta_1 y(a)+\beta_2 y'(a)+\beta_3 y(b)+\beta_4 y'(b)=0。$$

所有上面的論述，除了格林函数的对称性的証明以外，都保持有效，但是，要使以上对格林函数的对称性的証明也能成立，其充要条件是：条件

$$p(b)\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=p(a)\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_3 & \beta_4\end{vmatrix}$$

能滿足。我們不来証明这个論断。不难直接驗証，如果 $p(a)=$ $=p(b)$（即函数 $p(x)$ 有周期性），在純周期性的边值条件 $y(a)=$ $=y(b)$，$y'(a)=y'(b)$ 下，格林函数仍能为对称。还可指出：如果其余的系数 $q(x)$ 与 $r(x)$ 也具有周期性，那末在上述周期性的边值条件下的边值問題归結为求参数 λ 的数值，使得方程(1)有周期解。

175. 边值問題的特征值与特征函数 因为我們已把边值問題化到积分方程去，那末就可以利用积分方程的一般理論中的結果了，因而就得到一系列的有关边值問題的特征值与特征函数的論断。首先考察 $r(x)=1$ 的情形，这时方程(1)具有形式：

$$\frac{d}{dx}[p(x)y']+(\lambda-q(x))y=0, \tag{16}$$

并且，我們还假設边值条件是能使格林函数为对称的。积分方程(12)是对称核的方程。它將有实的特征值，而对应不同的特征值的特征函数將是正交的。在当前的情况，如以前所見 [172]，每一特征值只对应一个特征函数。对形式(2)的边值条件我們已經証

过了，在周期性的边値条件的情况下，一个特征值可能对应兩个特征函数，但不能再多，这是因为方程(16)只有兩个綫性無关的解。我們还要証明：方程(16)的核 $G(x, \xi)$ 是一个完备核，就是說，不恒等于零而与核正交的連續函数 $f(x)$ 是不存在的。如果作相反的假設，即存在这样的函数，使：

$$\int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi = 0。$$

那末，从一方面来看，函数(9)就应該恒等于零。但另一面，由于以前所証，它又应满足非齐次方程(8)，这是不可能的。如所知[25]，从核的完备性可得出：存在着特征値的無限集。設 $\lambda_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是方程(16)的特征值，即我們的問題的特征值，又 $\varphi_n(x)$ 是对应的特征函数，它們組成正交标准化的系統。假設函数 $f(x)$ 满足边値条件并有到二阶的連續导数。如置 $L(f) = -h(x)$，我們就得到这个函数依核的表达式：

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi) h(\xi) d\xi,$$

因此，每一满足边値条件，在区間 $[a, b]$ 有到二阶的連續导数的函数 $f(x)$，在这一区間里可以按特征函数 $\varphi_n(x)$ 展开为正則收斂的富里埃級数[38]。还容易証得如下的定理。

定理 如果連續函数 $f(x)$ 的富里埃級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x); \quad c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx \tag{17}$$

在区面 $[a, b]$ 一致收斂，那末它的和等于 $f(x)$。

我們用反証法。設 $f_1(x)$ 是級数(17)的和，并設 $f_1(x)$ 在区間 $[a, b]$ 中并不恒等于 $f(x)$，这时不恒等于零的差式 $f_1(x) - f(x)$ 同所有的函数 $\varphi_n(x)$ 相正交，因而也与核相正交，这就与所証过的核的完备性相矛盾。在以后我們將利用这里所証的定理。

可以証明，不仅核 $G(x, \xi)$ 是完备的，而且特征函数 $\varphi_n(x)$ 也組成封閉族，上面所証的定理也可以直接地从这里推出。

以后，在考察多維的情形时，我們給出下述事实的証明：对于任何連續函数，封閉性方程成立。这一証明对一維的情形也有效。

現在考察 $r(x)$ 不为 1 的情形，还假設这一函数是正的。利用 [32] 中的結果，我們可以看到，在这情形下，方程(1)的边值問題也可以化为对称核的积分方程。特別是，每一滿足边值条件，在区間 $[a, b]$ 有到二阶連續导数的函数，都可以按問題的特征函数展开为正則收斂的富里埃級数：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \tag{18}$$

它的系数是由公式：

$$c_n = \int_a^b r(x) f(x) \varphi_n(x) dx \tag{19}$$

所确定。为了証明这一断言，我們注意到：据 [173] 中所証明的事实，就有：

$$f(x) = -\int_a^b G(x, \xi) L[f(\xi)] d\xi。$$

但是显然，我們可以記 $L[f(\xi)] = -\sqrt{r(\xi)}\, h(\xi)$，这里，由于 $r(\xi) > 0$，所以 $h(\xi)$ 在区間 $[a, b]$ 連續。因此，我們可以用对称核的积分方程的核来表示函数 $\sqrt{r(x)}\, f(x)$：

$$\sqrt{r(x)} f(x) = \int_a^b G(x, \xi) \sqrt{r(x) r(\xi)}\, h(\xi) d\xi, \tag{20}$$

而 [32] 中的論述立即就給出上面所說的展开的定理。也同以上一样，可以証明核的封閉性，因而就存在特征值的無限集。在函数 $f(x)$ 有連續的第一阶导数与分段連續的第二阶导数的情況，重复应用 [172] 中的議論，并記起 [22] 中的定理 II 对于借分段連续函数 $h(x)$ 依核来表达的函数也有效，我們就能肯定：上述的展开

的定理在满足边值条件的函数 $f(x)$ 有一阶連續导数与二阶分段連續导数的情形也有效。在以后，我們还指出一些情况，那时展开的定理中还可以容許函数的第一阶导数的分段連續性。

176. 特征值的符号 为使后来的公式簡單起見，在研究特征值的符号时，我們將假設，$r(x)=1$。所有的論述容易推广到一般的情形去。首先，要給出用对应的特征函数来表示特征值的一个公式。如前，設 λ_n 是特征值，$\varphi_n(x)$ 是特征函数，它們組成正交标准化系統。我們有：

$$L(\varphi_n)=-\lambda_n\varphi_n(x)。$$

在兩端乘以 $\varphi_n(x)$，积分，注意到特征函数的标准化的性質，就得到：

$$\lambda_n=-\int_a^b L(\varphi_n)\varphi_n(x)\,dx=$$

$$=-\int_a^b\left[\frac{d}{dx}(p(x)\varphi_n'(x))-q(x)\varphi_n(x)\right]\varphi_n(x)\,dx,$$

由此，把第一項分部积分，就导得下面的公式：

$$\lambda_n=\int_a^b[p(x)\varphi_n'^2(x)+q(x)\varphi_n^2(x)]\,dx-\tag{21}$$

$$-[p(x)\varphi_n(x)\varphi_n'(x)]_{x=a}^{x=b}。$$

我們假設，这公式中积分号以外的項变为零。例如在边值条件 $\varphi_n(a)=\varphi_n(b)=0$ 时会發生这情况。这时，公式 (21) 可改写为形式：

$$\lambda_n=\int_a^b[p(x)\varphi_n'^2(x)+q(x)\varphi_n^2(x)]\,dx。\tag{22}$$

設 $p(x)>0$。此外，如果我們还假設在区間 $[a, b]$ 中 $q(x)\geqslant 0$，那末从所写的公式中，就可直接推知所有的特征值均为正。現設 $q(x)$ 是任意的連續函数，而 m 是它在区間中的極小值，即在 $[a, b]$ 中 $q(x)\geqslant m$。从前一公式直接地推出：

$$\lambda_n \geqslant \int_a^b p(x)\varphi_n'^2(x)dx + m \geqslant m_{\circ}$$

因之，在所論情形下，只能有有限个負的特征值。現設边值条件具有形式：

(23) $$y'(a)-h_1y(a)=0;\quad y'(b)+h_2y(b)=0,$$

这里 h_1 与 h_2 是正的常数。公式 (21) 在积分号以外的項这时都为正，我們就与以前一样，可以肯定，在边值条件 (23) 以及 $q(x)\geqslant 0$ 的情况下，所有的特征値都是正的。

如果所有的特征値都是正的、或者只有有限个特征值是負的，那末麦色定理就会成立，我們可以把核的展开式写成絕对且一致收斂的級数：

(24) $$G(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}。$$

这个等式使我們能够直接把在 [175] 所証明的按特征函数展开的定理推广到更广泛的一类函数中去，这就是，我們設 $f(x)$ 为連續，在整个区間除点 $x=c$ 外有連續的导数，在 $x=c$ 时，它有第一类的不連續性：

$$f'(c+0)-f'(c-0)=k,$$

函数还存在分段連續的二阶导数。此外，照例还假設 $f(x)$ 滿足边值条件。作差式：

$$f(x)+\frac{k}{p(c)}G(x,c),$$

它在整个区間無例外地具有連續的导数。对这一差式，按特征函数展开的定理有效。另一面，由 (24) 式，所差的項 $G(x,c)$ 可以按特征函数展开，因此，原来的函数 $f(x)$ 可以展开为絕对与一致收斂的按特征函数的富里埃級数。自然，所进行的討論也可以适用于导数 $f'(x)$ 在区間 $[a,b]$ 中有有限个第一类不連續点的情况。它类似于我們从前在改善富里埃級数的收斂性时所用的方法[II；

158]。

177. 例. 1. 考察方程

$$y''+\lambda y=0$$

与边值条件 $y(0)=y(1)=0$。在当前的情况下 $L(y)=y''$，而格林函数是：

$$G(x,\ \xi)=\begin{cases}(1-\xi)x & (x\leqslant\xi)\\ (1-x)\xi & (\xi\leqslant x)。\end{cases}$$

特征值与特征函数可以用有限的方式确定起来：

$$\lambda_n=n^2\pi^2;\quad \varphi_n(x)=\sqrt{2}\sin n\pi x\ (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

我們也有对滿足前段所述条件的所有的函数的展开的定理。展开定理可应用的条件还可以大大地放寬，但我們不来討論它。

2. 保留以上的微分方程，选取新的边値条件 $y(0)=y'(1)=0$，在这情形下：

$$G(x,\ \xi)=\begin{cases}x & (x\leqslant\xi)\\ \xi & (\xi\leqslant x),\end{cases}$$

而特征值与特征函数所取的形式是：

$$\lambda_n=(2n+1)^2\frac{\pi^2}{4};\quad \varphi_n(x)=\sqrt{2}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}x。$$

3. 对同一方程，考察边値条件 $y(0)=0$；$y(1)+hy'(1)=0$。

現在要作对应的格林函数。作方程 $y''=0$ 的兩个解，其一滿足第一个边値条件，另一个滿足第二个边値条件：$y_1(x)=x$；$y_2(x)=(1+h)-x$。依在 [172] 中所指出的方法，我們就能导引到如下的格林函数的公式：

$$G(x,\ \xi)=\begin{cases}\dfrac{1+h-\xi}{1+h}x & (x\leqslant\xi)\\[2ex] \dfrac{1+h-x}{1+h}\xi & (\xi\leqslant x)。\end{cases}$$

在这情形下，所有的特征值是正的，并且，如設 $\lambda=\mu^2$，我們不难証明，特征值 μ 是由方程 $\operatorname{tg}\mu+h\mu=0$ 所决定，而特征函数將为 $c_n\sin\mu_n x$，这时常数 c_n 应当由这些函数的标准化条件来决定。

4. 在研究边緣固定着的圓形膜的振动时，我們會引导到如下的边値問題。求参数 λ 的值，使得方程

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(\lambda-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \tag{25}$$

有在 $x=0$ 为有限，在 $x=l$ 等于零的解。用字母 n 記非負整数。这一边値問

題与我們以前所研究的比較起来，是特別一些的，这就是，它的系数在端点 $x=0$ 处有一極点，同时在这一端点，只提出解在 $x=0$ 的近旁是有界的这一条件，以代替确定的边值条件。由此得到方程(25)的解在 $x=0$ 有确定的有限值。

我們从前也已屢次地遇到过这一类的边值問題。把(25)式的兩边乘以 x，就可把方程改写成通常的形式：

$$\frac{d}{dx}(xy')+\left(\lambda x-\frac{n^2}{x}\right)y=0, \tag{26}$$

并假設 n 是正的。

格林函数的决定方法如前，但我們以格林函数在 $x=0$ 时为有限的要求来代替在端点 $x=0$ 的边值条件。方程 $L(y)=0$ 是尤拉方程 [II; 42]，它有綫性無关的解 x^n 与 x^{-n}。

如果注意到在端点 $x=0$ 的有限性的条件，在区間 $0\leqslant x\leqslant\xi$ 中，我們就应取表示式 c_1x^n 为格林函数，而在区間 $\xi\leqslant x\leqslant 1$ 中，我們就应作起所指出兩个解的适当的綫性組合，使得它在 $x=1$ 时化为零，这就是，在这区間中，应取表达式 $c_2(x^n-x^{-n})$ 为格林函数。常数 c_1 与 c_2 照例是从格林函数的連續性及它的导数在 $x=\xi$ 时的躍度等条件所决定的。这就給出如下的公式：

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2n}\left[\left(\dfrac{x}{\xi}\right)^n-(x\xi)^n\right] & (x\leqslant\xi)\\[2ex] \dfrac{1}{2n}\left[\left(\dfrac{\xi}{x}\right)^n-(x\xi)^n\right] & (\xi\leqslant x).\end{cases}$$

完全与从前一样，非齐次方程 $L(y)=-f(x)$ 有唯一的滿足上述边值条件的解，并且这个解由公式

$$y(x)=\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

所确定。[176] 中的論述指出，所有的特征值均为正。置 $\lambda=\mu^2$，决定特征值的超越方程就是 $J_n(\mu)=0$，而特征函数就是 $\varphi_n(x)=c_nJ_n(\mu_n x)$。在 $n=0$ 时，方程 $L(y)=0$ 有綫性無关的解 $y_1(x)=1$ 与 $y_2(x)=\lg x$，而决定格林函数的公式是：

$$G(x,\xi)=\begin{cases}-\lg\xi & (x\leqslant\xi)\\ -\lg x & (\xi\leqslant x).\end{cases} \tag{27}$$

还可注意到，在当前的情形下，公式(9)給出：

$$y(x)=\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi=-\lg x\int_0^x f(\xi)d\xi-\int_x^1 f(\xi)\lg\xi\, d\xi$$

而且可以直接驗証，这一函数滿足方程 $L(y)=-f(x)$ 与边值条件。从方程(26)就可直接得到：在所論情况下，$r(x)=x$。在把我們的边值問題化到积分方程时，就得到核 $G(x,\xi)\sqrt{\xi x}$，它在整个正方形上除了頂点 $x=\xi=0$ 以外都是連續的。

这一积分方程的特征函数就是 $\varphi_n(x)=c_n\sqrt{x}J_0(\mu_n x)$，我們就有展为絕对且一致收斂的富里埃級数：

$$G(x,\xi)\sqrt{\xi x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}。$$

除以 $\sqrt{\xi x}$ 之后，就得到：

$$G(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n^2J_0(\mu_n x)J_0(\mu_n\xi)}{\lambda_n},$$

而对这級数，我們只能断定它在区間 $[\varepsilon,1]$ 为一致收斂，这里 ε 是任意已給的正数。由于标准化的条件，常数 c_n 可由公式

$$c_n^2=\frac{2}{J_1(\mu_n)}$$

来决定 [III$_2$; 145]。这时还可注意到，由公式(27)所决定的函数 $G(x,\xi)$，它在点 (x,ξ) 趋向于正方形的頂点 $(0,0)$ 时趋于無限大。在这时，除掉以上所指出的特异性以外，我們还有另一特异性，即是 $r(x)=x$ 在一端 $x=0$ 时也变为零。

在第五卷我們要詳細研究在区間端点有特异点的方程的边值問題与在無穷区間的方程。

178. 推广的格林函数 現在来考察方程(1)在边值条件(2)下有特征值 $\lambda=0$ 的情形，也就是齐次方程 $L(y)=0$ 有一滿足边值条件的解 $y=\varphi_0(x)$。可以假設这个解已經是标准化的，我們以后也將这样做。現在，我們已經不能作出滿足在[172]中所指出的全部条件的格林函数，而要把格林函数的定义本身作某些变更。我們保持着以前的关于函数本身連續性，关于它的导数在 $x=\xi$ 的間断性以及关于滿足边值条件等条件，同时我們要求使函数 $G(x,\xi)$ 在区間 $[a,\xi]$ 与 $[\xi,b]$ 所应滿足的方程已不是齐次方程 $L(y)=0$，而是具有右端的方程：

$$L[G(x,\xi)]=\varphi_0(\xi)\varphi_0(x)。\tag{28}$$

如果 $y(x)$ 是这方程的某一解，又满足边値条件，那末，由于 $\varphi_0(x)$ 满足齐次方程与边値条件，和式 $y(x)+c\varphi_0(x)$ 对任何的 c 也都会满足方程(28)与边値条件；为了确定常数 c 起見。我們还引入新的补充条件，这就是函数 $G(x, \xi)$ 与函数 $\varphi_0(x)$ 的直交条件：

$$(29)\qquad \int_a^b [G(x, \xi)]\varphi_0(x)\,dx=0。$$

方程(28)的右端有其簡單的物理意义。如果 $\lambda=0$ 是問題的特征値，那末在等于零的頻率时就有共振，因而存在集中力时就不能得到有限的靜力位移。为了得出这种位移，除了集中力以外，我們还必須添上連續分布的力，它是由方程(28)的右端所表征的力。

类似于在 [172] 中所作的过程，就可作出推广的格林函数。設 $\omega(x)$ 是非齐次方程

$$(30)\qquad L(\omega)=\varphi_0(\xi)\varphi_0(x)$$

的某个解，而 $\varphi_1(x)$ 是对应的齐次方程的解，它与 $\varphi_0(x)$ 綫性無关，并使：

$$(31)\qquad p(x)[\varphi_0(x)\varphi_1'(x)-\varphi_1(x)\varphi_0'(x)]=1。$$

回忆起，非齐次方程的一般解是它的一个特解 $\omega(x)$ 与齐次方程的通解的和，我們就应置：

$$(32)\qquad \begin{aligned} G(x;\xi)&=\omega(x)+c_1\varphi_0(x)+c_2\varphi_1(x) \quad (x\leqslant\xi)\\ G(x;\xi)&=\omega(x)+c_3\varphi_0(x)+c_4\varphi_1(x) \quad (x\geqslant\xi)。\end{aligned}$$

这一函数应当满足边値条件(2)，如果注意到 $\varphi_0(x)$ 满足这些条件，就得到兩个等式：

$$(33)\qquad \begin{aligned} &\alpha_1\omega(a)+\alpha_2\omega'(a)+c_2[\alpha_1\varphi_1(a)+\alpha_2\varphi_1'(a)]=0\\ &\beta_1\omega(b)+\beta_2\omega'(b)+c_4[\beta_1\varphi_1(b)+\beta_2\varphi_1'(b)]=0,\end{aligned}$$

从其中可确定 c_2 与 c_4。因为 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_0(x)$ 綫性無关，它就不能满足条件(2)中的任何一个 [172]，所以 c_2 与 c_4 的系数不为 0。在 $x=\xi$ 的連續性条件与在这一点的导数的間断性条件导致下面

的兩个等式：

$$(c_1-c_3)\varphi_0(\xi)+(c_2-c_4)\varphi_1(\xi)=0$$
$$(c_1-c_3)\varphi_0'(\xi)+(c_2-c_4)\varphi_1'(\xi)=1:p(\xi),$$

由于 (31)，它們可以写成：

(34) $$c_1-c_3=-\varphi_1(\xi);\quad c_2-c_4=\varphi_0(\xi)。$$

余下还要满足条件(29)。常数 c_2 与 c_4 已由公式(33)所确定。(34)中的第一等式給出 $c_1=c_3-\varphi_1(\xi)$。代入公式(32)的第一式，就可以从条件(29)来决定 c_3，而 c_1 可按剛才所写的公式决定。所有的常数都已經决定，但我們还沒有考虑到(34)中的第二式。剩下来我們还要驗証如下的事实：按公式(33)所决定的 c_2 与 c_4 满足等式(34)中的第二式。

为此，把公式(14)写为：

$$\varphi_0(x)L(\omega)-\omega(x)L(\varphi_0)=\frac{d}{dx}[p(x)(\varphi_0\omega'-\omega\varphi_0')]。$$

沿基本区間 $[a, b]$ 积分这式子的兩端。注意到 $L(\varphi_0)=0$，方程(30)及函数 $\varphi_0(x)$ 是标准化的，就得到：

(35) $$\varphi_0(\xi)=[p(x)(\varphi_0\omega'-\omega\varphi_0')]_{x=a}^{x=b}。$$

我們所必須驗証(34)中的第二式，由于(33)，可以把它写成：

(36) $$\frac{\beta_1\omega(b)+\beta_2\omega'(b)}{\beta_1\varphi_1(b)+\beta_2\varphi_1'(b)}-\frac{\alpha_1\omega(a)+\alpha_2\omega'(a)}{\alpha_1\varphi_1(a)+\alpha_2\varphi_1'(a)}=\varphi_0(\xi)。$$

对于 $\varphi_0(x)$，我們已有边值条件：

(37) $$\alpha_1\varphi_0(a)+\alpha_2\varphi_0'(a)=0;\quad \beta_1\varphi_0(b)+\beta_2\varphi_0'(b)=0。$$

在 $x=a$ 与 $x=b$ 时写出 (31) 式，就能从所得的等式及等式(37)来决定 $\varphi_0(a)$，$\varphi_0'(a)$，$\varphi_0(b)$ 及 $\varphi_0'(b)$。把所得到的表达式代入已証得的等式 (35) 之中，就引导到等式 (36)。現在是在边值条件 $y(a)=y(b)=0$ 的情形下，即在 $\alpha_2=\beta_2=0$ 时进行計算。这时公式(35)可以改写成形式：

$$\varphi_0(\xi)=p(a)\omega(a)\varphi_0'(a)-p(b)\omega(b)\varphi_0'(b)。$$

在 $x=a$ 与 $x=b$ 时公式(31)給出:

$$p(a)\varphi_1(a)\varphi_0'(a)=p(b)\varphi_1(b)\varphi_0'(b)=-1,$$

这就是:

$$p(a)\varphi_0'(a)=-\frac{1}{\varphi_1(a)};\quad p(b)\varphi_0'(b)=-\frac{1}{\varphi_1(b)},$$

又把它們代到前面的公式中去,就得到:

$$\frac{\omega(b)}{\varphi_1(b)}-\frac{\omega(a)}{\varphi_1(a)}=\varphi_0(\xi),$$

这就是 $\alpha_2=\beta_2=0$ 时的等式(36)。

为了証明推广的格林函数的对称性,我們写出兩个方程:

$$L[G(x,\xi_1)]=\varphi_0(\xi_1)\varphi_0(x);\quad L[G(x,\xi_2)]=\varphi_0(\xi_2)\varphi_0(x)。$$

把第一式乘上 $G(x,\xi_2)$,第二式乘以 $G(x,\xi_1)$,逐項相減并沿基本区間积分。利用格林公式,边值条件与条件(29),就导到等式:

$$[p(x)(G(x,\xi_2)G'(x,\xi_1)-G(x,\xi_1)G'(x,\xi_2))]_{x=\xi_1+0}^{x=\xi_1-0}+$$
$$+[\qquad]_{x=\xi_2+0}^{x=\xi_2-0}=0,$$

如前,从此就可直接地得到 $G(\xi_1,\xi_2)=G(\xi_2,\xi_1)$。应指出,在沿基本区間积分时,我們应該像在 [174] 中一样,把这一区間分为三个部分。

現轉向于考察非齐次方程:

$$L(y)=-f(x),\tag{38}$$

这里 $f(x)$ 是已給的連續函数,而与 $\varphi_0(x)$ 相正交。方程(38)只可能有一个满足边值条件而与 $\varphi_0(x)$ 相正交的解。事实上,如果有兩个这样的解,那末它們的差应該满足齐次方程与边值条件,此即它应具有 $c\varphi_0(x)$ 的形式,因此就不可能与 $\varphi_0(x)$ 相正交。現在要証明,方程(38)的这一与 $\varphi_0(x)$ 相正交的唯一的解是由公式

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi\tag{39}$$

所决定。事实上，如果把积分的区間划分为 $[a, x]$ 与 $[x, b]$ 二部分，与从前一样 [173]，我們能証明：

$$L(y)=\int_a^b L[G(x, \xi)]f(\xi)d\xi-f(x)。$$

利用方程(28)，从此我們就能得到：

$$L(y)=\varphi_0(x)\int_a^b \varphi_0(\xi)f(\xi)d\xi-f(x),$$

而由这个公式可直接推出(38)式，这是因为，按条件，$f(x)$ 与 $\varphi_0(x)$ 相正交的緣故。因此，如果 $f(x)$ 与 $\varphi_0(x)$ 相正交，方程(38)有唯一的满足边值条件(2)且与 $\varphi_0(x)$ 正交的解，这个解由公式(39)所确定。

如果 $F(x)$ 是满足边值条件而有到二阶的連續导数且与 $\varphi_0(x)$ 直交的任意函数，那末，如置 $f(x)=-L(F)$，就能用公式(39)来表达 $F(x)$。为証明这一断言起見，我們只須肯定：所作的函数 $f(x)$ 与 $\varphi_0(x)$ 相正交。为此，对 $u=\varphi_0(x)$，$v=F(x)$ 写出格林公式(14)。注意到 $L(\varphi_0)=0$，及对 $\varphi_0(x)$ 与 $F(x)$ 的边值条件，把上述格林公式沿基本区間积分，就能發現函数 $\varphi_0(x)$ 与 $f(x)$ 的正交性，还要指出：对任意选定的連續函数 $f(x)$，公式(39)就給出与 $\varphi_0(x)$ 相正交的函数，这是因为核 $G(x, \xi)$ 具有这一性質的緣故。

轉到方程

$$L(y)=\frac{d}{dx}[p(x)y']-q(x)y=-\lambda y \tag{40}$$

的边值問題，其边值条件为(2)。这一問題的每一与 $\varphi_0(x)$ 不同的特征函数，即对应于非零的特征值的特征函数应当与 $\varphi_0(x)$ 正交。并且，由于注意到上述的所有的結果，我們就見到，所提出的边值問題(除掉函数 $\varphi_0(x)$ 以外)，与积分方程

$$y(x)=\lambda\int_a^b G(x, \xi)y(\xi)d\xi \tag{41}$$

相等价。现在轉到所写方程按特征函数展开的定理。我們必須闡

明函数依核来表达的可能性問題。以上我們已看到，每一有到二阶連續导数的函数，如又滿足边值条件且与 $\varphi_0(x)$ 正交，那末，它就可以依核来表达。因此，对于任一这样的函数，我們就会有依方程(41)的特征函数展开的絕对且一致收斂的富里埃級数。还須指出：因为方程(41)的所有的特征函数与 $\varphi_0(x)$ 正交，所以被展开的函数的与 $\varphi_0(x)$ 的正交性这一补充条件是必要的。从剛才的事实可以直接推知：方程(41)的核不是完备的。照例，在上述展开式的定理中，可以用二阶导数的分段連續性来代替它的連續性。

另外还要指出一个較初等的方法，来考察 $\lambda=0$ 是特征值的情形。方程(41)会有絕对值最小的特征值，設 m 为它的絕对值，在区間 $[-m, +m]$ 的內部就只有所論的边值問題的唯一的特征值 $\lambda=0$。在所論区間取任一不等于零的数 λ'，在方程(40)中，用一个新的参数 μ 来代替 λ，但 $\lambda=\lambda'+\mu$。在新选的参数下，方程(16)將具有形式：

$$\frac{d}{dx}[p(x)y']+[\lambda'-q(x)]y=-\mu y,$$

这时，由于上述事实，$\mu=0$ 就不是特征值，因此，根据用普通的格林函数所作的一切理論都成立。特別是，問題的特征函数將成为封閉系，此外还可由此直接推出，如果把 $\varphi_0(x)$ 加到方程(41)的特征函数上去，那末我們就得到封閉系。如下面的例子可以見到，引入新的参数，可能会使那个用来决定通常格林函数的方程的积分过程复杂化。在下一段中，我們应用推广的格林函数来考察导引到勒上特多項式的边值問題。在这情形下，函数 $p(x)$ 在区間的兩端都变为零，而解在端点具有限性的要求起着边值条件的作用。在这时，前述所有的事实保持有效。

对方程(1)与边值条件(2)，如我們所見，特征值 $\lambda=0$ 只可能对应一个特征函数。对周期性型的边值条件，例如 $y(a)=y(b)$

与 $y'(a)=y'(b)$，特征函数有可能是兩个。对于我們在后面將要說到的高于二阶的方程，它們也可能多于1个。在这些情形下，也可以如前地作出格林函数，在这时，方程(28)的右端須写作一个和式，它遍及特征值 $\lambda=0$ 所对应的特征函数的全体，并且，这些函数应假設为相互正交而标准化的。

179. 勒上特多项式 求出参数 λ 的值，使得方程

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)y']+\lambda y=0 \tag{42}$$

具有在区間 $[-1, +1]$ 的兩端都是有界的解。我們已經知道，这一問題的特征值是 $\lambda_n=n(n+1)$ [III$_2$ 102]，而正交标准化的特征函数是：

$$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x) \qquad (n=0, 1, \cdots), \tag{43}$$

这里，$P_n(x)$ 是勒上特多項式。不难見到，已不能再有其他的特征值与特征函数。如果还存在其他的特征函数，我們就会有与(43)中所有的函数相正交的特征函数，为了要証明这样的函数是不存在的，我們就只須証明，函数(43)構成封閉系。現在来証明它。設 $f(x)$ 是在 $[-1, +1]$ 上任意給定的連續函数，依維尔斯特拉斯定理 [II; 154] 对任意給定的正数 ε，可以找到这样的多項式 $Q(x)$，使得在整个区間 $[-1, +1]$ 内，成立不等式 $|f(x)-Q(x)|<\varepsilon$，从此直接可得：

$$\int_{-1}^{+1}[f(x)-Q(x)]^2dx<2\varepsilon^2。$$

設 m 是多項式 $Q(x)$ 的次数。因为函数 $\varphi_n(x)$ 恰好是 n 次的多項式，我們能把 $Q(x)$ 表达为多項式 $\varphi_0(x), \cdots, \varphi_m(x)$ 的綫性組合，而前面的不等式可以改写作

$$\int_{-1}^{+1}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{m}a_k\varphi_k(x)\right]^2dx<2\varepsilon^2$$

的形狀。如果取函数 $f(x)$ 关于函数系(43)的富里埃系数来代替这里的 a_k，那末所写的不等式更应成立。

注意到数值 ε 是任意小的，就可断定：如果把函数 $f(x)$ 用它的关于函数系(43)的富里埃級数的一段来迫近时，它的均方中值誤差趋向于零，即函数(43)确实組成一个封閉系。

回到方程(42)。在这时我们有：

$$L(y)=\frac{d}{dx}[(1-x^2)y'],$$

而直接地易見，函数(43)中的第一个，即常数 $\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$，滿足齐次方程 $L(y)=0$ 与边値条件(即是在区間的兩端有界)。換句話說，$\lambda=0$ 是特征値，这也可从 $\lambda_n=n(n+1)$ 在 $n=0$ 时得出。为了作出格林函数，我們写出非齐次方程(28)，在現在的情况下，它有形狀：

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)y']=\frac{1}{2}。$$

这方程的特解是 $y=-\frac{1}{4}\lg(1-x^2)$，而对应齐次方程的通解具有形狀 $c_1+c_2\lg\frac{1+x}{1-x}$。在 $x=\pm1$ 处保持有限的解分别具有如下的形式：

$$y_1(x)=-\frac{1}{4}\lg(1-x^2)+\frac{1}{4}\lg\frac{1+x}{1-x}+\alpha=-\frac{1}{2}\lg(1-x)+\alpha$$

$$y_2(x)=-\frac{1}{4}\lg(1-x^2)-\frac{1}{4}\lg\frac{1+x}{1-x}+\beta=-\frac{1}{2}\lg(1+x)+\beta,$$

这里 α 与 β 是某些常数。选擇这些常数，使得所作的解在 $x=\xi$ 时为連續，并使它与 $\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 正交。第一个条件給出：

$$-\frac{1}{2}\lg(1-\xi)+\alpha=-\frac{1}{2}\lg(1+\xi)+\beta,$$

于是可置

$$\alpha=-\frac{1}{2}\lg(1+\xi)+\gamma;\quad \beta=-\frac{1}{2}\lg(1-\xi)+\gamma,$$

于此 γ 是常数，它应由格林函数 $G(x,\xi)$ 与 $\varphi_0(x)$ 相正交这一条件所决定。我們有：

$$G(x,\xi)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\lg[(1-x)(1+\xi)]+\gamma & (x\leqslant\xi)\\ -\frac{1}{2}\lg[(1+x)(1-\xi)]+\gamma & (\xi\leqslant x)。\end{cases}$$

直交条件：
$$\int_{-1}^{+1}G(x,\xi)\varphi_0(x)dx=0,$$

即
$$\int_{-1}^{+1}G(x,\xi)dx=0,$$

給出 γ 的数值：$\gamma=\frac{1}{2}-\lg 2$，而最后，格林函数就由如下的等式所确定：

$$G(x, \xi)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\lg[(1-x)(1+\xi)]-\lg 2+\frac{1}{2} & (x\leqslant\xi)\\ -\frac{1}{2}\lg[(1+x)(1-\xi)]-\lg 2+\frac{1}{2} & (x\geqslant\xi)。\end{cases} \tag{44}$$

核(44)在基本正方形的頂点 $x=\xi=-1$ 与 $x=\xi=1$ 的附近成为無界。容易驗証只要函数 $g(\xi)$ 是連續的，每一依核所表达的函数

$$\int_{-1}^{+1}G(x, \xi)g(\xi)d\xi \tag{45}$$

就已經是連續的，如同在［174］中所作一样，对这样的函数，就成立按函数 $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 展开成絕对且一致收斂的富里埃級数的定理。每一在区間$[-1, +1]$上有到二阶連續导数的函数，如果又滿足表示 $f(x)$ 与 $\varphi_0(x)$ 的正交性的条件：

$$\int_{-1}^{+1}f(x)dx=0, \tag{46}$$

那末它就可按(45)式依核来表示，并且它可以展开为依函数 $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 的絕对且一致收斂的富里埃級数，这就是依勒让特多项式 $P_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 的富里埃級数。如果 $f(x)$ 不滿足条件(46)，那末只要把一般的展开的定理应用到滿足所述条件的函数

$$f_1(x)=f(x)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)dx$$

上去就可以了。对原来的函数 $f(x)$，我們得到依全体勒让特多项式的展开式，在其中也包括 $P_0(x)=$常数。

在这一情形下，核的富里埃級数具有形狀：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)P_n(x)P_n(\xi)}{2n(n+1)}。 \tag{47}$$

因为核是無界的，它不能在整个正方形 k_0 中一致收斂，对相当大的 n，我們可利用勒让特多项式的漸近表示式［III$_2$；163］：

$$P_n(\cos t)=\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin t}}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]+\delta_n\right\},$$

这里 δ_n 关于 t 一致地趋向于零，但 t 要屬于区間 $[\varepsilon, \pi-\varepsilon]$，$\varepsilon$ 是任一給定的正数。在区間$[-1, +1]$内部取定某一数值 ξ。对 $P_n(\xi)$，我們就有漸近估計 $|P_n(\xi)|\leqslant\frac{m_n}{\sqrt{n}}$，这里 m_n 是当 n 增加时保持有界的量。对在区間 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 中的任一 x，成立不等式 $|P_n(x)|\leqslant 1$［III；132］。从此可見，对于固定的 ξ，級数(47)关于 x 在区間$[-1, +1]$上一致且絕对收斂。函数(44)

与 $\varphi_0(x)$ 相正交，因而，級数 (47) 是它的按封閉函数系 (43) 的富里埃級数。从它的一致收斂性得出：它的和等于核 (44) [3]。从前面的論述也可以直接地推出：如果从正方形 k_0 中除去以頂点 $(-1, -1)$ 及 $(+1, +1)$ 为心、任意小的正数为半徑的兩个圓（这里也就除去了这兩个頂点），那末級数 (47) 也就在其中一致且絕对收斂。

現在用另一种方法来考察方程 (42) 的边值問題，这方法也在前段中指出过。按公式 $\lambda=\mu+p(p+1)$ 来引入一个新参数 μ 代替 λ，这里 p 是某一固定的非整数。方程 (42) 可改写成为：

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)y']+p(p+1)y+\mu y=0_{\circ}$$

值 $\mu=0$ 已非特征值，这时我們应置：

$$L(y)=\frac{d}{dx}[(1-x^2)y']+p(p+1)y_{\circ}$$

如果引入新变量 $t=\frac{1+x}{2}$ 代替 x，那末方程 $L(y)=0$ 化为具参数 $\alpha=-p$，$\beta=p+1$，$\gamma=1$ 的高斯方程 [III$_2$; 100, 101]。我們就有这方程的兩个解：

$$y_1(x)=F\left(-p,\ p+1,\ 1;\ \frac{1+x}{2}\right);\quad y_2(x)=cF\left(-p,\ p+1,\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right),$$

其中第一个解在 $x=-1$ 时为正則，而第二个解在 $x=1$ 时为正則。可以选擇常数 c，使得成立关系式：

$$y_1'(x)y_2(x)-y_2'(x)y_1(x)=\frac{1}{1-x^2}\circ$$

可以証明，这就給出 $c=\frac{\pi}{4\sin p\pi}$，因而，普通的格林函数就由下式确定：

$$(48)\quad G_1(x,\ \xi)=\frac{\pi F\left(-p,\ p+1,\ 1;\ \frac{1+x}{2}\right)F\left(-p,\ p+1,\ 1;\ \frac{1-\xi}{2}\right)}{4\sin p\pi}\quad (x\leqslant\xi)_{\circ}$$

在 $\xi\leqslant x$ 时，須把 x，ξ 交換位置。由于参数的变換，特征值就由公式 $\mu_n=n(n+1)-p(p+1)$ 所确定，而特征函数就是以前的 $\varphi_n(x)$。在这种情形下，核 (48) 的富里埃級数具有形狀：

$$G_1(x,\ \xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)P_n(x)P_n(\xi)}{2[n(n+1)-p(p+1)]},$$

也以与前一样，对任何固定的在 $[-1,\ +1]$ 內部的 ξ，这式子給出对区間中所有的 x 的格林函数的数值。还指出，在这种情形下，核 (48) 也是無界的。

180. 埃尔密脫函数与勒盖尔函数 对引导到埃尔密脫函数与勒盖尔函

数的边值問題，也可以作出格林函数。

埃尔密脱函数 $\psi_n(x)$ [III$_2$; 156] 是方程

$$y''+(\lambda-x^2)y=0$$

在基本区間 $(-\infty, +\infty)$ 中的特征函数，其条件是当 $x\to-\infty$ 与 $x\to+\infty$ 时 $y\to0$。特征値是：$\lambda_n=2n+1(n=0, 1, \cdots)$。把 λ 改为 $(\lambda-1)$，就可以改写方程为

$$L(y)+\lambda y=0$$

的形狀，这里 $$L(y)=y''-(1+x^2)y,$$

并且，特征値現在是由公式：$\lambda_n=2n+2(n=0, 1, \cdots)$ 来决定。方程

$$L(y)=y''-(1+x^2)y=0$$

有解 $y=e^{\frac{x^2}{2}}$，而如果按公式 $y=we^{\frac{x^2}{2}}$ 引入新的未知函数 w 来代替 y，我們就立即找到它的通积分：

$$y=C_1e^{\frac{x^2}{2}}\int_{C_2}^{x}e^{-v^2}dv,$$

这里 C_1 与 C_2 是任意常数，在 $x\leqslant\xi$ 时，我們应当选取在 $x=-\infty$ 时化为零的解：

$$y_1=ae^{\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{x}e^{-v^2}dv,$$

这里 a 是常数。在 $x\geqslant\xi$ 时，同样地可以选取：

$$y_2=be^{\frac{x^2}{2}}\int_{x}^{+\infty}e^{-v^2}dv,$$

这里 b 是新的常数。这些常数可以从 $G(x, \xi)$ 在点 $x=\xi$ 时的連續性与导数 $G'(x, \xi)$ 在这点的躍度来决定。最后得到：

$$G(x, \xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{x^2+\xi^2}{2}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-v^2}dv\int_{\xi}^{+\infty}e^{-t^2}dt & (x\leqslant\xi)\\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{x^2+\xi^2}{2}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\xi}e^{-v^2}dv\int_{x}^{+\infty}e^{-t^2}dt & (x\geqslant\xi)。\end{cases}$$

勒盖尔函数 $\omega_n(x)$ (見 [III$_2$; 160]，在 $s=0$ 的情形) 是方程

$$xy''+y'+\left(\lambda-\frac{x}{4}\right)y=0$$

在基本区間 $(0, +\infty)$ 的特征函数，条件是：在 $x=0$ 的近傍解有界，当 $x\to+\infty$ 时解趋向于零，特征値是：$\lambda_n=\frac{1}{2}+n$。如果用 $\lambda-\frac{1}{2}$ 来代替 λ，就可以把方程改写成为

$$L(y)+\lambda y=0$$

的形狀，这里　$L(y)=xy''+y'-\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{4}\right)y,$

特征値將为：$\lambda_n=n+1$ $(n=0, 1, \cdots)$。方程

$$L(y)=xy''+y'-\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{4}\right)y=0$$

有解 $y=e^{\frac{x}{2}}$，并且，进行了未知函数的代換 $y=we^{\frac{x}{2}}$ 之后，我們就能求出这一方程的通积分：

$$v=C_1e^{\frac{x}{2}}\left(\int_{+\infty}^{x}\frac{e^{-v}}{v}dv+C_2\right)。$$

在 $x\leqslant\xi$ 时，我們应当取在 $x=0$ 为正則的解：

$$y_1=ae^{\frac{x}{2}},$$

而在 $x\geqslant\xi$ 时，应取在 $x=+\infty$ 时为零的解：

$$y_2=be^{\frac{x}{2}}\int_{x}^{+\infty}\frac{e^{-v}}{v}dv。$$

如前一样地決定 a, b。最后就得到：

$$G(x,\xi)=\begin{cases}e^{\frac{x+\xi}{2}}\int_{\xi}^{\infty}\frac{e^{-v}}{v}dv & (x\leqslant\xi)\\ e^{\frac{x+\xi}{2}}\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-v}}{v}dv & (x\geqslant\xi)。\end{cases}$$

131. 四阶的方程　对于高阶方程，格林函数的概念及化到积分方程的方法也可以同样进行。考察樞軸的振动，我們就会得到如下的边値問題：求参数 λ 的数値，使得方程

$$y^{(\mathrm{IV})}-\lambda y=0 \tag{49}$$

在四个齐次的边値条件下有异于零的解。例如，如果樞軸在端点 $x=0$ 固定而在端点 $x=l$ 为自由，我們就得到边値条件：

$$y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0;\quad y''|_{x=l}=y'''|_{x=l}=0。 \tag{50}$$

对于非均匀的樞軸，我們会得到方程：

$$y^{(\mathrm{IV})}-\lambda r(x)y=0。 \tag{51}$$

格林函数 $G(x,\xi)$ 就相当于樞軸在集中力作用下的靜力弯曲。它由如下的四个条件来决定：(1)它本身以及其第一二兩阶导数为

連續；（2）在 $0<x<\xi$ 及 $\xi<x<l$ 时，它有到四阶的連續的导数且满足齐次方程 $G^{(IV)}(x, \xi)=0$；（3）对区間 $[0, l]$ 中的 ξ 的任何值，它满足边值条件；（4）在正方形的对角綫上，它的第三阶导数有一躍度，它是由条件

$$G'''(\xi+0, \xi)-G'''(\xi-0, \xi)=-1 \tag{52}$$

所决定。如果 $y(x)$ 是有到四阶的連續导数的函数，并且四阶的导数也可以只是分段連續，那末，从关系式 $y^{(IV)}=-f(x)$ 可以得到：

$$y(x)=\int_0^l G(x, \xi)f(\xi)d\xi, \tag{53}$$

反之，由这一等式所定义的函数有到四阶的連續的导数，还满足边值条件与方程 $y^{(IV)}=-f(x)$。因此，方程(49)的边值問題化为积分方程：

$$y(x)=-\lambda\int_0^l G(x, \xi)y(\xi)d\xi,$$

而对方程(51)，也化到积分方程：

$$y(x)=-\lambda\int_0^l G(x, \xi)r(\xi)y(\xi)d\xi。$$

在这一情况下，与以前一样，特征函数組成一封閉系統，而满足边值条件且有四阶的連續导数的每一函数，都可以按特征函数展为絕对一致收斂的富里埃級数。完全与在 [176] 中一样地可以証明，所有的特征值为正，因而，据麦色定理，我們也有核本身按特征函数的展开式。

現在要实际地作出兩端都固着的梱軸的格林函数，这就是，边值条件为 $y(0)=y'(0)=y(1)=y'(1)=0$，这时，我們假設 $r(x)=1$ 与 $l=1$。方程 $y^{(IV)}=0$ 的通积分乃是具任意系数的三次多項式。我們可以直接地写出仅在左端或仅在右端满足边值条件的解。它們就是解：

$$y_1(x)=x^2(a_1+a_2x);\quad y_2(x)=(x-1)^2(b_1+b_2x)。$$

任意常数由四个条件来决定，即从函数及其首先两阶导数的在 $x=\xi$ 时的連續性及其三阶导数在 $x=\xi$ 时的不連續性 (52) 来确定。作一些初等計算后，我

們就会得到在所論情形下的格林函数的表示式的最后形式：

$$G(x,\ \xi)=\frac{x^2(\xi-1)^2}{6}(2x\xi+x-3\xi)\qquad (x\leqslant\xi)。$$

在 $\xi\leqslant x$ 时，須把 x 与 ξ 易位。

182. B. A. 斯徳克洛夫的精确化的展开定理 在[175]中我們已得到依方程(16)的特征函数 $\varphi_n(x)$ 的展开式定理。我們取边值条件为：

$$(54)\qquad y(a)=y(b)=0。$$

在很一般的条件下，依函数 $\varphi_n(x)$ 的展开式定理是在 B. A. 斯捷克洛夫的著作中給出，且与积分方程的理論無关。与此有关的結果收集在他的“数学物理的基本問題”[Основные задачи математической физики, т. I (1922)]一書中。我們要举出他所得到的若干結果。

考察方程(16)，除了上述假設外，还假定 $q(x)\geqslant 0$。并且还設 $f(x)$ 是区間 $[a,\ b]$ 中的連續函数，有連續的一阶导数而又滿足边值条件(54)。我們并不假定二阶导数的存在性。先要証明一个預备的公式

$$(55)\quad \int_a^b [p(x)\varphi_k'(x)\varphi_l'(x)+q(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)]dx=0\ (\text{在 } k\neq l \text{ 时})。$$

实际上，进行分部积分，又利用特征函数所滿足的方程

$$(56)\qquad q(x)\varphi_k(x)-\frac{d}{dx}[p(x)\varphi_k'(x)]=\lambda_k\varphi_k(x),$$

就会得到

$$\int_a^b [p(x)\varphi_k'(x)\varphi_l'(x)+q(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)]dx=$$

$$=p(x)\varphi_k'(x)\varphi_l(x)\Big|_{x=a}^{x=b}+\lambda_k\int_a^b\varphi_k(x)\varphi_l(x)dx。$$

但由于 $\varphi_l(a)=\varphi_l(b)=0$，积分号以外的項等于 0，而后面的积分由于特征函数的正交性也是零。現在考察泛函：

(57) $$J(y)=\int_a^b[p(x)y'^2+q(x)y^2]dx,$$

并且用

(58) $$y=r_n(x)=f(x)-\sum_{k=1}^{n-1}c_k\varphi_k(x)$$

代入，这里 c_k 是函数 $f(x)$ 的富里埃系数：

(59) $$c_k=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx。$$

展开括弧并注意到(22)与(55)，我們得到：

$$J[f(x)-\sum_{k=1}^{n-1}c_k\varphi_k(x)]=\int_a^b[p(x)f'^2(x)+q(x)f^2(x)]dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k c_k^2-2\sum_{k=1}^{n-1}c_k\int_a^b[p(x)f'(x)\varphi_k'(x)+q(x)f(x)\varphi_k(x)]dx。$$

把最后的积分进行分部积分，且注意到条件 $f(a)=f(b)=0$ 及(56)，我們就得到

(60) $$J[f(x)-\sum_{k=1}^{n-1}c_k\varphi_k(x)]=$$

$$=\int_a^b[p(x)f'^2(x)+q(x)f^2(x)]dx-\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k c_k^2。$$

如果不仅假設 $p(x)>0$，而且还有 $q(x)\geqslant 0$，那末从这些公式中就直接得到貝塞尔不等式的类似：

(61) $$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k c_k^2\leqslant\int_a^b[p(x)f'^2(x)+q(x)f^2(x)]dx,$$

而在左边的級数为收斂。因为在 $q(x)\geqslant 0$ 时所有的 $\lambda_k>0$，所以这級数的所有項为正。

还指出，如果我們假設連續函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中除了有限个点 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 以外处处有导数，并且这导数除开在所提到那些点外处处連續，而且在那些点都有有限的左右極限(即第一类的不連續性)，那末不等式(61)的証明完全可以保持有效。在分部积分时只要把 $f'(x)$ 沿其連續的区間求积分，然后把这些积分相

加就可以了。

現在要証明，在以上的关于 $f(x)$ 的假設下，函数的富里埃級数

(62)
$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

在区間 $[a, b]$ 中正則收斂，这就是級数

(63)
$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k \varphi_k(x)|$$

在这区間中一致收斂。如果利用积分方程：

(64)
$$\varphi_k(x) = \lambda_k \int_a^b G(x, \xi) \varphi_k(\xi) d\xi,$$

我們可以把級数(63)表示为

(65)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |c_k \psi_k(x)|$$

的形狀，这里

(66)
$$\psi_k(x) = \int_a^b G(x, \xi) \varphi_k(\xi) d\xi$$

可以視作变量 ξ 的函数 $G(x, \xi)$ 的富里埃系数。利用不等式(61)，就可以写出：

(67)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k^2(x) \leqslant \int_a^b [p(\xi) G_\xi^2(x, \xi) + q(\xi) G^2(x, \xi)]^2 d\xi,$$

这里，$G_\xi(x, \xi)$ 是 $G(x, \xi)$ 关于 ξ 的导数，在积分号下的所有的函数为有界，而从(67)就推得：

(68)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k^2(x) \leqslant M,$$

这里 M 是某一常数。把 λ_k 改为 $\sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_k}$，而对級数(65)的一段应用柯西不等式：

$$\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k |c_k \psi_k(x)| \leqslant \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k c_k^2} \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k \psi_k^2(x)},$$

或者

$$\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k |c_k \psi_k(x)| \leqslant \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k c_k^2} \sqrt{M},$$

从这一不等式及以 $\lambda_k c_k^2$ 为項所成的級数的收斂性，可以推出，級数(65)在区間 $[a, b]$ 上一致收斂，即級数(62)正則收斂。从此直接推知，其和等于 $f(x)$ [3]。

現在要再举出展开定理的一个証明。对 $f(x)$ 的假設如前，但不必假定 $q(x) \geqslant 0$。这証明也是屬于 В. А. 斯捷克洛夫的。引用記号(58)，首先来証明，存在一个与 n 無关的常数 C，使得

$$\sigma_n = \int_a^b p(x) r_n'^2(x)\, dx \leqslant C。\tag{69}$$

我們有：

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \int_a^b p(x)\left[f'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k'(x)\right]^2 dx = \\ &= \int_a^b p(x)\left[f'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k'(x)\right] r_n'(x)\, dx = \\ &= \int_a^b p(x) f'(x) r_n'(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \int_a^b p(x) \varphi_k'(x) r_n'(x)\, dx。\end{aligned}$$

把最后的积分进行分部积分，并注意到(56)及 $r_n(x)$ 与函数 $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots, n-1)$ 的正交性，我們得到：

$$\sigma_n = \int_a^b p(x) f'(x) r_n'(x)\, dx + \int_a^b q(x) r_n(x) f(x)\, dx - \\ - \int_a^b q(x) r_n^2(x)\, dx,$$

从此，以 q_0 記 $|q(x)|$ 在区間 $[a, b]$ 的最大值，应用布尼亞柯夫斯基不等式，并在第一积分中改写 $p(x) = \sqrt{p(x)}\sqrt{p(x)}$，我們就会得到：

$$\sigma_n \leqslant \sqrt{\int_a^b p(x) f'^2(x)\, dx}\, \sqrt{\sigma_n} + q_0 \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx} \times \\ \times \sqrt{\int_a^b r_n^2(x)\, dx} + q_0 \int_a^b r_n^2(x)\, dx。$$

如果注意到封閉性条件：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b r_n^2(x)dx=0,$$

我們就得到具有形式

$$\sigma_n\leqslant c_1\sqrt{\sigma_n}+c_2$$

的关于 σ_n 的不等式，这里 c_1 与 c_2 都是正常数。从这一不等式可見，当 n 增加时，σ_n 保持有界，我們就得到(69)。

其次，从
$$\int_\xi^x \frac{d}{dt}r_n^2(t)\,dt=r_n^2(x)-r_n^2(\xi)$$

推出：
$$r_n^2(x)=r_n^2(\xi)+2\int_\xi^x r_n(t)r_n'(t)\,dt,$$

从此，应用布尼亞柯夫斯基不等式，并假設 $\xi<x$，就得到：

$$r_n^2(x)\leqslant r_n^2(\xi)+2\sqrt{\int_\xi^x r_n^2(t)\,dt}\sqrt{\int_\xi^x r_n'^2(t)\,dt}\leqslant$$
$$\leqslant r_n^2(\xi)+2\sqrt{\int_a^b r_n^2(t)\,dt}\sqrt{\int_a^b r_n'^2(t)\,dt}\,\text{。}$$

在 $x<\xi$ 的情形下，我們应当交换积分限 ξ 与 x。把式子的兩端按 ξ 沿区間 $[a,b]$ 求积分，就得到：

$$(b-a)r_n^2(x)\leqslant\int_a^b r_n^2(\xi)\,d\xi+2(b-a)\sqrt{\int_a^b r_n^2(t)\,dt}\sqrt{\int_a^b r_n'^2(t)\,dt}\,\text{。}$$

如果以 p_0 来記正的函数 $p(x)$ 在区間 $[a,b]$ 的極小値，由于(69)，就可以写出：

$$\int_a^b r_n'^2(t)\,dt\leqslant\frac{1}{p_0}\int_a^b p(t)r_n'^2(t)\,dt\leqslant\frac{C}{p_0},$$

而前一不等式給出：

$$r_n^2(x)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b r_n^2(t)\,dt+2\sqrt{\frac{C}{p_0}}\sqrt{\int_a^b r_n^2(t)\,dt}\,\text{。}$$

右边与 x 無关，而当 n 無限增大时趋向于 0，从此可得，在区間 $[a,b]$ 中 $r_n(x)$ 一致地趋向于零，这就是，級数(62)在这区間中一致收斂，其和为 $f(x)$。不假設 $q(x)\geqslant 0$ 也可以証明級数(62)正則

收斂。

183. 热傳导方程的富里埃方法的有效性 考察偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-q(x)u, \tag{70}$$

它对应于不均匀樞軸上热的傳播，其中并考慮到从樞軸表面的輻射。設 $a\leqslant x\leqslant b$，要在初始条件

$$u|_{t=0}=f(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b) \tag{71}$$

与边值条件

$$u|_{x=a}=0; \quad u|_{x=b}=0 \tag{72}$$

下，求方程(70)的解。应用富里埃方法，得到形式为

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k(x) \tag{73}$$

的解，这里 λ_k 与 $\varphi_k(x)$ 是方程

$$\frac{d}{dx}[p(x)y']+[\lambda-q(x)]y=0 \tag{74}$$

在边值条件

$$y(a)=y(b)=0 \tag{75}$$

的特征值与特征函数，而 c_k 为函数 $f(x)$ 的富里埃系数(59)。將假設 $q(x)\geqslant 0$，并且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有連續的导数，又滿足边值条件 (72)。应指出，因为 $q(x)\geqslant 0$，所以所有的 λ_k 都是正的。現在要証明，函数(73)滿足問題的所有的条件，即滿足 (71)，(72)，并且在 $t>0$ 时也滿足方程(70)。

如我們所証，級数(62)在区間$[a, b]$正則收斂。注意到 $\lambda_k>0$，就可以断定級数 (73) 在 $t\geqslant 0$ 与 $a\leqslant x\leqslant b$ 时为絕对且一致收斂。因而，其和是关于所指变量的連續函数，即

$$\lim_{t\to 0}u(x, t)=u(x, 0)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x)=f(x)。$$

这样就証明了初始条件(71)是滿足的。由于所有的 $\varphi_k(x)$ 滿足边

值条件 (72)，所以边值条件 (72) 也就能满足，余下来要在 $t>0$ 时驗証方程(70)。級数(73)的每一項，按其作法都满足方程(70)，我們只要証明級数 (73) 可以关于 x 逐項微分一次，关于 t 可以逐項微分兩次，但，为此，就只要証明級数

(76₁)　$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k c_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k(x);$$　(76₂)　$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k'(x)$$

与

(76₃)　$$\sum_{k=1}^{\infty}ce^{-\lambda\ _kt}\varphi_k''(x)$$

在 $t\geqslant\alpha, a\leqslant x\leqslant b$ 时一致收斂，这里 α 是任意的正数。因为 $k\to+\infty$ 时，$\lambda_k\to+\infty$，所以 $\lambda_k e^{-\lambda_k\alpha}\to 0$，而在 $t\geqslant\alpha$ 时 $\lambda_k e^{-\lambda_k t}\leqslant\lambda_k e^{-\lambda_k\alpha}$，这就是，存在与 t 無关的 N，使得 $t\geqslant\alpha$，$k\geqslant N$ 时 $\lambda_k e^{-\lambda_k t}<1$。从此，注意到級数(63)的一致收斂性，就得到級数(76₁)在 $t\geqslant\alpha, a\leqslant x\leqslant b$ 的一致收斂性。

完全同样的方法可以証明，在 $t>0$ 时，把級数(78)按 t 逐項微分任意次是可能的。为了研究后面的兩个級数，我們利用(7)式，把对 $\varphi_k(x)$ 的表达式(64)写成：

$$\varphi_k(x)=\lambda_k y_1(x)\int_a^x y_2(\xi)\varphi_k(\xi)d\xi+\lambda_k y_2(x)\int_x^b y_1(\xi)\varphi_k(\xi)d\xi,$$

从此，就有

$$\varphi_k'(x)=\lambda_k y_1'(x)\int_a^x y_2(\xi)\varphi_k(\xi)d\xi+\lambda_k y_2'(x)\int_x^b y_1(\xi)\varphi_k(\xi)d\xi$$

及

(77)　$$c_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k'(x)=y_1'(x)\int_a^x y_2(\xi)c_k\lambda_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k(\xi)d\xi+$$

$$+y_2'(x)\int_x^b y_1(\xi)c_k\lambda_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k(\xi)d\xi。$$

注意到 $t>0$ 时級数 (76₁) 在区間 $[a, b]$ 中关于 x 的一致收斂性，我們就可断言，級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}y_2(\xi)c_k\lambda_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k(\xi)\ 与\ \sum_{k=1}^{\infty}y_1(\xi)c_k\lambda_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k(\xi)$$

在区間 $[a, b]$ 一致收斂。从此，由于(77)，就可推出級数 (76_2) 的一致收斂性。余下来要研究級数 (76_3)。为此，利用特征函数的方程(56)。从它可推出：

$$c_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k''(x)=\frac{1}{p(x)}[-p'(x)c_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k'(x)+ + q(x)c_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k(x)-\lambda_k c_k e^{-\lambda_k t}\varphi_k(x)], \tag{78}$$

从此，由于級数(73)，(76_1)，(76_2) 对任意 $t>0$ 在区間 $[a, b]$ 的一致收斂性，也就可推得級数 (76_3) 的一致收斂性。因而我們就証明了，公式(73)所定义的函数 $u(x, t)$ 具有相应的偏导数，而在 $t>0$ 时满足方程(70)。因而我們得到如下的定理：

定理 如果在初始条件中的函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 中有連續的导数，又满足边值条件(72)，那末公式(73)所定义的函数 $u(x, t)$ 满足初始条件(71)，边值条件(72)，而在 $t>0$ 时，还满足方程(70)。則級数(73)可以关于 t 任意次、关于 x 兩次地逐項微分。

184. 振动方程的富里埃方法的有效性 代替方程(70)，我們来考察方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-q(x)u。 \tag{79}$$

这里，除了边值条件(72)以外，我們有兩个初始条件：

$$u|_{t=0}=f(x);\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=f_1(x), \tag{80}$$

而应用富里埃方法，就給出問題的解为如下形式：

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\sqrt{\lambda_k}\,t+b_k\sin\sqrt{\lambda_k}\,t)\varphi_k(x), \tag{81}$$

这里 λ_k 与 $\varphi_k(x)$ 的意义如前，而

$$a_k=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx;\quad b_k=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_a^b f_1(x)\varphi_k(x)dx。 \tag{82}$$

如同在[**183**]所做的一样，我們只要証明，級数(81)及其关于 x 及

t 逐項微分兩次所得到的級数对任意 t 在区間 $[a, b]$ 一致收斂就可以了。

把級数(81)分为兩个級数，而首先考察級数：

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\sqrt{\lambda_k}t\varphi_k(x)。 \tag{83}$$

注意到，k 充分大时 $\lambda_k>1$，可以断言：在 k 充分大时，$\sqrt{\lambda_k}<\lambda_k$。

如果我們在对 $p(x)$，$q(x)$ 与 $f(x)$ 添加了某些条件之下証明了級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |a_k\varphi_k(x)| \tag{84}$$

在区間 $[a, b]$ 一致收斂，而从此，用几乎是与 [183] 中相同的論述，我們就能証明上述的关于級数 (81) 的逐項可微分性的一切的論断。

实际上，因为 $\lambda_k\to+\infty$，对于級数(83)本身，这一点是显然的，又因为 k 充分大时 $\sqrt{\lambda_k}<\lambda_k$，这一点对于按 t 微分所得到的兩个級数也是显然的。在关于 x 微分一次的情形下，只要証明級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k\varphi_k'(x)|$$

的一致收斂性就可以了。由类似于(77)的公式

$$a_k\varphi_k'(x)=y_1'(x)\int_a^x y_2(\xi)\lambda_k a_k\varphi_k(\xi)d\xi+$$
$$+y_2'(x)\int_x^b y_1(\xi)\lambda_k a_k\varphi_k(\xi)d\xi$$

可以看到，从級数 (84) 的一致收斂性就可推出它。为了要証明級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k\varphi_k''(x)|$$

的一致收斂性，只要利用类似于(78)的公式(和上面一样地除去因子 $e^{-\lambda_k t}$ 后所得到的)就可以了。因此，所有的事情都归結到証明級

数(84)的一致收斂性。

利用方程(56),就得到:

$$\lambda_k a_k = \lambda_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b f(x)\left\{q(x)\varphi_k(x) - \frac{d}{dx}[p(x)\varphi_k'(x)]\right\}dx_{\circ}$$

如果假設 $f(x)$ 有到二阶的連續导数,又滿足条件(72),再分部积分,就得到:

$$\lambda_k a_k = \int_a^b \left\{q(x)f(x) - \frac{d}{dx}[p(x)f'(x)]\right\}\varphi_k(x)\,dx_{\circ}$$

如果我們假設,在积分号下花括弧内的表示式有連續的导数,又滿足边值条件(72),那末就可推得,級数(84)在 $[a, b]$ 中一致收斂。上述的要求归結如下:$f(x)$ 有到三阶的連續导数,$p(x)$ 有到二阶的連續导数,$q(x)$ 有連續的导数,且滿足如下的条件:在 $x=a$ 与 $x=b$ 时

$$\frac{d}{dx}[p(x)f'(x)] - q(x)f(x) = 0_{\circ} \tag{85}$$

由于 $f(x)$ 也应当滿足条件(72),我們可將(85)式写成:当 $x=a$ 与 $x=b$ 时

$$\frac{d}{dx}[p(x)f'(x)] = 0_{\circ} \tag{86}$$

現在考察級数:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\sqrt{\lambda_k}\,t\,\varphi_k(x), \tag{87}$$

这里 b_k 由等式(82)的第二式所决定。如前,只要証明級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |b_k\varphi_k(x)|_{\circ}$$

卽級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\,|b_k'\varphi_k(x)| \tag{88}$$

的一致收斂性就可以了，这里

$$b_k' = \int_a^b f_1(x)\varphi_k(x)\,dx。$$

如果假設 $f_1(x)$ 有到二阶的連續的导数，又满足条件(72)，与上面一样，我們就会得到：

$$\lambda_k b_k' = \int_a^b \left\{ q(x)f_1(x) - \frac{d}{dx}[p(x)f_1'(x)] \right\} \varphi_k(x)\,dx = b_k'',$$

这里 b_k'' 是在花括弧中的連續函数的富里埃系數。再以 $\varphi_k(x) = \lambda_k\psi_k(x)$ 代入，就得：

$$\sqrt{\lambda_k}\,|b_k'\varphi_k(x)| = \sqrt{\lambda_k}\,|b_k''\psi_k(x)|,$$

由此，依柯西不等式，成立

$$\sum_{k=m}^{m+p} \sqrt{\lambda_k}\,|b_k'\varphi_k(x)| \leqslant \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} b_k''^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k\psi_k^2(x)},$$

由于注意到(68)，这就是：

$$\sum_{k=m}^{m+p} \sqrt{\lambda_k}\,|b_k'\varphi_k(x)| \leqslant \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} b_k''^2} \cdot \sqrt{M}。$$

但是，由項 $b_k''^2$ 所組成的級数收斂，从上面的不等式直接可推知級数(88)为一致收斂的。这样，我們就得到如下的定理：

定理 如果 $p(x)$ 有到二阶的連續的导数，$q(x) \geqslant 0$，且有連續的导数，$f(x)$ 有三阶的連續导数，滿足条件(72)与条件(85)，而 $f_1(x)$ 有到二阶的連續导数，又滿足条件(72)，那末，公式(81)所定义的函数 $u(x, t)$ 滿足初始条件(80)，边值条件(72)以及方程(79)。并且，級数(81)可以关于 t 与 x 逐項微分兩次，而所得的級數对任何 t 在区間 $[a, b]$ 一致收斂。

185. 唯一性定理 在适当的边值条件下，我們已确立方程(70)与(79)的解的存在性。現証这种解的唯一性。

先論在 $q(x) \geqslant 0$ 时的方程(70)，并設解在 $t \geqslant 0$ 及 $a \leqslant x \leqslant b$ 时是連續的，面对任意的 $t > 0$，这解有关于 t 的連續导数，并且在区

間 $[a, b]$ 中它还有关于 x 的到二阶的連續导数。我們在[183]中所作的也就是具有这样性質的解。

解的唯一性的論斷等价于如下的事实：方程(70)的解 $u_0(x,t)$，如滿足齐次的初始条件：

$$u_0\big|_{t=0}=0 \qquad (a\leqslant x\leqslant b) \tag{89}$$

与边值条件(72)，并具有上述性質，那末当 $t>0$ 时它就恒等于零。

对 $u_0(x, t)$ 写出方程(70)，把它的兩边乘上 $u_0(x, t)$ 并关于 x 积分。这时設 $t>0$。因而，我們得到公式：

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b u_0^2 dx=\int_a^b u_0\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]dx-\int_a^b q(x)u_0^2 dx。$$

由于上述的 $u_0(x, t)$ 的性質、所有的运算都是可实現的。对右边的第一个积分用分部积分法，并注意到边值条件。这样，就会得到：

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b u_0^2 dx=-\int_a^b p(x)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 dx-\int_a^b q(x)u_0^2 dx\leqslant 0。$$

因而，t 的非負函数

$$\int_a^b u_0^2 dx \tag{90}$$

当 $t\geqslant 0$ 为連續，在 $t=0$ 时由于(89)式而等于零，且当 $t>0$ 时有不大于零的导数。从此可得：函数(90)在 $t>0$ 时恒等于零。于是在 $t>0$ 时也有 $u(x, t)\equiv 0$，这就是我們所要証明的。

現轉到在 $q(x)\geqslant 0$ 时方程(79)的唯一性定理的証明。我們假設，函数本身及其导数 u_t, u_{tt}, u_x, u_{xx} 在区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 及对任意的 t 連續。我們在[184]中所作的解就是具有这些性質。解的唯一性的論斷等价于如下的事实：如果方程(79)的解 $u_0(x, t)$ 有上述性質，滿足齐次的初始条件：

$$u_0\big|_{t=0}=\frac{\partial u_0}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0 \tag{91}$$

及边值条件(72)，那末它就恒等于零。

引入函数：

$$(92)\qquad v(x,\,t)=\int_0^t u_0(x,\,\tau)\,d\tau.$$

在变量的所論的数值范圍，它有連續的导数：$v_x,\ v_t,\ v_{xx},\ v_{xt},\ v_{tt}$。对 $u_0(x,\tau)$ 写下方程(79)，把它关于 τ 沿区間 $\tau=0$ 到 $\tau=t$ 积分。注意到(91)与(92)，我們就会得到：

$$\frac{\partial^2 v(x,\,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial v(x,\,t)}{\partial x}\right]-q(x)\,v(x,\,t).$$

在这方程中，把 t 改为 τ，在兩端乘以 $v_\tau(x,\tau)$，而按 τ 沿区間 $\tau=0$ 到 $\tau=t$ 积分。注意到(91)与(92)，就得到：

$$\frac{1}{2}v_t^2(x,\,t)=\int_0^t v_\tau(x,\,\tau)\,\frac{\partial}{\partial x}[p(x)\,v_x(x,\,\tau)]\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}q(x)\,v^2(x,\,t).$$

把兩端关于 x 在区間 $[a,\,b]$ 中积分，并把第二积分的积分次序加以变更：

$$\frac{1}{2}\int_a^b v_t^2(x,\,t)\,dx=\int_0^t\left\{\int_a^b v_\tau(x,\,\tau)\,\frac{\partial}{\partial x}[p(x)\,v_x(x,\,\tau)]\,dx\right\}d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b q(x)\,v^2(x,\,t)\,dx.$$

把在里面的一个积分进行分部积分，并注意到，由于(91)与(92)，积分号外的項等于零。就有：

$$\frac{1}{2}\int_a^b v_t^2(x,\,t)\,dx=-\int_0^t\left\{\int_a^b p(x)\,v_{\tau x}(x,\,\tau)\,v_x(x,\,\tau)\,dx\right\}d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b q(x)v^2(x,\,t)dx.$$

再变更积分的次序，关于 τ 进行积分，并注意到 $v_x(x,\,0)=0$，就得到：

$$\frac{1}{2}\int_b^a v_t^2(x,\ t)dx = -\frac{1}{2}\int_a^b p(x)v_x^2(x,\ \tau)d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b q(x)v^2(x,\ t)dx,$$

从此推出:

$$\int_a^b v_t^2(x,\ t)dx \leqslant 0,$$

因而 $v_t(x,\ t)\equiv 0$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$, $-\infty<t<+\infty$ 时成立。注意到(92)式,就得到 $u_0(x,\ t)\equiv 0$, 这就是我們所要証明的。

186. 特征值与特征函数的極值性質 回到方程

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + [\lambda - q(x)]y = 0 \tag{93}$$

或方程

$$L(y) = -\lambda y$$

的边值問題,这里

$$L(y) = \frac{d}{dx}[p(x)y'] - q(x)y.$$

在一般情形下的方程(1)也可以化为形式(93),只要我們用新的自变量

$$t = \int_a^x r(x)dx \tag{94}$$

来代替 x。这时方程(1)就改写成形式:

$$r(x)\frac{d}{dt}\left[r(x)p(x)\frac{dy}{dt}\right] + (\lambda r(x) - q(x))y = 0,$$

再把两边除以 $r(x)$, 我們就得到形狀(93)的方程。在这个变换中, $r(x)$ 在閉区間不等于零是个重要的假設。設方程(93)中的 $p(x)$ 在区間 $[a,\ b]$ 有 $p(x)>0$, 且設边值条件具有形狀:

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{95}$$

这时,如我們所已見的 [176], 特征值可通过对应的特征函数由公式:

$$\lambda_n = \int_a^b [p(x)\varphi_n'^2(x) + q(x)\varphi_n^2(x)]dx \tag{96}$$

来表达。并且，只可能存在有限个負的特征值。这就是說，可以假設特征値是以遞增的順序分布的，即 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots$。

所提的边値問題等价于积分方程：

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

这里 $G(x,\xi)$ 是算子 $L(y)$ 的在边値条件(95)下的格林函数。我們知道 [**26**]，第一个特征値 λ_1 是积分

$$\int_a^b\int_a^b G(x,\xi)\omega(x)\omega(\xi)dx\,d\xi \tag{97}$$

在滿足条件

$$\int_a^b\left[\int_a^b G(x,\xi)\omega(\xi)d\xi\right]^2dx=1 \tag{98}$$

的連續函数类 $\omega(x)$ 中的極小值。可是对于任意选择的連續函数 $\omega(\xi)$，积分

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)\omega(\xi)d\xi \tag{99}$$

所給出的函数 $y(x)$ 有到二阶的連續导数，且滿足边値条件 (95)。反过来說，具有剛才所說性質的函数 $y(x)$，可以用适当选擇的連續函数 $\omega(x)=-L(y)$ 的积分(99)来表示。

因之，根据(97)，(98)与(99)，就可断言，λ_1 是积分

$$-\int_a^b L(y)y\,dx \tag{100}$$

的在函数类 $y(x)$ 中的最小值，而 $y(x)$ 是有到二阶連續导数的函数，滿足边値条件(95)并滿足条件：

$$\int_a^b y^2(x)dx=1。 \tag{101}$$

在积分 (100) 中进行分部积分，我們就看到函数 $y(x)$ 屬于刚才所說的函数类中时，在条件(101)下，λ_1 是积分

$$\int_a^b[p(x)y'^2+q(x)y^2]dx \tag{102}$$

的最小值。并且，由于(96)式第一个特征函数 $y=\varphi_1(x)$ 就給出积分 (102) 的最小值 λ_1。現轉到第二个特征值 λ_2。我們已知，如果对条件(98)还添上条件：

$$\int_a^b \omega(\xi)\varphi_1(\xi)d\xi=0, \tag{103}$$

λ_2 就是积分 (97) 的最小值。如果用公式 (99) 来确定 $y(x)$，那末[22]

$$\int_a^b y(x)\varphi_1(x)dx=\frac{1}{\lambda_1}\int_a^b \omega(\xi)\varphi_1(\xi)d\xi,$$

因而条件(103)等价于条件：

$$\int_a^b y(x)\varphi_1(x)dx=0。\tag{104}$$

因此，在有到二阶連續导数、滿足条件(95)的函数类 $y(x)$ 中，在补充条件(101)与(104)下，积分(102)的最小值就是 λ_2。

一般地說，特征值 λ_n 是积分(102)的極小值，但 $y(x)$ 是在有二阶連續导数的函数类中，并且它滿足边值条件 (95) 以及如下的补充条件：

$$\int_a^b y^2dx=1;\quad \int_a^b \varphi_k(x)y(x)dx=0\quad (k=1,2,\cdots,n-1)。\tag{105}$$

現在要証明，方程 (93) 是表示积分 (102) 在补充条件 (101) 下取極值的必要条件的尤拉方程。事实上[68]，我們应当作出函数：

$$F=p(x)y'^2+q(x)y^2-\lambda y^2$$

而对它写出尤拉方程

$$\frac{d}{dx}F_{y'}-F_y=0,$$

它实际上就重合于方程 (93)。現在考察在两个补充条件 (101) 与 (104) 下积分 (102) 的極值。在这情形下，我們应当作起輔助函数

$$F=p(x)y'^2+q(x)y^2-\lambda y^2-\mu\varphi_1(x)y,$$

而对于这一函数的尤拉方程具有形状

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + (\lambda - q(x))y + \frac{\mu}{2}\varphi_1(x) = 0。\tag{106}$$

現要証明，常数 μ 应当等于零，卽我們又得到方程(93)。为此，写出对于第一个特征函数的方程(93)：

$$\frac{d}{dx}[p(x)\varphi_1'(x)] + (\lambda_1 - q(x))\varphi_1(x) = 0。$$

把这一方程乘上 y，方程(106)乘上 $\varphi_1(x)$，所得的二方程逐項相减，再把这样所得的方程沿基本区間积分。注意到正交性条件(104)与第一个特征函数的标准性，我們就导得如下的关系式：

$$\frac{\mu}{2} = \int_a^b \left\{ y\frac{d}{dx}[p(x)\varphi_1'(x)] - \varphi_1(x)\frac{d}{dx}[p(x)y'] \right\} dx。$$

进行分部积分并利用边值条件，就可以不难断定所作的积分等于零，从此便可直接推出所要証明的 $\mu = 0$。一般地說，如果我們写出尤拉方程，它表示积分(102)在补充条件(105)下取極值的必要条件，我們就会如前同样地得到方程(93)。

到这里为止，我們只考察了 $r(x) \equiv 1$ 的情形。在一般情形下，我們假設 $r(x) > 0$，可以有完全相类似的結果。在这一般情形下，必須把补充条件(105)写作：

$$\int_a^b r(x)y^2(x)\,dx = 1;\tag{107}$$

$$\int_a^b r(x)\varphi_k(x)y(x)\,dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)。$$

为了要証实它，只要对一般的方程(1)进行自变量的变换(94)就可以了。这时，我們会得到形式为(93)的方程，对于这个方程，这結果是已証好的。如果变回到原来的自变量，我們就得到积分(102)与补充条件(107)。

还可指出，所有上述的事实，在边值条件为(2)的情况，也保持有效。

在求积分(102)的逐次極小值时，可以把問題对在区間 $[a, b]$

中不必具二阶而只有一阶連續导数的函数类中进行。可以証明，在这問題的更广泛的提法下，仍旧是由函数 $\varphi_n(x)$ 来实現逐次的極小值。

考察弦振动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad\left(a=\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}\right),$$

这里 ρ 是綫性密度，T_0 为張力。我們有如下的动能与势能的表达式：

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l \rho u_t^2 dx;\qquad -U=\frac{1}{2}\int_0^l T_0 u_x^2 dx。$$

在正弦式系統 $U=\sin\omega t y(x)$ 下，我們得到 $y(x)$ 的方程为：

$$y''+\lambda y=0\qquad\left(\lambda=\frac{\omega^2}{a^2}\right),$$

如果弦的兩端是固定着的，那末对 $y(x)$ 的边値条件就是 $y(0)=y(l)=0$，而动能与位能可用公式

$$T=\frac{\rho\omega^2}{2}\sin^2\omega t\int_0^l y^2 dx;\qquad -U=\frac{T_0}{2}\sin^2\omega t\int_0^l y'^2 dx$$

来表示。这問題的第一个特征値归結为求积分

$$\int_0^l y'^2 dx$$

在条件

$$\int_0^l y^2 dx=1$$

下的最小値的問題。

187. 柯朗定理 从前一段的論述中可以推出：特征函数 $\varphi_n(x)$ 实現了积分 (102) 在条件 (105) 下的極小値，它的数値等于 λ_n。这样地来确定 λ_n 与 $\varphi_n(x)$ 时，我們必須知道所有前面的特征函数。这一情况使所述的極値原理在应用时發生困难。我們現在要来証明一个定理，它能够用来确定 λ_n 与 $\varphi_n(x)$ 而不必利用到前面的特征函数。設 $z_1(x),\cdots,z_{n-1}(x)$ 是任意的在区間 $[a,b]$ 連續的函数。我們提出求积分

$$\int_a^b [p(x)y'^2+q(x)y^2]dx \tag{108}$$

在补充条件下：

$$\int_a^b r(x)y^2dx=1;\quad \int_a^b r(x)z_k(x)ydx=0 \tag{109}$$
$$(k=1, 2, \cdots, n-1)$$

的最小值問題，而 $y(x)$ 取滿足边值条件、有二阶連續导数的函数类中的函数。我們虽然事先并不知道在所提条件下最小值是否能达到，但总可以談論到这个积分的下确界的数值。自然，这个下确界与函数 $z_k(x)$ 的选擇有关。我們用 $m(z_1, \cdots, z_{n-1})$ 来記它。現在我們来証如下的柯朗定理：对于任意选擇的連續函数 $z_k(x)$，数 $m(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 不超过特征值 λ_n。如果对任意选擇的函数 z_k，我們总能够作出滿足条件(109)及所有其余要求的函数 $y(x)$，使得对应于它的积分(108)的值不超过 λ_n，那末定理也就証明好了。我們將求形式为

$$y=c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x) \tag{110}$$

的函数 $y(x)$，这里 $\varphi_k(x)$ 是边值問題的特征函数，c_k 就是我們現在要去决定的常数。由于函数 $\varphi_k(x)$ 是标准化的，条件(109)中的第一式化为等式：

$$c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2=1。 \tag{111}$$

其余 $(n-1)$ 个条件給出 n 个未知数 $c_1, \cdots, c_n$ 的齐次方程組，它包括有 $n-1$ 个方程。如所知 [**III; 10**]，这样的方程組有不同于零的解。每一个这样的解可以乘上任意的常数因子，这常数因子可以选擇得使等式(111)实現。因此，借助于公式(110)，可以作出有到二阶的連續导数，滿足边值条件及所有补充条件(109)的函数。余下只是把表示式(110)代入到积分(108)而来証明这一积分之值 $\leqslant\lambda_n$。进行了上述的代入之后，在积分号下包含平方項 $\varphi_k^2(x)$ 和平方項 $\varphi_k'^2(x)$，以及乘积的項 $\varphi_k(x)\varphi_l(x)$ 与 $\varphi_k'(x)\varphi_l'(x)$。但在 $r(x)$ 不等于1时也可以与在 [**182**] 中完全一样地証明公式：

$$\int_a^b [p(x)\varphi_k'(x)\varphi_l'(x)+q(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)]dx=0 \qquad (k\neq l)。$$

再注意到公式(22)，我們确信；把表示式(110)代入积分(108)就会导到表示式：

$$c_1^2\lambda_1+\cdots+c_n^2\lambda_n。$$

如果注意到 $\lambda_1<\cdots<\lambda_n$ 并利用公式(111)，我們就会得到：

$$c_1^2\lambda_1+\cdots+c_n^2\lambda_n\leqslant\lambda_n,$$

这就最后給出柯朗定理。

推論 如果我們取 $z_1=\varphi_1(x),\cdots,z_{n-1}=\varphi_{n-1}(x)$，那末如我們以上所見，在条件(109)下，积分(108)的最小値确实等于 λ_n，而且在 $y=\varphi_n(x)$ 时达到。因此我們可以說：λ_n 是积分(108)在满足补充条件(109)下的所有可能的下界 $m_n(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 的最大値，其中 $y(x)$ 是在满足边値条件、有到二阶的連續导数的函数类中。并且，这些下确界中的最大値可以在 $z_k=\varphi_k(x)$ 与 $y=\varphi_n(x)$ 时达到。特征値 λ_n 的这种最大-最小的特性对于更广泛的一类偏微分方程也保持有效，且在研究特征値时起最基本的作用。

188. 特征値的漸近表示 在方程(1)中把 $p(x)$ 与 $q(x)$ 用新的函数 $p_1(x)$ 与 $q_1(x)$ 来代替，而在整个区間中 $p_1(x)$ 与 $q_1(x)$ 不比 $p(x)$ 与 $q(x)$ 小，即

$$p_1(x)\geqslant p(x);\quad q_1(x)\geqslant q(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b)\tag{112}$$
$$(p(x)>0;\quad r(x)>0)。$$

函数 $r(x)$ 保持不变。用 λ_n' 来記新方程的特征値，我們来証 $\lambda_n'\geqslant\lambda_n$。为此，我們利用剛才所証的特征値的性質。

在 $p(x)$ 与 $q(x)$ 受了所說的变化时，补充条件(109)保持不变，但积分(108)对固定的函数 y 来說只可能是增加的。因为在所說的系数变更时，函数集 y 仍保持不变，所以积分(108)的下确界 $m(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 总不会減小，因而数 $m(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 的最大値、即 λ_n 不会減小，这就是所要証的。

我們把 $p(x)$ 与 $q(x)$ 保持不变而用 $r_1(x)$ 来代替 $r(x)$，并且

在 $a \leqslant x \leqslant b$ 时 $r_1(x) \geqslant r(x)$。在这一情形下，就不能説变化着的函数 y 所組成的集合是不变的，这是因为，如果 y 满足 (109) 的第一个条件，那末經过以 $r_1(x)$ 来代替 $r(x)$ 的置換以后，我們就会有：

$$\int_a^b r_1(x) y^2 dx \geqslant 1.$$

但是，从函数 $y(x)$ 容易得出新的問題的可容許的函数。为此，只要选擇一个满足条件 $0 < \theta \leqslant 1$ 的数 θ，使得

$$\int_a^b r_1(x) \theta^2 y^2 dx = 1.$$

不难看出，函数 θy 也满足 (109) 的其余条件，然而是对于另一些函数 $z_k(x)$。事实上，因为 θ 是常数，从 (109) 就推出：

$$\int_a^b r_1(x) \frac{z_k(x) r(x)}{r_1(x)} \theta y \, dx = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1).$$

但这就是对于改变形状后的方程的 (109) 型的条件，并且，这里是用函数

$$\tilde{z}_k(x) = \frac{z_k(x) r(x)}{r_1(x)}$$

来代替函数 $z_k(x)$。每一函数系 $z_k(x)$ 会对应于一函数系 $\tilde{z}_k(x)$，反之亦然。要从变形方程的函数 θy 反过来得出原方程的同样函数时，可以把 θy 除以 θ。在用 θy 来代替 y 时，积分 (108) 的值不可能增加。因之，这些值的下确界也不可能增加。所以，作为这些下确界的最大值的数 λ_n，也不可能增加。因此，我們导得如下的命題：如果改变后的系数 $p_1(x)$ 与 $q_1(x)$ 满足条件 (112)，那末特征值不能减少，又如果改变后的系数 $r_1(x)$ 满足条件 $r_1(x) \geqslant r(x)$，那末 λ_n 不可能增加。

現在把所証的命題应用到当 n 値很大时特征値 λ_n 的漸近估計問題。設 (p, P)，(q, Q)，(r, R) 各是函数 $p(x)$，$q(x)$，$r(x)$ 在区間 $[a, b]$ 的最小値与最大值。把所給的方程 (1) 中的 $p(x)$，

$q(x)$ 与 $r(x)$ 各用 P, Q 与 r 来代替。所得的新的常系数方程

(113) $$Py''+(\lambda r-Q)y=0$$

的特征值 λ_n' 無論如何不会比原来方程的特征值 λ_n 小。但我們容易求到 λ_n'。为此，首先注意到，方程(113)只有当 $\frac{\lambda r-Q}{P}>0$ 时才可以有满足边值条件(95)的解。注意到这一点，我們就能把方程(113)的通積分写作：

$$y=C_1\cos\sqrt{\frac{\lambda r-Q}{P}}x+C_2\sin\sqrt{\frac{\lambda r-Q}{P}}x。$$

为將来的計算簡單起見，把区間 $[0, l]$ 取为基本区間 $[a, b]$。从边值条件 $y(0)=0$ 就推得 $C_1=0$，从第二个边值条件 $y(l)=0$ 就給出决定 λ 的方程，即为：

$$\sqrt{\frac{\lambda r-Q}{P}}l=n\pi,$$

由此得 $$\lambda_n'=\frac{n^2\frac{\pi^2}{l^2}P+Q}{r},$$

因而 $$\lambda_n\leqslant\frac{n^2\frac{\pi^2}{l^2}P+Q}{r}。$$

完全同样地，如果我們用 $p(x)$, $q(x)$ 与 $r(x)$ 分别地用 p, q 与 R 来代替，我們証到：

$$\lambda_n\geqslant\frac{n^2\frac{\pi^2}{l^2}p+q}{R},$$

因此，我們得到特征值的如下的估計：

$$\frac{n^2\frac{\pi^2}{l^2}P+Q}{r}\geqslant\lambda_n\geqslant\frac{n^2\frac{\pi^2}{l^2}p+q}{R}。$$

从此可得：当 n 相当大时，λ_n 与 n^2 是同阶的，而級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}$$

是收斂的。如果預先改变原来的方程，利用 λ_n 的最大—最小性，还可以得到更細致的估值。設 $p(x)$ 与 $r(x)$ 有到二阶的連續的导数，引入新自变量 t

(114) $$t=\int_a^x\sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}dx$$

来代替 x，新的未知函数

(115) $$u=\sqrt[4]{p(x)r(x)}\,y$$

来代替 y 而变换原来的方程。变量 x 的变化区間 $[a, b]$ 换为变量 t 的变化区間 $[0, l]$，这里：

$$l=\int_a^b\sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}dx。$$

$u(t)$ 的方程具有形式：

(116) $$\frac{d^2u}{dt^2}+(\lambda-s(t))u=0,$$

这里 $s(t)$ 是某一連續函数，它容易从方程（1）的已給的系数来确定。从条件 $y(a)=y(b)=0$ 可推得 $u(0)=u(l)=0$，反之亦然。所以原方程的特征函数可以由变换后的方程的特征函数依公式(115)来确定，与之不同的是，特征值却保持不变。为了决定方程(116)的特征值，我們应当提出积分

(117) $$\int_0^l[u'^2+s(t)u^2]dt$$

的極小問题。設 σ 是 $|s(t)|$ 在区間 $[0, l]$ 的最大值，这就是說

$$-\sigma\leqslant s(t)\leqslant\sigma \qquad (0\leqslant t\leqslant l)。$$

如果代替积分(117)，我們对积分

(118_1) $$\int_a^b(u'^2+\sigma u^2)dt$$

与

$$(118_2)\qquad \int_a^b (u'^2-\sigma u^2)\,dt$$

提出極小問題，又以 λ_n' 与 λ_n'' 作为对应的特征值，那末就会得到

$$(119)\qquad \lambda_n' \geqslant \lambda_n \geqslant \lambda_n''。$$

但是，数 λ_n' 与 λ_n'' 可从方程

$$u''+(\lambda-\sigma)u=0 \ \text{与}\ u''+(\lambda+\sigma)u=0$$

在边值条件 $u(0)=u(l)=0$ 下的解利用初等方法算到。因而我們有

$$\lambda_n'=\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\sigma; \qquad \lambda_n''=\frac{n^2\pi^2}{l^2}-\sigma。$$

由于(119)式，就得到：

$$(120)\qquad \lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}+A_n \qquad (|A_n|\leqslant\sigma)$$

或

$$(121)\qquad \lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}+O(1),$$

这里我們用的 $O(1)$，照例表示絕对值保持有界(对所有的 n) 的量。回到原来的变量，我們得到：

$$(122)\qquad \lambda_n=n^2\pi^2\left[\int_a^b\sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}dx\right]^{-2}+O(1),$$

因而

$$(123)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\lambda_n}=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_a^b\sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}dx\right]^2。$$

对于其他的边値問題，我們也可以得到特征值的这样确切的渐近表示。如果我們在其他边值条件下考察方程 $u''+\mu u=0$，这就会直接得到。

189. 特征函数的渐近表示 有了特征值的渐近表示，我們就可以得到特征函数的渐近表示，所利用的方法与我們以前用来导出埃尔密特与勒让特多項式的渐近表示式的方法相同 [**III₂**; **162, 163**]。

借助于上述的变量变换，我們可以把所論方程化为(116)型：

$$u''(t)+(\lambda-s(t))u(t)=0。$$

如我們所知，当 n 相当大时特征值 λ_n 是正的 [176]，今后我們假設，n 已充分大能使得 $\lambda_n>0$。設 $u_n(t)$ 是对应于特征值 λ_n 的特征函数。我們可写出：

$$u_n''(t)+\lambda_n u_n(t)=s(t)u_n(t),$$

而得到：

$$u_n(t)=a_n\sin\sqrt{\lambda_n}\,t+b_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,t+ \tag{124}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t s(\tau)u_n(\tau)\sin\sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau)\,d\tau。$$

对在右边的积分应用布尼亞柯夫斯基不等式：

$$\left[\int_0^t s(\tau)u_n(\tau)\sin\sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau)\,d\tau\right]^2\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^t u_n^2(\tau)\,d\tau\int_0^t s^2(\tau)\sin^2\sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau)\,d\tau,$$

从此推知对区間 $[0, l]$ 中每一个 t，有：

$$\left[\int_0^t s(\tau)u_n(\tau)\sin\sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau)\,d\tau\right]^2\leqslant\int_0^l s^2(\tau)\,d\tau, \tag{125}$$

这时我們已經注意到函数 $u_n(t)$ 是标准化的。

設 $\varphi_n(x)$ 是原来方程(1)的特征函数，它是从 $u_n(t)$ 借助于变换(114)与(115)而得到。从这些变换直接可得：

$$\int_a^b r(x)\varphi_n^2(x)\,dx=\int_0^l u_n^2(t)\,dt=1, \tag{126}$$

这就是 $u_n(t)$ 的普通的賦范与 $\varphi_n(x)$ 依权 $r(x)$ 的賦范等价。边值条件 $u(0)=0$ 給出 $b_n=0$，我們可以改写公式(124)为如下的形式：

$$u_n(t)=a_n\sin\sqrt{\lambda_n}\,t+\frac{m_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}}, \tag{127}$$

这里，由于不等式(125)，函数 $m_n(t)$ 对所有正整数 n 及在区间

$[0, l]$ 中所有的 t 保持有界，这就是說，存在正数 A，使得

(128) $$|m_n(t)| \leqslant A。$$

把 (127) 的兩边平方，依基本区間作积分并注意到函数 $u_n(t)$ 已經标准化，我們就可以写出

$$1 = a_n^2 \int_0^l \sin^2 \sqrt{\lambda_n}\, t\, dt + \frac{2a_n}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^l m_n(t) \sin \sqrt{\lambda_n}\, t\, dt + \\ + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^l m_n^2(t)\, dt。$$

所写的第一个积分可以計算到最終的結果，而其余兩个积分的絕对值对所有的 n 为有界。因之就得到：

(129) $$1 = \frac{l}{2} a_n^2 - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n}\, l}{4\sqrt{\lambda_n}} a_n^2 + \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}} p_n + \frac{1}{\lambda_n} q_n,$$

这里 p_n 与 q_n 当 n 增加时其絕对值保持有界。把右端的 a_n^2 移到括弧以外去：

$$1 = a_n^2 \left(\frac{l}{2} - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n}\, l}{4\sqrt{\lambda_n}} + \frac{1}{a_n\sqrt{\lambda_n}} p_n + \frac{1}{a_n^2 \lambda_n} q_n \right)。$$

如果当 n 增加时，我們会得到任意大的 a_i^2 的数值，那末对这样的 n，右边括弧中的表示式就会趋于極限 $\frac{l}{2}$，它是不为 0 的。而这一公式右边的乘积就不能等于一。从此我們可以得到結論：当 n 增加时 a_n 保持有界。注意到了这一点，我們就能把公式 (129) 改写为：

(130) $$1 = \frac{l}{2} a_n^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right),$$

这里，照例用 $O\left(\frac{1}{x_n}\right)$ 来記这样的量，使得 $x_n \cdot O\left(\frac{1}{x_n}\right)$ 当 n 無限增大时保持有界。我們可以如下改写上一公式：

$$a_n^2 = \frac{2}{l} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right),$$

从此
$$a_n=\sqrt{\frac{2}{l}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)。$$

代入(127)式，得到：

(131)
$$u_n(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_n}t+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right),$$

这里
$$O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)=\frac{p_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}},$$

而 $p_n(t)$ 的絕对值对所有的 n 及区間 $0\leqslant t\leqslant l$ 所有的 t 为有界。

从(121)推出：
$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\ 或\ \sqrt{\lambda_n}=\frac{n\pi}{l}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

从此
$$\sin\sqrt{\lambda_n}t=\sin\frac{n\pi}{l}t+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中 $O\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{q_n(t)}{n}$，而 $q_n(t)$ 的絕对值对所有 n 及 $[0, l]$ 中所有的 t 为有界。把它代入 (131) 式中，就得到标准化的函数 $u_n(t)$ 的如下的漸近表示式：

(132)
$$u_n(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}t+O\left(\frac{1}{n}\right)。$$

回到原来的变量，依据 (114) 与 (115)，我們就得到如下的漸近公式：

(133)
$$\varphi_n(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{l}\sqrt[4]{p(x)r(x)}}\sin\left[\frac{n\pi}{l}\int_a^x\sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}dx\right]+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中，据 (126) 特征函数 $\varphi_n(x)$ 是已經标准化的，而 $O\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{r_n(x)}{n}$，这里 $r_n(x)$ 的絕对值对所有 n 及 $[a, b]$ 中的所有 x 为有界。

190. 李茨方法　方程

(134)
$$\frac{d}{dx}[p(x)y']+[\lambda r(x)-q(x)]y=0$$

是积分

$$\int_a^b [p(x)y'^2+q(x)y^2]dx \tag{135}$$

在补充条件

$$\int_a^b r(x)y^2(x)\,dx=1$$

下的尤拉方程。又如我們所見，求累次的特征值及特征函数归結到求积分(135)的極值問題。这引导出在实用上方便的一种决定特征值与特征函数的近似方法。我們已經描述过这个方法（李茨方法）对求积分的絕对極值的应用。

我們选取綫性独立的函数序列 $v_1(x)$，$v_2(x)$，…，它們滿足边值条件，又作起綫性組合：

$$y=\sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} v_k(x) \tag{136}$$

而把它代入积分

$$J(y)=\int_a^b\left\{p(x)y'^2+[q(x)-\lambda r(x)]y^2\right\}dx_{\circ}$$

結果我們得到量 $a_k^{(n)}$ 的二次形式。把它关于 $a_k^{(n)}$ 的偏导数等于零，我們就导得含 n 个自变量的齐次方程組。把这一方程組的行列式等于零，我們就得到 λ 的 n 次方程。这方程的根 $\lambda_1^{(n)}$，…，$\lambda_n^{(n)}$ 可以取为問題的最初 n 个特征值的近似值。对其中的每一个，可以从所說的齐次方程組中求出一組数 $a_k^{(n)}$，而据 (136) 我們就可用这組数作对应的函数 y，它可以近似地采取为对应的特征函数。这一过程的收斂性实質上依賴于坐标函数 $v_k(x)$ 的选擇。在这一方面，我們只举出 H. M. 克雷洛夫院士的著作 (Memorial des Sciences Math. fasc. XLIX; 1931)的某些結果。

現設方程具有形狀：

$$y''+\lambda r(x)y=0 \qquad (r(x)>0)_{\circ} \tag{137}$$

边值条件取为最簡單的形式：$y(0)=y(1)=0$。如果置 $v_n(x)=\sqrt{2}\sin n\pi x$，那末真正的特征值 λ_m 与这一个数的第 n 个近似值可由下式估計

$$|\lambda_m-\lambda_m^{(n)}|\leqslant\frac{2\lambda_m^2\max r^{3/2}(x)}{(n+1)^2\pi^2\min\sqrt{r(x)}-2\lambda_m\max r^{3/2}(x)},$$

或者

$$\left|\frac{\lambda_m^{(n)}-\lambda_m}{\lambda_m}\right|\leqslant\frac{\lambda_m A}{(n+1)^2\pi^2-\lambda_m B}, \tag{138}$$

于此 $\quad A=[\max r(x)-\min r(x)]\sqrt{\dfrac{\max r(x)}{\min r(x)}}$；$B=2\max r(x)$。

在实际計算中，时常不利用三角函数而利用多項式。假定說，我們依然

有方程(137)，其边值条件为 $y(-1)=y(+1)=0$，并取 $v_n(x)=(1-x^2)x^{n-1}$（因子 $(1-x^2)$ 保証边值条件的滿足）。在 $v_n(x)$ 的如此选擇下，成立如下的估計：

(139) $$\left|\frac{\lambda_m^{(n)}-\lambda_m}{\lambda_m}\right|<\frac{\lambda_m^{(n)}\max r'(x)}{(n+1)(n+2)}。$$

只要假設函数 $r(x)$ 連續，这个估計就有效。如果这个函数还有連續的导数，那末可以得到更精确的估計，即：

$$\left|\frac{\lambda_m^{(n)}-\lambda_m}{\lambda_m}\right|<\frac{N\lambda_m^{(n)}}{(n+1)^2(n+2)},$$

于此
$$N=\left\{\max\left|\frac{r'(x)}{\sqrt{r(x)}}\right|+\sqrt{\lambda_m^{(n)}}\sqrt[4]{\frac{\max r^5(x)}{\min r(x)}}\right\}^2。$$

如果假設函数 $r(x)$ 有二阶連續导数，还可以得到更精确的估計。

191. 李茨的例子　举出近似地計算特征值与特征函数的一个例子。在这个例子中，特征值与特征函数可以求得准确的有限形式，而这就使我們能够闡明近似过程的收斂速度。下述例子可以在李茨的論文中找到(Journ für die reine und angew. Mathem. Bd. 135, 1909)。考察方程

$$y''+k^2y=0,$$

其边值条件为 $y(-1)=y(+1)=0$，且 k^2 起参数 λ 的作用。两端固定的弦的振动問題导来这样的边值問題。弦的基音是由解

$$y_1=\cos\frac{\pi x}{2};\qquad k_1=\frac{\pi}{2}$$

所給出，第一泛音为

$$y_2=\sin\pi x;\quad k_2=\pi,$$

第二泛音为
$$y_3=\cos\frac{3\pi x}{2};\qquad k_3=\frac{3\pi}{2}\text{等等。}$$

我們要近似地求具多項式形状的偶函数的解，这多項式也由 x 的偶次幂所排列而成。滿足边值条件的这样的多項式的一般形式为

$$y=(1-x^2)(a_0+a_1x^2+\cdots+a_nx^{2n})。$$

我們只限定两項：

$$y=(1-x^2)(a_0+a_1x^2)$$

并代入积分
$$J(y)=\int_{-1}^{+1}(y'^2-k^2y^2)\,dx,$$

就得到：

$$J(y)=\frac{8}{315}[(105-42k^2)a_0^2+(42-12k^2)a_0a_1+(33-2k^2)a_1^2]。$$

把它关于 a_0, a_1 的偏导数等于零，我們导出方程組：

$$(35-14k^2)a_0+(7-2k^2)a_1=0$$

$$(21-6k^2)a_0+(33-2k^2)a_1=0,$$

它的行列式等于零就給出：

$$k^4-28k^2+63=0,$$

它的根將是：　　$k_1^2=2.46744;\quad k_2^2=25.6$。

从上面所举出的精确解，可以得到：

$$k_1^2=\frac{\pi^2}{4}=2.467401100\cdots;\quad k_2^2=\frac{9}{4}\pi^2=22.207。$$

在第二次的近似中：

$$y=(1-x^2)(a_0+a_1x^2+a_2x^4)。$$

为了要决定 k^2，我們有方程：

$$4k^6-450k^4+8910k^2-19305=0,$$

从其中求出：　　$k_1^2=2.467401108\cdots;\quad k_2^2=23.301\cdots$。

把所得到的 k_1^2 的近似值代到用来决定 a_0, a_1, a_2 的方程組的系数中去，我們除了一个常数因子外求得了这些系数，而这个常数因子可以这样来决定，使所得的解满足条件：

$$\int_{-1}^{+1}y^2dx=1,$$

而精确解 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$ 是满足它的。用这样的方法我們导来如下的近似解：

$$y=(1-x^2)(1-0.233430x^2+0.018962x^4)。$$

y 与 $\cos\frac{\pi}{2}x$ 之間的差异的微小程度可由下表指出，在其中举出这些函数以 10 为底的对数的尾数值：

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\lg\cos\frac{\pi x}{2}$	994620	978206	949881	907958	849485	769219	657047	489932	194332
$\lg y$	994621	978212	949889	907952	849493	769221	657048	489978	194345

为 x 的奇函数的特征函数及其特征值，可以用如下形狀的函数

$$y=(1-x^2)(a_0x+a_1x^3+\cdots+a_nx^{2n+1})$$

来近似地求出它。

§2. 橢圓型方程

192. 牛頓勢函数 現在轉到偏微分方程边值問題的研究。我們从拉普拉斯方程开始，我們已經解决了这方程在圓内与球内的狄义赫利問題。在这一段中除了拉普拉斯方程以外，也还研究别的橢圓型的方程。对于这些方程，也可以提出一些問題，它們类似于拉普拉斯方程的狄义赫利問題与諾伊曼問題。在物理上，这些方程通常是由于考察靜力学的問題或穩定体系所产生的。例如我們記得，拉普拉斯方程本身就是由于考察靜电場或穩定热流等問題所得出的。

在研究拉普拉斯方程边值問題时，牛頓勢函数有着很大的意义。讓我們重提一下牛頓勢函数的基本定义，并且也引进一些新的概念。

設 D 是三維空間的有界区域，$\mu(N)$ 是这个区域点的連續函数，r 是从点 M 到区域 D 的变点 N 的距离。如所知，公式

$$v(M)=\iiint\limits_{D}\frac{\mu(N)}{r}\,dv \tag{1}$$

定义了体积質量的勢函数。同样地，公式

$$u(M)=\iint\limits_{S}\frac{\mu(N)}{r}\,ds \tag{2}$$

定义了沿曲面 S 分布的以 $\mu(N)$ 为密度的單層勢函数。如我們所知 [II; 87, 200] 在沒有質量的地方，函数 $u(M)$ 与 $v(M)$ 有一切阶的导数，并滿足拉普拉斯方程。为了后来的叙述起見，首先着重地指出对曲面 S 的一些限制，以后，我們还將假設这个曲面为閉的。这首先是由 A. M. 略普諾夫在他的著作“論与狄义赫利問題有关的某些問題”（О некоторых вопросах, связанных с задачей

Дирихле)(1898 年)中所叙述。这一著作在勢函数理論的發展上以及在拉普拉斯方程的边值問題的研究上起了杰出的作用。在这一段以及以后的几段中，我們依照这一著作来进行叙述。

对曲面 S 添上如下的要求：

1. 在 S 的每一点切平面是存在的。

2. 存在这样一数 $d>0$，使得：如 N_0 为 S 上的任意点，那末以 N_0 为心，以 d 或小于 d 的数为半徑的球把 S 分为兩个部分，其中之一是包含在球內部，另一是在球的外部，而与 N_0 点的法綫相平行的直綫，与 S 的在所述的球的內部的部分的交点不超过一个。

3. 如果 θ 是由 S 的兩点 N_1 与 N_2 的法綫所做成的銳角，$r_{1,2}$ 是这兩点的距离，那末存在与 N_1 及 N_2 的选擇無关的兩个正数 a 与 α，使得不等式

$$\theta \leqslant a r_{1,2}^{\alpha} \quad (\alpha \leqslant 1) \tag{3}$$

对 N_1 与 N_2 在 S 上的任意位置都成立。

满足这些条件的閉曲面通常称作略普諾夫曲面。將来我們还引进对 S 的某些假設，而現在要从所作的假設中引出若干推論。

从(3)直接推得，当切点沿曲面变位时，切平面是連續地变动的。为了后来的需要，現在指出第三个条件的一个重要推論。設 N_0 是曲面 S 的某一点。把坐标原点放到这一点，Z 軸放在沿 S 在 N_0 点的外法綫，X 軸与 Y 軸任意地放在切平面上。这时，就可以把包含在以 N_0 为心、以 d 为半徑的球 C_0 內部的 S 的片段的方程表示为显式的形狀：

$$\zeta = \zeta(\xi, \eta)。 \tag{4}$$

我們常用 (ξ, η, ζ) 来記曲面 S 上动点 N 的坐标，而用 (x, y, z) 来記空間任意点的坐标。上述的坐标軸称为在点 N_0 的局部坐标軸。

从切平面的存在性与它的連續变化的性質可以推得第一階导数 $\zeta_\xi(\xi, \eta)$ 与 $\zeta_\eta(\xi, \eta)$ 的存在性。我們假設 d 取为充分小。例

如，可采用条件：

(5) $$ad^{\alpha}\leqslant 1,$$

这就是在，曲面 S 在球 C_0 内部的一塊上的任意点 N 的法綫与点 N_0 的法綫間的交角 ϑ_0 不超过 $\frac{\pi}{2}$。用 r_0 記距离 $N_0N\,(r_0<d)$，就有：

(6) $$\cos\vartheta_0\geqslant 1-\frac{1}{2}\vartheta_0^2\geqslant 1-\frac{1}{2}a^2r_0^{2\alpha},$$

从此

(7) $$\frac{1}{\cos\vartheta_0}=\sqrt{1+\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2}\leqslant 1+a^2r_0^{2\alpha}\leqslant 2,$$

因此，由于(5)而成立：

(8) $$\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2\leqslant 2a^2r_0^{2\alpha}+a^4r_0^{4\alpha}\leqslant 3a^2r_0^{2\alpha}。$$

引入極坐标：

$$\xi=\rho_0\cos\theta;\quad \eta=\rho_0\sin\theta。$$

我們有：

$$\zeta_{\rho_0}^2=(\zeta_\xi\cos\theta+\zeta_\eta\sin\theta)^2\leqslant\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2,$$

从此，由于(8)式，而有

(9) $$|\zeta_{\rho_0}|\leqslant\sqrt{3}\,ar_0^{\alpha},$$

及

(10) $$|\zeta|\leqslant\sqrt{3}\,a\,d^{\alpha}\rho_0\leqslant\sqrt{3}\,\rho_0,$$

因此，

(11) $$r_0=\sqrt{\rho_0^2+\zeta^2}\leqslant 2\rho_0。$$

不等式(9)給出：

(12) $$|\zeta_{\rho_0}|\leqslant\sqrt{3}\,a2^{\alpha}\rho_0^{\alpha},$$

从此得

$$|\zeta|\leqslant\frac{\sqrt{3}\,2^{\alpha}}{\alpha+1}a\rho_0^{\alpha+1},$$

或者进而

(13) $$|\zeta|\leqslant 2a\rho_0^{\alpha+1},$$

这是因为在 $\alpha\leqslant 1$ 时 $2^{\alpha}\leqslant\alpha+1$。最后，由(6)式得出：

$$1-\cos\vartheta_0\leqslant 2^{2\alpha-1}a^2\rho_0^{2\alpha}。\tag{14}$$

再还給出 $\cos(\boldsymbol{n}, X)$ 与 $\cos(\boldsymbol{n}, Y)$ 的一个估値，这里 $\boldsymbol{n}$ 是 S 在点 N 的外法綫上的單位向量。根据(8)，我們有：

$$|\cos(\boldsymbol{n}, X)|=\frac{|\zeta_\xi|}{\sqrt{1+\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2}}\leqslant|\zeta_\xi|\leqslant\sqrt{3}\,ar_0^{\alpha},$$

完全相类似地有

$$|\cos(\boldsymbol{n}, Y)|\leqslant\sqrt{3}\,ar_0^{\alpha}。$$

我們还有：

$$\cos(\boldsymbol{n}, Z)=\cos\vartheta_0。$$

把以上所得到的估値的全体集起来：

$$\begin{gathered}|\zeta|\leqslant c\rho_0^{1+\alpha};\quad|\cos(\boldsymbol{n}, X)|\leqslant c\rho_0^{\alpha};\quad|\cos(\boldsymbol{n}, Y)|\leqslant c\rho_0^{\alpha}\\ 1-\cos(\boldsymbol{n}, Z)\leqslant c\rho_0^{2\alpha};\quad|\cos(\boldsymbol{n}, Z)|\geqslant\frac{1}{2},\end{gathered}\tag{15}$$

并且，为了記法上的方便起見，我們用 c 来記在所有的估値的式中出现的最大的常数。显然，如果把所有式子中右端的 ρ_0 用 r_0 来代替，它們保持有效。在 S 与 C_0 的交点，我們有 $r_0=d$，从 (11) 式可得：$\rho_0\geqslant\frac{1}{2}d$。因此我們見到：用以 Z 軸 (点 N_0 的法綫) 为軸，$\frac{1}{3}d$ 为半徑的圓柱面割曲面 S，所割下的部分在 C_0 内部，將用 σ_0 来表示曲面的这一部分。它在 XY 平面(在点 N_0 的切平面)上的投影 σ_0' 是圓：

$$\xi^2+\eta^2\leqslant\frac{d^2}{9}。\tag{16}$$

对所有的在 σ_0 中的点，公式(15)有效。还考察曲面 S 的一个部分 σ_1，它是在 S 上用以Z軸为軸，小于 $\frac{d}{2}$ 的 d_1 为半徑的圓柱体所割下来的。在 σ_1 上也成立 (15)。曲面塊 σ_1 在点 N_0 的切平面上的投影 σ_1' 是圓：

(17) $$\xi^2+\eta^2\leqslant d_1^2 \quad \left(d_1<\frac{d}{2}\right)。$$

我們要轉到單層勢函数的性質的研究，也还研究其他的勢函数——双層勢函数，它也与單層勢函数一样，可表示为沿曲面S的积分的形式。

193. 双層勢函数 在作出函数(1)与(2)时，拉普拉斯方程的奇解 $\frac{1}{r}$ 是起了基本的作用。現在要引入这一方程的另一奇解。設 N 是空間的某一点，l 是由点 N 所引出的定方向。在方向 l 上取長度为 ε 的綫段 NN'，而在点 N 置电荷 $\left(+\frac{1}{\varepsilon}\right)$，在点 N' 置电荷 $\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$。用 r 与 r' 来記变动点 M 到点 N 与 N' 的距离，我們就有所述的电荷的勢函数如下：

$$u_0(M)=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)=\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{r'-r}{rr'}=\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{r'^2-r^2}{(r'+r)rr'}。$$

我們还考察角 $\varphi=(r,l)$，这时 r 的方向是假設从点 M 到 N 的。

注意到明显的等式 $r'^2=r^2+\varepsilon^2+2r\varepsilon\cos\varphi$，我們就可写出：

$$u_0(M)=\frac{\varepsilon+2r\cos\varphi}{(r'+r)rr'},$$

并且在 $\varepsilon\to0$ 的極限情形下，我們就得到具單位强度，以 l 为方向的电偶極子的勢函数：

$$u_0(M)=\frac{\cos\varphi}{r^2}。$$

不难驗証，可以把这一勢函数写作 $\frac{1}{r}$ 依方向 l 的导数，这时微分是依点 M 所作的：

(18) $$\frac{\cos\varphi}{r^2}=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r}\right)。$$

事实上，用(ξ,η,ζ)来記点 N 的坐标，而(x,y,z)記点 M 的坐标，我們就得到：

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{(\xi-x)\cos(l,x)+(\eta-y)\cos(l,y)+(\zeta-z)\cos(l,z)}{r^3},$$

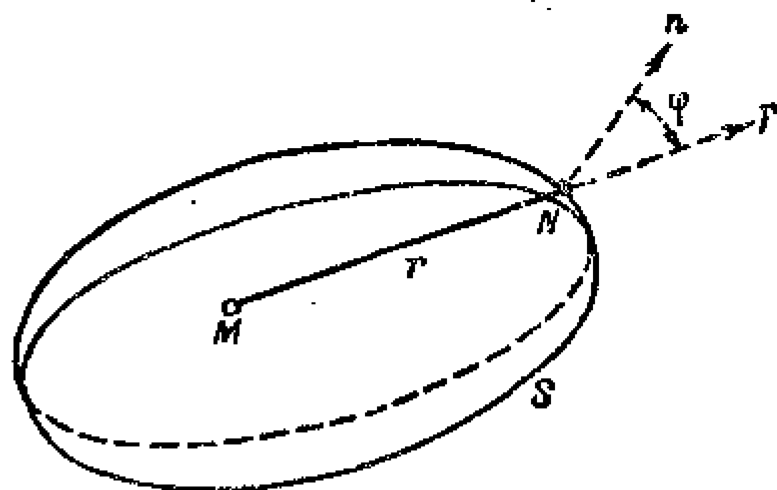
如果注意到公式：

$$\cos\varphi=\frac{\xi-x}{r}\cos(l,x)+\frac{\eta-y}{r}\cos(l,y)+\frac{\zeta-z}{r}\cos(l,z),$$

我們从这里就得到公式(18)。显然，函数(18)满足拉普拉斯方程，並且以点 N 为奇点。把曲面 S 上布满偶極子，使得它們的方向重合于曲面的外法綫 n，又設 $\mu(N)$ 为在曲面上点 N 的偶極子强度。这样，我們就导到双層势函数的概念，它就是由公式

$$w(M)=\iint_S \mu(N)\frac{\cos\varphi}{r^2}dS \quad [\varphi=(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})] \tag{19}$$

所定义的(圖9)。对不在 S 上的点，函数(19)有任意阶的导数，也满足拉普拉斯方程。並且它还可以关于点 M 在积分号下求导数。如果点 M 合于曲面 S 上的某一点 N_0，那末当 N 重合于 N_0 时，r 化为零，而积分(19)在这时为反常积分。現要証，它是有意义的。



(圖九)

只要研究被积函数在点 N_0 附近的曲面小塊 σ_0 上的情况就可以了。这时我們就可以利用在点 N_0 的局部坐标下的曲面方程(4)。

我們来求 $\cos\varphi_0=\cos(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})$ 的表示式，这里 $\boldsymbol{r}_0$ 是方向 N_0N:

$$\cos\varphi_0=\frac{\xi}{r_0}\cos(\boldsymbol{n}, X)+\frac{\eta}{r_0}\cos(\boldsymbol{n}, Y)+\frac{\zeta}{r_0}\cos(\boldsymbol{n}, Z) \tag{20}$$
$$((\boldsymbol{n}, Z)=\vartheta_0),$$

这里 (ξ, η, ζ) 为点 N 的坐标而 $r_0=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$。注意到以上所得到的估計(15)与明显的不等式：$|\xi|\leqslant\rho_0$; $|\eta|\leqslant\rho_0$; $\rho_0\leqslant r_0$，就得到：

$$\left|\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\right|\leqslant\frac{3c\rho_0^\alpha}{\rho_0^2}\quad(\rho_0=\sqrt{\xi^2+\eta^2}),$$

这就是

$$\left|\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\right|\leqslant\frac{b}{\rho_0^{2-\alpha}}, \tag{21}$$

这里 b 是常数。此外，对于連續函数 $\mu(N)$ 成立估計：

$$|\mu(N)|\leqslant A\quad(N\text{ 在 }S\text{ 上}), \tag{22}$$

这里常数 $A=\max|\mu(N)|$，但 N 是在 S 上变化的。把沿 σ_0 的积分改为沿曲面 σ_0 在 XY 平面上的投影 σ_0' 积分(σ_0' 是以 N_0 为心，$\frac{d}{3}$ 为半徑的圓)，我們就得到：

$$\iint_{\sigma_0'}\mu(\xi, \eta)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\frac{d\xi\, d\eta}{\cos\vartheta_0},$$

此外，由于(21)，(22)与(15)还成立对被积函数的如下的估計：

$$\left|\mu(\xi, \eta)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2\cos\vartheta_0}\right|\leqslant\frac{2Ab}{\rho_0^{2-\alpha}},$$

从此也就推出积分(19)当 M 在曲面 S 上时的收斂性。因此，函数(19)在全空間有定义。

考察在 $\mu(N)\equiv 1$ 时的积分 (19)。注意到 (18)，我們就可以写出：

$$w_1(M)=\iint_S\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS=-\iint_S\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}dS, \tag{23}$$

这里我們假設，沿 n 的方向的导数是关于点 N 所作的，这个 N 就是积分的变量。因此，在积分号之前我們置一負号。

首先假設点是在閉曲面 S 之外的。这时 $\frac{1}{r}$ 是 S 內部的調和函数，有直到 S 上为連續的任何阶导数。面由于調和函数的一个基本性質，我們就有 [II; 194]：

$$w_1(M) = -\iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = 0 \quad (M \text{ 在 } S \text{ 外})。$$

設点 M 在 S 內。在 S 的內部除去一以 M 为心、ρ 为半徑的小球 C。在 C 与 S 之間的空間部分 D' 中，函数 $\frac{1}{r}$ 为調和，并成立

$$\iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + \iint_C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = 0。$$

区域 D' 的外法綫指向于球 C 的中心，因此，

$$\left. \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right|_C = \frac{1}{\rho^2},$$

这样，前一公式可改写为形式：

$$\iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + \frac{1}{\rho^2} \iint_C dS = 0 \text{ 或 } \iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + 4\pi = 0,$$

从此

$$w_1(M) = -\iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = 4\pi \quad (M \text{ 在 } S \text{ 內部})。$$

最后，設点 M 合于在曲面上的某点 N_0。作以 N_0 为心、以 $d_1 < \frac{d}{2}$ 为半徑的球 C。把包含于 C 內部的曲面 S 的小塊 σ_1 用球面 C 的一部分 C' 来代替，使得点 N_0 在所得到的曲面外部。这个曲面是由 $(S-\sigma_1)$ 及球 C 的部分 C' 所構成。我們有：

(24)
$$\iint_{S-\sigma_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + \iint_{C'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = 0。$$

第二项的計算方法如前，它等于从球 C 的中心来看这个球面的一部分 C' 的立体角：

(25)
$$\iint_{C'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = \frac{1}{d_1^2} \iint_{C'} dS。$$

球 C 与 S 的交綫 l 具有如下的性質：由于 (15)，对这綫上的点的坐标 ζ 成立不等式 $|\zeta| \leqslant c d_1^{1+\alpha}$，而 l 上的点当 $d_1 \to 0$ 时無限地接近于 XY 平面。

从此可見，d_1 趋向于零时立体角 (25) 趋向于 2π，而公式 (24) 的極限就給出：

$$w_1(M) = -\iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = 2\pi \quad (M \text{ 在 } S \text{ 上})。$$

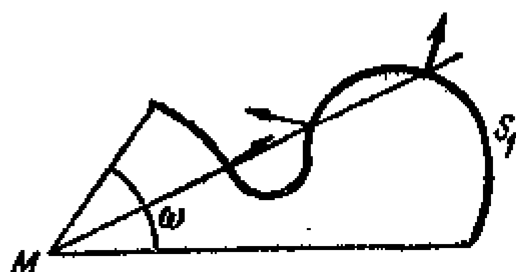
因此我們就有

(26)
$$\iint_S \frac{\cos\varphi}{r^2} dS = \begin{cases} 4\pi & (M \text{ 在 } S \text{ 內}) \\ 0 & (M \text{ 在 } S \text{ 外}) \\ 2\pi & (M \text{ 在 } S \text{ 上})。\end{cases}$$

再考察不閉的曲面 S_1 与积分

(27)
$$w_2(M) = \iint_{S_1} \frac{\cos\varphi}{r^2} dS,$$

这时我們假設点 M 在 S_1 之外。作以 M 为頂点、S_1 为底的錐面，并作以 M 为心、充分小的 ρ 为半徑的球面，設 σ_1 是它在所論錐面內部的部分。



(圖十)

考察由 S_1、σ 与所論錐面側面 Γ 所圍成的空間区域 D (圖

10)。(我們假設，所提到的这些曲面圍成空間的某一区域 D)。

在 D 内，函数 $\frac{1}{r}$ 为調和，因而：

$$\iint_{S_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + \iint_{\sigma_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + \iint_{\Gamma} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = 0。$$

在曲面 Γ 上

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{\cos\varphi}{r^2} = 0。$$

在 σ_1 上方向 n 与 r 相反，而 $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{1}{\rho^2}$。用 ω 来記从点 M 来看 S_1 的立体角，从前面的公式，我們得到：

$$\omega = -\iint_{S_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = \iint_{S_1} \frac{\cos\varphi}{r^2} dS,$$

这就是积分(27)給出从点 M 来看 S_1 的立体角。这时，S_1 上的方向 n 是設为朝 D 的外部的。从 M 出發的向徑可以与 S_1 相交于若干点。例如，如果有三个交点，那末在其中的兩个 $\cos\varphi>0$，而在第三个点 $\cos\varphi<0$ (圖 10)。所論的积分的元素，即 $\frac{\cos\varphi}{r^2} dS$ 是立体角單元 $d\omega$，它是从点 M 来看曲面元素的立体角，并且，在 $\cos\varphi>0$ 时，这个角是正的，在 $\cos\varphi<0$ 时这角为負的。如果 M 在 S_1 之上，那末如同我們以前对閉曲面所作一样，必須把积分(27)視为反常积分。从以上所指出的議論，也可以得出公式(26)。

在以后，我們假設曲面 S 具有如下的性質：对任意位置的点 M 成立不等式：

$$\iint_{S} \frac{|\cos\varphi|}{r^2} dS \leqslant c, \tag{28}$$

这里 c 是一个确定的正數。例如，假設存在正整数 k，使得对任意

位置的点 M，可以把 S 分为个数不多于 k 的各个小块，使得过 M 的直綫与各个小块的交点不超过一个，而在每一小块上 $\cos\varphi$ 不变号。在这情形下，如果取 $c=4\pi k$，条件(28)是滿足的。

公式(26)指明，在 $\mu(N)\equiv 1$ 时，当 M 穿过曲而 S 时双層势函数(19)的連續性就遭到中断。現对任意的連續密度来研究这一問題。

設 N_0 是曲面 S 上的定点。我們作起双層势函数：

$$w_0(M)=\iint\limits_S[\mu(N)-\mu(N_0)]\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS, \tag{29}$$

并証明，当 M 在点 N_0 穿过曲面 S 时，它保持为連續。設 ε 是已給的正数。取出曲面 S 的一个小块，它包含 N_0 在其内部，在其上成立不等式：

$$|\mu(N)-\mu(N_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{4c}\quad(N\text{ 在 }\sigma\text{ 上}), \tag{30}$$

这里 c 是条件(28)中的常数。把S分为兩塊——σ 与 $S-\sigma$，可記：

$$w_0(M)=w_0^{(1)}(M)+w_0^{(2)}(M), \tag{31}$$

这里

$$\begin{aligned} w_0^{(1)}(M)&=\iint\limits_\sigma[\mu(N)-\mu(N_0)]\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS;\\ w_0^{(2)}(M)&=\iint\limits_{S-\sigma}[\mu(N)-\mu(N_0)]\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS. \end{aligned} \tag{32}$$

对任意位置的 M，我們有：

$$|w_0^{(1)}(M)|\leqslant\iint\limits_\sigma|\mu(N)-\mu(N_0)|\frac{|\cos\varphi|}{r^2}\,dS,$$

从此，由于(28)与(30)，有

$$|w_0^{(1)}(M)|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}. \tag{33}$$

从(31)可得：

$$w_0(M)-w_0(N_0)=w_0^{(1)}(M)-w_0^{(1)}(N_0)+[w_0^{(2)}(M)-w_0^{(2)}(N_0)],$$

从而

$$|w_0(M)-w_0(N_0)|\leqslant|w_0^{(1)}(M)|+|w_0^{(1)}(N_0)|+$$
$$+|w_0^{(2)}(M)-w_0^{(2)}(N_0)|,$$

或者，由于(33)而有：

$$|w_0(M)-w_0(N_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+|w_0^{(2)}(M)-w_0^{(2)}(N_0)|。\tag{34}$$

在双層势函数 $w_0^{(2)}(M)$ 中，积分沿 $(S-\sigma)$ 进行，而点 N_0 在 σ 的內部，所以函数 $w_0^{(2)}(M)$ 在点 N_0 及其某个鄰域为連續（且有所有阶的导数）。因而对每一与 N_0 充分接近的点 M，我們有 $|w_0^{(2)}(M)-w_0^{(2)}(N_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，而由于(34)，成立 $|w_0(M)-w_0(N_0)|\leqslant\varepsilon$，由此，从 ε 的任意性推出，由公式(29)所定义的函数在点 N_0 的連續性。我們可以写出：

$$w_0(M)=w(M)-\mu(N_0)\iint_S\frac{\cos\varphi}{r^2}dS,\tag{35}$$

这里 $w(M)$ 是双層势函数(19)。首先設点 M 在 S 上，記它为 N。这时，由(26)就有：

$$w_0(N)=w(N)-2\pi\mu(N_0)\tag{36}$$

与

$$w_0(N_0)=w(N_0)-2\pi\mu(N_0),\tag{37}$$

这里 $w(N_0)$ 是积分(19)在点 N_0 的数值。現將在 S 上的点 N 趋近于 N_0。由于 $w_0(M)$ 的連續性而有：

$$w_0(N)\to w_0(N_0)=w(N_0)-2\pi\mu(N_0)。$$

轉到公式(36)的右端，我們就見到，这时 $w(N)$ 有極限 $w(N_0)$，这就是說，公式(19)所定义的函数 $w(M)$ 在曲面 S 上为連續函数。

現設点 M 在曲面 S 之內。

这时，由于(26)而有：

$$w_0(M)=w(M)-4\pi\mu(N_0)。\tag{38}$$

現令在 S 內部的点 M 趋向于 N_0。由于已証明过的 $w_0(M)$ 的連續性，我們就有：

$$w_0(M)\to w_0(N_0)=w(N_0)-2\pi\mu(N_0)。\tag{39}$$

轉向于公式 (38) 的右端，我們見到，这时 $w(M)$ 也有極限。用 $w_i(N_0)$ 来記这个極限。从 (38) 与 (39) 就得出：

$$w_i(N_0)-4\pi\mu(N_0)=w(N_0)-2\pi\mu(N_0),$$

这就是

$$w_i(N_0)=w(N_0)+2\pi\mu(N_0)。\tag{40}$$

从此可見，如果 $\mu(N_0)\neq 0$，函数 $w(M)$ 在点 N_0 的数值 $w(N_0)$ 与極限值 $w_i(N_0)$ 是不同的。如果点 M 在 S 之外，那末代替 (38) 而成立：

$$w_0(M)=w(M),$$

照以上的方法进行討論，就可以見到，当 M 在 S 的外面而趋向于 N_0 时，$w(M)$ 的極限是存在的。用 $w_e(N_0)$ 来記这个極限并利用 (39) 式，就有：

$$w_e(N_0)=w(N_0)-2\pi\mu(N_0)。\tag{41}$$

当 M 重合于 N_0 时，用 r_0 与 φ_0 来記 r 与 φ 的值，我們可以把 (40) 与 (41) 改写为以下形式：

$$\begin{aligned} w_i(N_0)&=w(N_0)+2\pi\mu(N_0)=\iint_S\mu(N)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}dS+\\ &\quad+2\pi\mu(N_0)\\ w_e(N_0)&=w(N_0)-2\pi\mu(N_0)=\iint_S\mu(N)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}dS-\\ &\quad-2\pi\mu(N_0)。\end{aligned}\tag{42}$$

这里 φ_0 是方向 $\overline{N_0N}$ 与 N 点的外法綫 $\boldsymbol{n}$ 的交角，即 $\varphi_0=(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})$。注意到这些公式以及函数 $w(N_0)$ 当 N_0 在 S 上变动的連續性，我們就可以断言，公式 (19) 所定义的函数 $w(M)$ 在 S 內連續，还可

以連續地延拓到 S。同样地，它在 S 外連續，也可以連續地延拓到 S。提醒一下，这个函数在 S 内与 S 外都有任意阶的导数。不難看出，当点 M 趋于無限远时 $w(M)$ 趋于零。实际上，記 D 为 S 外的点 M 到曲面 S 的最短距离[II; 89]，就有：

$$(43)\qquad |w(M)| \leqslant \iint_S \left|\mu(N)\frac{\cos\varphi}{r^2}\right| dS \leqslant \frac{A}{D^2}\cdot S \text{ 的面积。}$$

从此就推出，当 M 趋于無限远离时，$w(M)\to 0$。更精确地說，如果 O 是任意定点，那末对任意已給正数 ε，就存在这样的正数 B，使得，只要点 M 在以 O 为心、B 为半徑的球的外部，成立 $|w(M)|\leqslant\varepsilon$。

194. 單層勢函数的性質 如果 M 在 S 上，單層勢函数

$$(44)\qquad u(M)=\iint_S \frac{\mu(N)}{r}\,dS$$

是反常积分。設 M 重合于在 S 上的点 N_0。我們要証明，这时反常积分(44)是有意义的。如同在[193]一样，只要考察在 S 的包含 N_0 在内的一小塊 σ_0 上的积分就可以了。对 σ_0 利用局部坐标下的方程(4)，我們有：

$$\iint_{\sigma_0}\frac{\mu(N)}{r_0}\,dS=\iint_{\sigma_0'}\frac{\mu(\xi,\eta)}{r_0\cos\vartheta_0}\,d\xi\,d\eta。$$

由于(15)，(22)以及 $\rho_0\leqslant r_0$，我們得到对被积函数的如下估計：

$$\left|\frac{\mu(\xi,\eta)}{r_0\cos\vartheta_0}\right|\leqslant\frac{2A}{\rho_0},$$

从此直接可推出，当 M 在 S 上时积分(44)是收斂的。因此公式(44)对点 M 的任意位置定义了 $u(M)$。函数 $u(M)$ 对不在 S 上的点 M 是連續的。現証，$u(M)$ 对在 S 上的任一点 N_0 也是連續的。設 ε 是已給的正数，σ_1 是 S 的一部分，它是由不等式(17)所定义的。現証：可以选取适当小的数 d_1，使得在 N_0 的某一鄰域中

的任意位置的 M 满足不等式:

$$\left|\iint_{\sigma_1}\frac{\mu(N)}{r}dS\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}。\tag{45}$$

我們有:

$$\left|\iint_{\sigma_1}\frac{\mu(N)}{r}dS\right|\leqslant\iint_{\sigma_1'}\frac{A}{\rho_1}d\xi\,d\eta,\tag{46}$$

这里 σ_1' 为以 N_0 为心、d_1 为半徑的圓，ρ_1 是綫段 MN 在切平面上的投影 M_1N_1 的長度。假定說，M在以 N_0 为中心，d_1 为半徑的球的內部。这时 M_1 屬于圓 σ_1'，而且，如果我們在 (ξ,η) 平面上取一以 M_1 为中心、$2d_1$ 为半徑的圓 σ_1''，那末 σ_1'' 就会整个地包含 σ_1'，因而，由于(46)，有:

$$\left|\iint_{\sigma_1}\frac{\mu(N)}{r}dS\right|\leqslant A\iint_{\rho_1\leqslant 2d_1}\frac{d\xi\,d\eta}{\rho_1}=A\int_0^{2\pi}\int_0^{2d_1}\frac{\rho_1\,d\rho_1\,d\theta}{\rho_1}=4\pi\,d_1A。$$

現在只要这样固定 d_1，使不等式 $4\pi\,d_1A\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$ 成立，对于以 N_0 为心、d_1 为半徑的球內部的任意位置的点 M，我們得到估値 (45)。

接着，我們把函数(44)表达为形式:

$$u(M)=u_1(M)+u_2(M),$$

这里

$$u_1(M)=\iint_{\sigma_1}\frac{\mu(N)}{r}dS;\quad u_2(M)=\iint_{S-\sigma_1}\frac{\mu(N)}{r}dS,$$

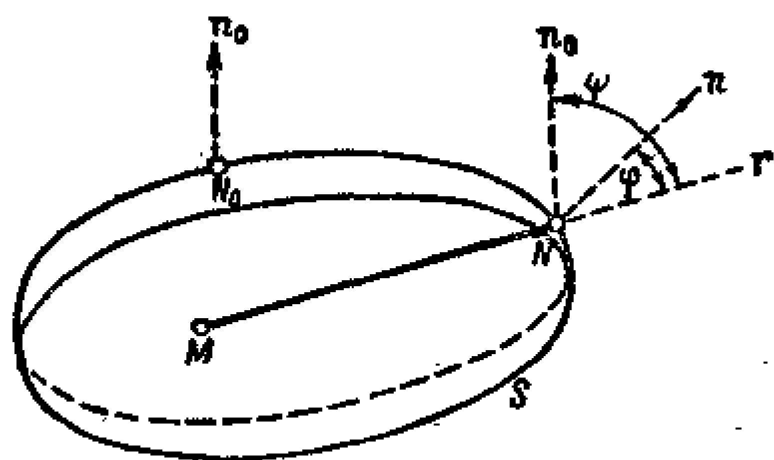
并且 $u_2(M)$ 在 N_0 点連續，而 $u(M)$ 在 N_0 点的連續性的証明可以完全照[193]中对函数(29)所作的証明一样来进行。因而，我們有如下的結果：單層勢函数(44)在全空間有定义，是全空間的連續函数。也十分相类似于[193]中的情形，可以証明，当点 M 趋于無限远离时，$u(M)\to 0$。

195. 單層勢函数的法綫导数　設 n_0 是曲面 S 上某一点 N_0 的外法綫方向。假設点 M 不在 S 上，作函数(44)沿方向 n_0 的导数。仅有因子 $\frac{1}{r}$ 与 M 有关，因而我們可以依照积分号下求导数的

法則来微分：

$$(47)\qquad \frac{\partial u(M)}{\partial n_0}=\iint\limits_S \mu(N)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_0}dS=\iint\limits_S \mu(N)\frac{\cos\psi}{r^2}dS。$$

要指出这一积分与定义双層勢函数的积分 (19) 之間的差别：在积分 (19) 中，$\varphi=(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})$，这里 $\boldsymbol{n}$ 是点 N 的外法綫單位向量，而 N 是积分的变点，而在积分 (47) 中，$\psi=(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}_0)$，这里 $\boldsymbol{n}_0$ 是在定点 N_0 的外法綫單位向量。这两种情形 r 都是方向 $\overline{MN}$(圖11)。



(圖十一)

現証，当 M 重合于点 N_0 时积分(47)是存在的。在这一情形我們把(47)写作：

$$(48)\qquad \iint\limits_S \mu(N)\frac{\cos\psi_0}{r_0^2}dS=\iint\limits_S \mu(N)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)}{r_0^2}dS,$$

这里 r_0 是距离 $|N_0N|$，角 $\psi_0=(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)$ 是方向 $\overline{N_0N}$ 与 $\boldsymbol{n}_0$ 間的夾角。接下去我們就証明，当 M 从曲面內部或外部沿法綫趋向 N_0 时，导数(47)有确定的極限，而对这些極限成立公式：

$$(49)\qquad \begin{aligned}\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i&=\iint\limits_S \mu(N)\frac{\cos\psi_0}{r_0^2}dS+2\pi\mu(N_0)\\ \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_e&=\iint\limits_S \mu(N)\frac{\cos\psi_0}{r_0^2}dS-2\pi\mu(N_0),\end{aligned}$$

这里，如同 [193] 中一样，記号 i 与 e 表示应当把 M 从內部或外部趋向 N_0 来取 $\frac{\partial u(M)}{\partial n_0}$ 的極限，而公式的左边仅仅表示这些極限的記号。

在以 N_0 为原点的局部坐标系統中，方向 $\boldsymbol{n}_0$ 重合于 Z 軸的方向，如前，用 (x, y, z) 記 M 的坐标，(ξ, η, ζ) 記 N 的坐标（都参考于所述的坐标系統）。照例，选取曲面 S 的一小塊 σ_0，把积分 (47) 写为：

$$\iint_{\sigma_1} \mu(N) \frac{\zeta - z}{r^3} dS。 \tag{50}$$

如果 M 重合于 N_0，那末 $z=0$，而积分采取形式：

$$\iint_{\sigma_1} \mu(N) \frac{\zeta}{r_0^3} dS = \iint_{\sigma_1'} \mu(\xi, \eta, \zeta) \frac{\zeta(\xi, \eta)}{r_0^3 \cos(\boldsymbol{n}, Z)} d\xi\, d\eta,$$

这里 ζ 按公式（4）化为 ξ, η 的函数。由于注意到 (15) 及不等式 $r_0 \geqslant \rho_0$，可直接地断言，所写的积分式子是有意义的。因而我們証明了积分 (50) 的存在。現轉到証明公式 (49)。

作积分 (47) 与用同一密度 $\mu(N)$ 所作的双層势函数間的差式：

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n_0} - w(M) = \iint_S \mu(N) \frac{\cos\psi - \cos\varphi}{r^2} dS。 \tag{51}$$

如果 M 不在 S 上，或者 M 重合于 N_0，所写出的积分是有意义的。

現証，当 M 在点 N_0 穿过曲面 S 时这一差式保持为連續。为此，如同前段一样，只要証明：沿由条件 (17) 所定义的曲面 S 的一小塊 σ_1 所写的积分的絕对值可以作到任意地小。在下面的估計中，我們假設 M 在点 N_0 的 S 的法綫上，卽在局部坐标系統下，$x=y=0$。这时就有：

$$(52)\qquad \frac{\cos\psi-\cos\varphi}{r^2}=-\frac{\xi}{r^3}\cos(\boldsymbol{n},X)-\frac{\eta}{r^3}\cos(\boldsymbol{n},Y)-\\ -\frac{\zeta-z}{r^3}(\cos\vartheta_0-1)。$$

注意到(15)式与估值

$$|\xi|\leqslant\rho_0;\quad |\eta|\leqslant\rho_0;\quad r\geqslant\rho_0\geqslant\frac{1}{2}r;\quad |\zeta-z|\leqslant r\leqslant 2\rho_0,$$

于此 $\rho_0=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ 为 $\overline{MN}$ 在 XY 平面上投影的長度，我們就得到：

$$\frac{|\cos\psi-\cos\varphi|}{r^2}\leqslant\frac{b_1}{\rho_0^{2-\alpha}},$$

这里 b_1 是某一常数。注意到(22)式，就有：

$$(53)\qquad \left|\iint_{\sigma_1}\mu(N)\frac{\cos\psi-\cos\varphi}{r^2}dS\right|\leqslant\iint_{\rho_0\leqslant d_1}\frac{2Ab_1}{\rho_0^{2-\alpha}}d\xi\,d\eta=\\ =2Ab_1\int_0^{2\pi}\int_0^{d_1}\frac{d\rho_0\,d\varphi}{\rho_0^{1-\alpha}}=b_2d_1^{\alpha},$$

式中 b_2 是常数。这一估值对于在 S 的 N_0 点的法綫上的任何点 M 都有效，并且，M 也可以与 N_0 重合。从此也可推得：当 d_1 取得适当小时，在(51)右側沿 σ_1 所取的积分的絕对值可以小于任何預先指定的正数。这样，就証明了差式(51)在点 N_0 为連續。但是，当 M 从曲面 S 内部或外部趋向于 N_0 时 $w(M)$ 有極限。所以，量(47)在这兩种情形下也都有極限。利用差式(51)的連續性，就得到：

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i-w_i(N_0)=\iint_S\mu(N)\frac{\cos\psi_0}{r_0^2}dS-w(N_0),$$

同时，由于注意到公式(42)中的第一式，我們就得到(49)中的第一式。类似地可以得到(49)中的第二式。从这兩个式子直接可以得到單層势函数法綫导数的躍度：

$$(54)\qquad \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i-\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_e=4\pi\mu(N_0)。$$

196. 單層勢函数的法綫导数(續) 对于我們以后重要的是証明：当 M 沿法綫趋向于 N_0 时，法綫导数对于整个曲面 S 来說均匀地趋向于它們的极限：

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i \text{ 与 } \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_e.$$

为此，先証公式(51)中的积分是一致趋向于其極限的。以 $\omega(M)$ 記这个积分的値。如我們已經証明了的，这一函数只要当 M 重合于 N_0 时是有意义的。我們需要証明，对任意的已給正数 ε，就存在一个与点 N_0 在 S 上的位置無关的正数 η，使得当 $|MN_0|\leqslant\eta$，且 M 在点 N_0 的 S 的法綫上时，有 $|\omega(M)-\omega(N_0)|\leqslant\varepsilon$。

固定 d_1，使 $b_2d_1^\alpha\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$，并且把 $\omega(M)$ 表示为 $\omega(M)=\omega_1(M)+\omega_2(M)$ 的形式，这里

$$\omega_1(M)=\iint_{\sigma_1}\mu(N)\frac{\cos\psi-\cos\varphi}{r^2}dS;$$

$$\omega_2(M)=\iint_{S-\sigma_1}\mu(N)\frac{\cos\psi-\cos\varphi}{r^2}dS.$$

这时，由(53)式，我們有 $|\omega_1(M)|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$ 对于在点 N_0 的 S 的法綫上任何点 M 均成立，并且：

$$\omega(M)-\omega(N_0)=\omega_1(M)-\omega_1(N_0)+[\omega_2(M)-\omega_2(N_0)],$$

从此得：

$$|\omega(M)-\omega(N_0)|\leqslant|\omega_1(M)|+|\omega_1(N_0)|+|\omega_2(M)-\omega_2(N_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+|\omega_2(M)-\omega_2(N_0)|. \tag{55}$$

注意到(52)，我們就得出：

$$\left[\frac{\cos\psi-\cos\varphi}{r^2}\right]_M-\left[\frac{\cos\psi-\cos\varphi}{r^2}\right]_{N_0}=\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r^3}\right)[\xi\cos(n,X)+\eta\cos(n,Y)+ \tag{56}$$

$$+\zeta(\cos\vartheta_0-1)]+\frac{z}{r^3}(\cos\vartheta_0-1)\quad(\vartheta_0=(n,Z))。$$

在沿 $S-\sigma_1$ 积分时，$r\geqslant d_1$，$r_0\geqslant d_1$。此外，当点 N 与 N_0 取 S 上的任何位置时，量 ξ，η，ζ 的絕对值不超过曲面 S 的直徑 D，即 S 上的点之間的最大距离。我們还有 $|r-r_0|\leqslant|z|$ 以及

$$\left|\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r^3}\right|=|r-r_0|\left(\frac{1}{r_0^3 r}+\frac{1}{r_0^2 r^2}+\frac{1}{r_0 r^3}\right)\leqslant\frac{3|z|}{d_1^4};\quad\frac{|z|}{r^3}\leqslant\frac{|z|}{d_1^3},$$

又据(56)式，得出：

$$\left|\left[\frac{\cos\psi-\cos\varphi}{r^2}\right]_M-\left[\frac{\cos\psi-\cos\varphi}{r^2}\right]_{N_0}\right|\leqslant c_1|z|,$$

于此 c_1 是与 N_0 的位置無关的一个固定的常数。它当然与 d_1 的选擇有关。注意到 $\omega_2(M)$ 的表示式，就得到：

$$|\omega_2(M)-\omega_2(N_0)|\leqslant\iint\limits_{S-\sigma_1}|\mu(N)|c_1|z|dS\leqslant Ac_1|z|\cdot S\text{ 的面积}。$$

如果选取：

$$|z|\leqslant\frac{\varepsilon}{2Ac_1\cdot S\text{ 的面积}},\tag{57}$$

那末我們就有 $|\omega_2(M)-\omega_2(N_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，而由于 (55) 式，就得出 $|\omega(M)-\omega(N_0)|\leqslant\varepsilon$。因而，不等式(57)的右边就可取为待求的数 η。

这样，我們就已証明了，当 M 沿法綫趋向于 N_0 时差式

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n_0}-w(M)$$

关于点 N_0 在 S 上的位置一致收斂于它自身的極限値。另一方面，單層勢函数 $w(M)$ 是到 S 上的連續函数，所以 $w(M)$ 也一致趋向于它在 S 上的極限値。从此可得，法綫导数 $\frac{\partial u(M)}{\partial n_0}$ 在 S 上一致趋向于它自己的極限値(49)。依据 A. M. 略普諾夫，如果 M 沿 S 的法綫趋向 N_0 时，在 S 内部或外部的調和函数 $v(M)$ 的法

綫导数 $\frac{\partial v(M)}{\partial n_0}$ 关于在 S 上的点 N_0 一致地趋向于它自身的極限值，那末就称函数 $v(M)$ 有正常的法綫导数。因而，我們就可断言：

定理 連續密度的單層勢函数在 S 內与 S 外都有正常的法綫导数。

把正数 $|z|$ 固定起来，規定 M 在 S 之內或 S 之外，我們就可以把法綫导数 $\frac{\partial u(M)}{\partial n_0}$ 視为点 N_0 的函数，并且与一參数 $|z|$ 有关。并且，由于 $u(M)$ 在 S 內或 S 外有連續的导数，方向 n 在 S 上連續变化，所以这个函数是 N_0 的連續函数。

由于 $|z|\to 0$ 时一致趋向于極限，我們就可断言，極限值 (49) 是 N_0 的連續函数，又从此可得，(49) 式右端的积分乃是 N_0 在 S 上的連續函数。这一积分称为在 S 上單層勢函数法綫导数的平均值。

197. 法綫导数的平均值 以 $F(N)$ 記法綫导数在 S 上的平均值：

$$F(N_0)=\iint_S \mu(N)\frac{\cos(r_0, n_0)}{r_0^2}\,dS。\tag{58}$$

我們已見到，$F(N_0)$ 是 S 上点 N_0 的位置的連續函数。我們現在要証明一个关于 $F(N_0)$ 的这一性質更显得明确化的定理。这定理首先是略普儲夫所証的。

定理 对于連續的密度 $\mu(N)$，函数 $F(N_0)$ 滿足条件：

$$|F(N_1)-F(N_0)|\leqslant Br_{0,1}^{\beta},\tag{59}$$

这里 B 与 β 都是正的常数，且 $r_{0,1}=|N_0N_1|$。

在以后称条件 (59) 为李普希茲条件。如果 $r_{0,1}$ 大于某一正数，那末对任一已給的正的 β，我們可以选擇适当的常数 B，使这个条件得到滿足。实际上，如我們所知，函数 $F(N)$ 在 S 上連續，因而有界，即 $|F(N)|\leqslant A_1$。如果 $r_{0,1}\geqslant h>0$，那末可以取 $B=\frac{2A_1}{h^{\beta}}$，我們显然地就可得到 $r_{0,1}\geqslant h$ 时的不等式 (59)。如果在 $r_{0,1}<h$ 时我們得到不等式 (59) 中的另外的 B，那末我們只要采取这两个所得的 B 中的最大者，就会得到对所有的 $r_{0,1}$ 都成立的 (59) 式。

因而，我们不妨就假設 $r_{0,1}<\frac{d}{10}$。我們有：

$$F(N_1)-F(N_0)=\iint_S \mu(N)\left[\frac{\cos(r_1,n_1)}{r_1^2}-\frac{\cos(r_0,n_0)}{r_0^2}\right]dS。$$

这里 r_0 与 r_1 是向量 $\overline{N_0N}$ 与 $\overline{N_1N}$，而 r_0 与 r_1 为它們的長度，因而注意到(22)式，就可推出

$$(60)\qquad |F(N_1)-F(N_0)|\leqslant A\iint_S\left|\frac{\cos(r_1,n_1)}{r_1^2}-\frac{\cos(r_0,n_0)}{r_0^2}\right|dS。$$

作以 S 在 N_0 的法綫为軸、以 $2r_{0,1}$ 为底半徑的圓柱面，它在 S 上割下的部分为 σ_1。把沿 S 的积分分为兩部分——沿 σ_1 的积分与沿 $S-\sigma_1$ 的积分：

$$(61)\qquad \begin{aligned} J_1&=\iint_{\sigma_1}\left|\frac{\cos(r_1,n_1)}{r_1^2}-\frac{\cos(r_0,n_0)}{r_0^2}\right|dS;\\ J_2&=\iint_{S-\sigma_1}\left|\frac{\cos(r_1,n_1)}{r_1^2}-\frac{\cos(r_0,n_0)}{r_0^2}\right|dS。\end{aligned}$$

如果引入向量的数量积，就可写出：

$$\frac{\cos(r_1,n_1)}{r_1^2}-\frac{\cos(r_0,n_0)}{r_0^2}=\frac{r_1\cdot n_1}{r_1^3}-\frac{r_0\cdot n_0}{r_0^3}=$$

$$=\frac{r_1\cdot n_0-r_0\cdot n_0}{r_1^3}+\frac{r_1\cdot n_1-r_1\cdot n_0}{r_1^3}+r_0\cdot n_0\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_0^3}\right),$$

式中 n_0 与 n_1 照例記在点 N_0 与 N_1 的單位法綫向量。

从上面所写下的式子，就推出

$$(62)\qquad \left|\frac{\cos(r_1,n_1)}{r_1^2}-\frac{\cos(r_0,n_0)}{r_0^2}\right|\leqslant\frac{|r_1\cdot n_0-r_0\cdot n_0|}{r_1^3}+$$

$$+\frac{|r_1\cdot n_1-r_1\cdot n_0|}{r_1^3}+|r_0\cdot n_0|\left|\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_0^3}\right|。$$

进行分項的估計：

$$|r_1\cdot n_1-r_1\cdot n_0|=|r_1\cdot(n_1-n_0)|\leqslant r_1|n_1-n_0|。$$

作以 n_0 与 n_1 为边的三角形，就得到 $|n_1-n_0|\leqslant\vartheta$，于此 ϑ 是方向 n_0 与 n_1 的交角。如果注意到条件(3)，我們就可写出：

$$|r_1\cdot n_1-r_1\cdot n_0|\leqslant ar_1r_{0,1}^{\alpha},$$

这里 a 是常数。其次：

$$|r_1\cdot n_0-r_0\cdot n_0|=|(r_1-r_0)\cdot n_0|=|r_{0,1}\cdot n_0|=|\zeta_1|,$$

这里 ζ_1 是点 N_1 在 N_0 为原点的局部坐标系統下的坐标。注意到(15)式，就有：

$$|r_1\cdot n_0-r_0\cdot n_0|\leqslant cr_{0,1}^{1+\alpha}。$$

最后，如果积分的点 N 与 N_0 相当接近，那末由(15)式，就有 $|r_0\cdot n_0|=|\zeta|\leqslant\leqslant cr_0^{1+\alpha}$。但是如同对不等式(59)所作的情况一样，我們可以認为，这一不等式也对所有的 r_0 成立。把所有这些估計代到(62)中去，就有：

$$(63)\qquad \left|\frac{\cos(r_1,n_1)}{r_1^2}-\frac{\cos(r_0,n_0)}{r_0^2}\right|\leqslant\frac{c_1r_1r_{0,1}^{\alpha}}{r_1^3}+\frac{c_1r_{0,1}^{1+\alpha}}{r_1^3}+$$
$$+c_1r_0^{1+\alpha}|r_1-r_0|\left(\frac{1}{r_0^3r_1}+\frac{1}{r_0^2r_1^2}+\frac{1}{r_0r_1^3}\right),$$

式中 c_1 是常数 a 与 c 之中的最大者。在三角形 N_0N_1N 中有 $r_1+r_{0,1}\geqslant r_0$。但在沿 $S-\sigma_1$ 积分时，我們有 $r_{0,1}\leqslant\frac{r_0}{2}$，因而 $r_1\geqslant\frac{r_0}{2}$。利用这些不等式以及不等式 $|r_1-r_0|\leqslant r_{0,1}$，我們就可以把(63)改写为：

$$\left|\frac{\cos(r_1,n_1)}{r_1^2}-\frac{\cos(r_0,n_0)}{r_0^2}\right|\leqslant$$
$$\leqslant c_1r_{0,1}^{\alpha}\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{r_{0,1}}{r_1^3}+\frac{r_0^{1+\alpha}r_{0,1}^{1-\alpha}}{r_0^3r_1}+\frac{r_0^{1+\alpha}r_1^{1-\alpha}}{r_0^2r_1^2}+\frac{r_0^{1+\alpha}r_1^{1-\alpha}}{r_0r_1^3}\right)\leqslant$$
$$\leqslant c_1r_{0,1}^{\alpha}\left(\frac{4}{r_0^2}+\frac{4}{r_0^2}+\frac{2}{r_0^2}+\frac{4}{r_0^2}+\frac{8}{r_0^2}\right)=\frac{22c_1r_{0,1}^{\alpha}}{r_0^2}。$$

回到公式(61)的第二式，就得到：

$$(64)\qquad |J_2|\leqslant c_0r_{0,1}^{\alpha}\iint\limits_{S-\sigma_1}\frac{dS}{r_0^2},$$

于此 $c_0=22c_1$。从曲面 S 上割下部分 σ_1 的圓柱的半徑取为 $2r_{0,1}$ 取一柱面，它有同样的軸，有固定的半徑 $\frac{d}{3}$。它从曲面 S 上割下部分 σ_0，并且 σ_0 包含 σ_1 在其內。

我們有：

$$\iint\limits_{S-\sigma_1}\frac{dS}{r_0^2}=\iint\limits_{\sigma_0-\sigma_1}\frac{dS}{r_0^2}+\iint\limits_{S-\sigma_0}\frac{dS}{r_0^2}。$$

在第二个积分中 $r_0\geqslant\frac{d}{3}$，因而

$$\iint\limits_{S-\sigma_0}\frac{dS}{r_0^2}\leqslant\frac{9}{d^2}\cdot S\text{ 的面积。}$$

在沿 $\sigma_0-\sigma_1$ 积分时，我們可以把积分归化到 N_0 点的切平面上的积分，用普通的估計方法 $\left(r_0\geqslant\rho_0\text{ 和 }\cos(n,Z)\geqslant\frac{1}{2}\right)$，得到：

$$\iint\limits_{\sigma_0-\sigma_1}\frac{dS}{r_0^2}\leqslant\int_0^{2\pi}\int_{3r_{0,1}}^{\frac{d}{3}}\frac{2\rho_0\,d\rho_0\,d\theta}{\rho_0^2}=4\pi\left(\lg\frac{d}{3}-\lg 2r_{0,1}\right)。$$

代入(64)式，得到：

$$J_2\leqslant A_1r_{0,1}^{\alpha}\lg r_{0,1}+B_1r_{0,1}^{\alpha}$$

型的估計，式中 A_1 与 B_1 都是常数。如果采取正数 β 小于 α，就可以把这个估計式换作

$$J_2\leqslant A_2r_{0,1}^{\beta}。$$

轉到估計 J_1。我們有：

$$J_1\leqslant\iint\limits_{\sigma_1}\frac{|\cos(r_1,n_1)|}{r_1^2}dS+\iint\limits_{\sigma_1}\frac{|\cos(r_0,n_0)|}{r_0^2}dS。\tag{65}$$

应用普通的估計，得到：

$$\iint\limits_{\sigma_1}\frac{|\cos(r_0,n_0)|}{r_0^2}dS=\iint\limits_{\sigma_1}\frac{|\zeta|}{r_0^2}dS\leqslant c\int_0^{2\pi}\int_0^{2r_{0,1}}\frac{\rho_0^{1+\alpha}\rho_0\,d\rho_0\,d\theta}{\rho_0^3}=A_3r_{0,1}^{\alpha},$$

这里 A_3 是常数。为了估計(65)式中的第一个积分，作以 N_1 为中心、$4r_{0,1}$ 为半徑的球，并且指出 $4r_{0,1}<\frac{2d}{5}$。它在 S 上割下小塊 σ_2，σ_2 包含小塊 σ_1。这一部分 σ_2 在以 N_1 为原点的局部坐标下有显式的方程，而且，如果把积分变換到点 N_1 的切平面上，我們就能应用普通的估計方法。积分的区域是以 N_0 为心、$4r_{0,1}$ 为半徑的圓的一部分。在这个圓上积分，得到估計：

$$\iint\limits_{\sigma_1}\frac{|\cos(r_1,n_1)|}{r_1^2}dS\leqslant\iint\limits_{\sigma_2}\frac{|\cos(r_1,n_1)|}{r_1^2}dS\leqslant A_4r_{0,1}^{\alpha}。$$

把所得到的一切估計代入(60)，就有：

$$|F(N_1)-F(N_0)|\leqslant A(A_2r_{0,1}^{\beta}+A_5r_{0,1}^{\alpha}),$$

而最后，就可以写出(59)式，式中 β 是比 α 小的任意正常数。

198. 單層势函数沿任何方向的导数 在[195]中我們研究过当点 M 沿法綫趋近 N_0 时法綫导数的極限值。如果对密度 $\mu(N)$ 作了比連續性更强的假設，可以証明，对任意定方向的导数的極限值是存在的。此外，还可以証明，这一極限不依賴于 M 趋近于 N_0 的方式。我們假設密度滿足李普希茲条件：

$$|\mu(N_2)-\mu(N_1)|\leqslant Br_{1,2}^{\delta},\tag{66}$$

这里 $r_{1,2}=|N_1N_2|$，B 与 δ 是正常数 $(\delta\leqslant1)$。設 XYZ 是曲面 S 上点 N_0 的局部坐标系統。取 $u(M)$ 沿 x 方向的导数，这个方向落于 S 在 N_0 点的切平面

上。暂时假設 M 在过 N_0 点的 S 的法綫上。为确定計，設 M 在 S 内。我們有：

(67) $$\frac{\partial u(M)}{\partial x}=\iint_S \mu(N)\frac{\xi}{r^3}dS \quad (r=|MN|)。$$

引入量 $r'=\sqrt{\xi^2+\eta^2+z^2}$ 而考察积分：

(68) $$\iint_{\sigma_0}\mu(N_0)\frac{\xi}{r'^3}\cos(n,\ Z)dS=\mu(N_0)\iint_{\sigma_0'}\frac{\xi}{(\xi^2+\eta^2+z^2)^{3/2}}d\xi\, d\eta \quad (z\neq 0),$$

式中 σ_0' 是圆 $\xi^2+\eta^2\leqslant\frac{d^2}{9}$。显然，我們有：

$$\iint_{\sigma_0'}\frac{\xi}{(\xi^2+\eta^2+z^2)^{3/2}}d\xi\, d\eta=\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta\int_0^{\frac{d}{3}}\frac{\rho_0^2}{\sqrt{\rho_0^2+z^2}}d\rho_0=0。$$

我們可以写出：

(69) $$\frac{\partial u(M)}{\partial x}=\iint_{\sigma_0}\mu(N)\frac{\xi}{r^3}dS+\iint_{S-\sigma_0}\mu(N)\frac{\xi}{r^3}dS=v_1(M)+v_2(M)$$

以代替(67)。利用到积分(68)等于零，就有：

(70) $$v_1(M)=\iint_{\sigma_0}\xi\left[\frac{\mu(N)}{r^3}-\frac{\mu(N_0)\cos(n,\ Z)}{r'^3}\right]dS。$$

在积分号下的差式可表示为形式：

(71) $$\frac{\mu(N)}{r^3}-\frac{\mu(N_0)\cos(n,\ Z)}{r'^3}=\frac{\mu(N)-\mu(N_0)}{r^3}+$$
$$+\frac{\mu(N_0)[1-\cos(n,\ Z)]}{r^3}+\mu(N_0)\cos(n,\ Z)\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)。$$

估計右端的每一項。利用(66)就得到：

$$\frac{|\mu(N)-\mu(N_0)|}{r^3}\leqslant\frac{br_0^\beta}{r^3},$$

从此，如果注意到 $r_0\leqslant 2\rho_0$ 与 $r\geqslant\rho_0$，就求出：

(72) $$\frac{|\mu(N)-\mu(N_0)|}{r^3}\leqslant\frac{2^\beta b}{\rho_0^{3-\beta}}。$$

其次，从(15)与(22)推出：

(73) $$\frac{|\mu(N_0)|[1-\cos(n,\ Z)]}{r^3}\leqslant\frac{cA}{\rho_0^{3-2\alpha}}。$$

現在来估計(71)右端的第三項。量 r' 是从点 M 出發到点 N' 的向量的長，而 N' 是点 N 在平面 XY 上的投影。从三角形 MNN' 看出：

$$|r-r'|\leqslant|\zeta|\leqslant 2a\rho_0^{1+\alpha},$$

从此推得

$$\left|\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right|\leqslant 2a\rho_0^{1+\alpha}\left(\frac{1}{r^3r'}+\frac{1}{r^2r'^2}+\frac{1}{rr'^3}\right)\leqslant\frac{6a}{\rho_0^{3-\alpha}},$$

因为 r 与 $r'\geqslant\rho_0$，且

(74) $$\left|\mu(N_0)\cos(n, Z)\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\right|\leqslant\frac{6aA}{\rho_0^{3-\alpha}}。$$

在引出估計时，我們也可設 M 重合于 N_0。这时 $z=0$，$r=r_0$。

把表示式(71)代入积分(70)中，把 $v_1(M)$ 分为三个积分

(75) $$v_1(M)=v_{1,1}(M)+v_{1,2}(M)+v_{1,3}(M)$$

沿着σ_0这三个积分对 M 在 N_0 的法綫上的任何位置都有意义，特别当 M 重合于 N_0 时也有意义。对这些积分的被积函数，我們得有估計式 (72)，(73) 与(74)，它們具有形式：

(76) $$|\xi|\frac{C_1}{\rho_0^{3-\beta}},\quad |\xi|\frac{C_2}{\rho_0^{3-2\alpha}},\quad |\xi|\frac{C_3}{\rho_0^{3-\alpha}},$$

于此常数 C_1，C_2 与 C_3 与 N_0 在 S 上位置及 M 在法綫上的位置無关。 从此推得：当 M 趋向于 N_0 时，函数 $v_{1,k}(M)$ $(k=1, 2, 3)$ 一致地趋向于其極限值，这里的一致性是关于点 N_0 在曲面 S 上的位置的，極限值是 $v_{1,k}(N_0)$。 对 $v_{1,1}(M)$来証明这一点。 設 ε 是已給的正数。在曲面 σ_0 上选取一部分 σ_1，它是用不等式 $\xi^2+\eta^2\leqslant d_1$ 所定义，而 d_1 选取得适当小，使得当点 M 在法綫上取任何位置时积分

$$\iint_{\sigma_1}|\xi|\frac{|\mu(N)-\mu(N_0)|}{r^3}\,dS$$

的值保持着 $\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$。 由于估計 (76) 的第一式，这是可以做到的。 其次，把 $v_{1,1}(M)$表示为：

$$v_{1,1}(M)=\iint_{\sigma_1}\xi\frac{\mu(N)-\mu(N_0)}{r^3}\,dS+\iint_{\sigma_0-\sigma_1}\xi\frac{\mu(N)-\mu(N_0)}{r^3}\,dS=$$
$$=v_{1,1}^{(1)}(M)+v_{1,1}^{(2)}(M)$$

的形式，而得出：

$$v_{1,1}(M)-v_{1,1}(N_0)=v_{1,1}^{(1)}(M)-v_{1,1}^{(1)}(N_0)+[v_{1,1}^{(2)}(M)-v_{1,1}^{(2)}(N_0)],$$

从此

(77) $$|v_{1,1}(M)-v_{1,1}(N_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+|v_{1,1}^{(2)}(M)-v_{1,1}^{(2)}(N_0)|。$$

积分 $v_{1,1}^{(2)}(M)$ 是沿曲面所取，它的所有点到 N_0 与 M 的距离都不小于 d_1。与[196]中完全一样地可以得出：

$$|v_{1,1}^{(2)}(M)-v_{1,1}^{(2)}(N_0)|\leqslant C_4|z|,$$

式中 C_4 与 N_0 在 S 上的位置無关。这时(77)給出：

$$|v_{1,1}(M)-v_{1,1}(N_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+C_4|z|,$$

而当 $|z|\leqslant\frac{\varepsilon}{2C_4}$ 时，我們得到：

$$|v_{1,1}(M)-v_{1,1}(N_0)|\leqslant\varepsilon,$$

从此也推出，$v_{1,1}(M)$ 关于 N_0 在 S 上的位置一致地趋向于 $v_{1,1}(N_0)$。

回到公式 (75)，我們看到，当 $M\to N_0$ 时 $v_1(M)$ 一致地趋向于極限 $v_1(N_0)$。我們指出，当 M 从外部或从內部趋向于 N_0 时，这个極限是相同的。簡單地說，当 M 在法綫上变动时，函数 $v_1(M)$ 在点 N_0 是連續的。

积分 $v_2(M)$ 是沿曲面 S 的部分 $S-\sigma_0$ 所作的，它的所有的点，到 M 与 N_0 的距离始終不小于 $\frac{d}{3}$。如前，从这里就推出：

$$|v_2(M)-v_2(N_0)|\leqslant C_5|z|,$$

这里常数 C_5 与 N_0 在曲面 S 上的位置無关，因而 $v_2(M)$ 关于 N_0 一致地趋向于 $v_2(N_0)$。最后，我們可以断言，当 M 沿法綫趋向于 N_0，时 $\frac{\partial u(M)}{\partial x}$ 一致地趋向于其極限，并且，当 M 从內部或外部趋向于 N_0 时这个極限值是相同的。显然，对 $\frac{\partial u(M)}{\partial y}$ 也成立完全相类似的断言。在 [196] 中，我們已証明导数 $\frac{\partial u(M)}{\partial z}$ 一致地趋向于極限。但那时，从內部与外部来趋近时有不連續極限。如果 l 是任一方向，与 X，Y，Z 軸的交角为 α_1，α_2，α_3，那末依据前面就可直接推出；当 M 从內部或外部一致地趋向于 N_0 时，导数

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l}=\frac{\partial u(M)}{\partial x}\cos\alpha_1+\frac{\partial u(M)}{\partial y}\cos\alpha_2+\frac{\partial u(M)}{\partial z}\cos\alpha_3 \tag{78}$$

也一致地趋向于其極限。

由于导数 (78) 是一致地趋向于其極限值的（从內部或从外部），就可断言，这个極限值是曲面上点 N_0 的連續函数。

現証，不仅在 M 沿法綫趋向 N_0 时，而是 M 按任何方式趋向于 N_0 时，極限(78)也趋向于上述的極限。为确定計，設 M 从內部趋向于 N_0，用 $\omega(N)$ 来記导数 (78) 在曲面上的極限值。設 ε 为已給的任意小的正数。我們必須証明：存在这样的正数 η，使得：只要 $|MN_0|\leqslant\eta$，M 在 S 的內部，就成立：

$$\left|\frac{\partial u(M)}{\partial l}-\omega(N_0)\right|\leqslant\varepsilon。 \tag{79}$$

作以 N_0 为中心、以适当小的正数 δ 为半徑的球，使得曲面 S 被包在球內的部分 σ' 上成立不等式 $|\omega(N)-\omega(N_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$。又設 M 在以 N_0 为心、η 为半徑的球的內部，并且选擇 η 使得：只要 M 在 S 上点 N 的法綫上及 $|MN|\leqslant\eta$，就有

$$\left|\frac{\partial u(M)}{\partial n}-\omega(N)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

这是可能的，因为已証明好 $\frac{\partial u(M)}{\partial l}$ 是关于 S 是一致地趋向于 $\omega(N)$ 的。此外，还假設 $\eta\leqslant\frac{\delta}{3}$。如果点 M 到 N_0 的距离不大于 η，那末它到点 N 的距离就更会小于 η，这里 N 是在 σ' 上的点，而且 M 是在 N 的法綫上。我們有：

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l}-\omega(N_0)=\frac{\partial u(M)}{\partial l}-\omega(N)+\omega(N)-\omega(N_0)$$

与

$$\left|\frac{\partial u(M)}{\partial l}-\omega(N_0)\right|\leqslant\left|\frac{\partial u(M)}{\partial n}-\omega(N)\right|+|\omega(N)-\omega(N_0)|.$$

由上所述，右端的兩項均不大于 $\frac{\varepsilon}{2}$，因而

$$\text{(80)}\qquad \text{当 } |MN_0|\leqslant\eta \text{ 时，}\quad \left|\frac{\partial u(M)}{\partial l}-\omega(N_0)\right|\leqslant\varepsilon.$$

上面我們用了如下的初等的命題：点 M 到曲面 S 的最短距离是从 M 所引的曲面 S 的法綫 MN 的長。

还指出，当 $z=0$ 时，即点 M 与 N_0 相重合时，积分 (67) 与 (68) 是無意义的。但，如我們所見，它們的差是有意义的。

上面的論述引导到首先由 A. M. 略普諾夫所証明的如下定理：

定理 如果密度 $\mu(N)$ 滿足李普希茲条件 (66)，那末單層势函数沿任何方向的导数从內部或从外部直到曲面上为止都是連續的。当点 M 在点 N_0 越过曲面时，沿曲面 S 在 N_0 点的任一切綫方向的导数的变化是連續的。

研究双層势函数的导数趋向于曲面 S 时的性态有着很大的困难。这一方面基本的結果也是 A. M. 略普諾夫在他的上述的論文"論与狄义赫利問題有关的若干問題"中所得到的。

199. 对数势函数 平面的情形，我們以 $\lg\frac{1}{r}$ 来代替 $\frac{1}{r}$ 为基本奇解[II, 193]。設 l 是 XY 平面上的閉迴道，l_0 是它的長。單層势函数的定义公式是：

(81) $$u(M)=\int_l \mu(N)\lg\frac{1}{r}ds=\int_l \mu(s)\lg\frac{1}{r}ds。$$

类似于三維情形的偶極子的第二个奇解是：

$$\frac{\cos\varphi}{r}=\frac{\partial}{\partial l}\left(\lg\frac{1}{r}\right)$$

而双層势函数由公式

(82) $$w(M)=\int_l \mu(N)\frac{\cos\varphi}{r}\,ds$$

所定义，这里 $\varphi=(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})$。表示式 $\frac{\cos\varphi}{r}ds$ 給出从点 M 来看迴道弧素 ds 的角度，如果 $\cos\varphi>0$，这个角度是正的，如果 $\cos\varphi<0$，它就是負的。下面的公式

(83) $$\int_l \frac{\cos\varphi}{r}\,ds=\begin{cases}2\pi & (M\ 在\ l\ 內)\\ 0 & (M\ 在\ l\ 外)\\ \pi & (M\ 在\ l\ 上)\end{cases}$$

是公式(26)的类似。对迴道 l 可以作一些假設，它們类似于对曲面 S 的那些假設。

給出曲綫 l 的参数方程的函数 $x(s)$，$y(s)$ 有周期 l_0，現設它們有到二阶的連續导数。函数 $\mu(N)=\mu(s)$ 設为連續的。假設 M 在 l 上而合于这曲綫上的某一点 N_0，我們来研究双層势函数的核。注意到 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦是由导数 $y'(s)$ 与 $-x'(s)$ 所表示，我們就可写出：

(84) $$\frac{\cos\varphi}{r}=\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}=$$
$$=\frac{[x(s)-x(s_0)]y'(s)-[y(s)-y(s_0)]x'(s)}{[x(s)-x(s_0)]^2+[y(s)-y(s_0)]^2}。$$

如果 s 与 s_0 不同，所写的表示式是 s 与 s_0 的連續函数。現設 s 与 s_0 趋向于同一極限 s_1。应用泰乐公式，可以写出：

$$x(s)-x(s_0)=x'(s_0)(s-s_0)+\frac{1}{2}x''(s_0')(s-s_0)^2$$
$$x'(s)=x'(s_0)+x''(s_0'')(s-s_0)$$

$$y(s)-y(s_0)=y'(s_0)(s-s_0)+\frac{1}{2}y''(s_0''')(s-s_0)^2$$

$$y'(s)=y'(s_0)+y''(s_0'''')(s-s_0),$$

式中 s_0', s_0'', s_0''', s_0'''' 在 s 与 s_0 之間。把它們代入 (84) 并約去因子 $(s-s_0)^2$，就得到極限的表示式：

$$\frac{x'(s_1)y''(s_1)-y'(s_1)x''(s_1)}{2[x'^2(s_1)+y'^2(s_1)]}=\frac{x'(s_1)y''(s_1)-y'(s_1)x''(s_1)}{2},$$

它等于曲綫在点 $s=s_1$ 的曲率的二分之一。因而函数 (84) 是 s 与 s_0 沿 l 的連續函数，把它記为 $L(s_0, s)$，我們可以断言，如果 N_0 在 l 上，双層势函数

$$w(N_0)=w(s_0)=\int_0^l \mu(s)L(s_0, s)ds$$

是 N_0 的連續函数。

因而，在对 $x(s)$ 与 $y(s)$ 所作的假定下，函数 (84) 是 s 与 s_0 在 l 上的連續函数。在三維的情形，一般說来，函数 $\frac{\cos\varphi}{r^2}$ 当 N 重合于 N_0 时有一極性奇点。对双層势函数 (82)，可以証明类似于 (42) 的公式：

$$w_i(N_0)=w(N_0)+\pi\mu(N_0)=\int_l \mu(N)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})}{r_0}ds+\pi\mu(N_0)$$

(85)

$$w_e(N_0)=w(N_0)-\pi\mu(N_0)=\int_l \mu(N)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})}{r_0}ds-\pi\mu(N_0),$$

式中 $r_0=|N_0N|$，$(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})$ 是方向 $\overline{N_0N}$ 与 l 在 N 点的外法綫 $\boldsymbol{n}$ 的交角。从 (85) 推出：

(86) $$w_i(N_0)-w_e(N_0)=2\pi\mu(N_0)。$$

單層势函数 (81) 在全平面有定义，且为連續。

設 N_0 是 S 上的某一点，$\boldsymbol{n}_0$ 是这点的法綫方向。如果 M 不在 S 上，我們就有：

$$(87)\quad \frac{\partial u(M)}{\partial n_0}=\int_l \mu(N)\frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial n_0}ds=\int_l \mu(N)\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}_0)}{r}ds_{\circ}$$

当 M 沿法綫从 S 的內部或外部趋向于 N_0 时，导数 (87) 有極限，这些極限可以由公式

$$(88)\quad \begin{aligned}\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i&=\int_l \mu(N)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)}{r_0}ds+\pi\mu(N_0)\\ \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_e&=\int_l \mu(N)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)}{r_0}ds-\pi\mu(N_0)\end{aligned}$$

来确定，从此推出：

$$(89)\quad \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i-\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_e=2\pi\mu(N_0)_{\circ}$$

代替 (84)，我們有：

$$\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)}{r_0}=\frac{[x(s)-x(s_0)]y'(s_0)-[y(s)-y(s_0)]x'(s_0)}{[x(s)-x(s_0)]^2+[y(s)-y(s_0)]^2},$$

与以前一样，还可以証明当 s 重合于 s_0 时，这一表示式保持連續。我們指出，一般說来，單層勢函数在無穷远处不化为零。

200. 积分公式与平行曲面　在下面，我們必須利用如下的积分公式，利用它們，可以把沿三維区域的积分化为曲面积分 [II; 193]：

$$(90)\quad \iiint_{D_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)d\tau=\iint_S u\frac{\partial v}{\partial n}dS-\iiint_{D_i}u\Delta v\,d\tau$$

$$(91)\quad \iiint_{D_i}(u\Delta v-v\Delta u)d\tau=\iint_S\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS,$$

式中，D_i 是由曲面 S 所圍成的空間部分，n 是曲面 S 的外法綫方向。这些公式是在下面的假設下导出的：u, v 及其第一阶偏导数在 D_i 中直到 S 上为止是連續的；第二阶偏导数在 D_i 內为連續，在 D_i 中的包含 Δu 与 Δv 的积分是有意义的。如果 Δu 与 Δv 并不是直到 S 上都連續，那末这积分就是反常的，它可以作为沿含于 D_i

内的任一区域序列 $D_i^{(n)}$ 的积分的極限而得出，那时这些区域 $D_i^{(n)}$ 是趋向 D_i 的，这就是 D_i 中的任何内点，从某一指标 n 开始，都落在 $D_i^{(n)}$ 的内部。在后文中我們將討論調和函数，即 $\Delta u=\Delta v=0$，而在(91)中我們常設 $u=v$。这时，上面所指出的公式具有如下的形式：

$$\iiint\limits_{D_i}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=\iint\limits_S u\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i dS \tag{92}$$

$$\iint\limits_S\left[u\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i-v\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i\right]dS=0。\tag{93}$$

这些公式对于 S 外的無限区域 D_e 也成立，即：

$$\iiint\limits_{D_e}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=\iint\limits_S u\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e dS \tag{94}$$

$$\iint\limits_S\left[u\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e-v\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e\right]dS=0,\tag{95}$$

这只要函数 u 与 v 在 S 外面調和且其一阶偏导数在 S 外而直到 S 为連續，并且在 M 趋于無限远时它們趋于零，因而成立以下的不等式：

$$\begin{aligned}&R|u(M)|\leqslant A;\quad R^2\left|\frac{\partial u(M)}{\partial l}\right|\leqslant A;\\&R|v(M)|\leqslant A;\quad R^2\left|\frac{\partial v(M)}{\partial l}\right|\leqslant A,\end{aligned}\tag{96}$$

其中 R 是由 M 到空間的任一定点 O 的距离。A 是常数，而 l 是任一固定方向。公式(94)与(95)中的 n 是 S 的法綫方向，按 D_e 是朝外，即朝 S 的内部。

为了証明公式(94)与(95)必須把它們应用到由 S 及以 O 为心、充分大半徑的球面所圍成的有限区域中。当半徑趋向無穷时，因为乘积 $u\frac{\partial v}{\partial n}$ 与 $v\frac{\partial u}{\partial n}$ 估值的阶次为 $\frac{1}{R^3}$，而曲面面积为 $4\pi R^2$，所以沿球面的积分就趋向于零。因而我們就得到公式(94)，(95)。

[参看 **II; 194**]。

我們在后文的一段中可以見到，只要假設調和函数 $u(M)$ 与 $v(M)$ 当 M 趋向無限远时趋向于零，条件(96)就可以滿足。作为公式(93)与(96)的一个推論，我們得到如下的公式[**II, 194**]：

$$u(M)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right]dS, \tag{97}$$

式中 n 是区域 D_i 或 D_e 的外法綫方向，只要看公式(97)应用在什么情形上。

現在要指出可以应用所举出的公式的更广泛的条件。在曲面 S 的每点的法綫上划一綫段，它們具有同一長度 δ，并朝向 S 的內部，假設对一切充分小的 δ，这些綫段的端点 P 的几何軌迹構成一个自身不相交的閉曲面，它在 S 的內部而且有連續变化的切平面。把这一曲面記为 S_δ。S 上的每一点 N 对应于 S_δ 上的一点 P，它是在点 N 的曲面法綫上的。反之，S_δ 上的每点 P 对应于 S 上的一确定点 N。現証，曲面 S 在 N 点的法綫就是曲面 S_δ 在 P 点的法綫。用 (x, y, z) 来表示 S 上点在某一坐标系統下的坐标，用 (x', y', z') 来記对应点 P 的坐标。

我們有：

$$\begin{aligned} x'&=x-\delta\cos(n, X)\\ y'&=y-\delta\cos(n, Y)\\ z'&=z-\delta\cos(n, Z), \end{aligned} \tag{98}$$

式中 n 是曲面的外法綫方向。我們假設 S 的某一小塊曲面具有显式方程 $z=z(x, y)$，并且 $z(x, y)$ 有到二阶的連續导数。这时，法綫的方向余弦是坐标的連續可微分函数。

設 N 画出 S 的前述的曲面塊上的一条曲綫 l，即 (x, y, z) 是某一参数 t 的連續可微分函数。这时 (x', y', z') 也是 t 的連續可微

分函数。把显然成立的等式

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=\delta^2$$

关于 t 导微，就得出：

$$[(x'-x)x'_t+(y'-y)y'_t+(z'-z)z'_t]-[(x'-x)x_t+$$
$$+(y'-y)y_t+(z'-z)z_t]=0。$$

但因 PN 是 S 的法綫，所以第二个方括弧等于零。从此可見，第一个方括弧也等于零，这就是說，l' 的切綫与 PN 相垂直。从此直接可推出，PN 是 S_δ 的法綫。我們假設，S 的每一点都能位于具有所述性質的曲面塊中。曲面 S_δ 称为曲面 S 的平行曲面。

現設，在 S 内部的調和函数 u 与 v，当 M 依法綫趋向于 N 时，它們有正常的法綫导数，并且函数 u 与 v 本身在閉区域 $\overline{D}_i$ 中为連續。这时，我們可以对由曲面 S_δ 所圍成的区域应用所有的上面所指出来的那些公式。注意到函数 u，v 及其法綫导数趋向于極限的一致性，又注意到曲面 S_δ 与 S 的法綫是重合的，令 $\delta\to0$，取極限，我們就得到对 D_i 的所有的公式。沿 D_i 的三重积分在这时应視为反常积分，它是作为在内部区域的积分，当这些区域趋向于 D_i 时的極限。因为被积函数是正的，所以它与这些区域如何趋向于 D_i 無关。特別，可以利用由 S_δ 所圍成的区域。在極限的过程中还必須牽涉到曲面面积的測量。这一面积元素可以用第一高斯形式的系数表示为下述形式[**II**, **130**]：

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,dx\,dy,$$

例如，如果取 x, y 作参数，从(98)可以推出，E, F, G 都是 δ 的二次多項式。上面的論述也适用于 D_e。在这时，公式(98)中的負号应改为正号。如果函数 $u(M)$ 与 $v(M)$ 可以用連續密度的單層勢函数来表示，那末它們直到 S 上为止都是連續的，并且还有正常的法綫导数。

因而，我們就有：

定理 如果从曲面 S 的內部或外部作具有上述性質的平行曲面系是可能的，那末对連續密度的單層勢函数 $u(M)$ 和 $v(M)$，上述的那些公式是成立的。

現闡述存在平行于曲面 S 的曲面系 S_δ 的某些充分条件。設曲面 S 为略普諾夫曲面，并且在条件(3)中 $\alpha=1$。現証，对充分小的 δ，曲面 S_δ 是無重复点的閉曲面，这就是，对于 S 上的不同的 N，也对应不同的 P。暫置 $\delta<\frac{d}{3}$，并設对不同点 $N_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $N_2(x_2, y_2, z_2)$ 我們得到同一点 P，此即：

$$
\begin{aligned}
x_1-\delta\cos(\boldsymbol{n}_1, X)&=x_2-\delta\cos(\boldsymbol{n}_2, X)\\
y_1-\delta\cos(\boldsymbol{n}_1, Y)&=y_2-\delta\cos(\boldsymbol{n}_2, Y)\\
z_1-\delta\cos(\boldsymbol{n}_1, Z)&=z_2-\delta\cos(\boldsymbol{n}_2, Z),
\end{aligned}
\tag{99}
$$

式中 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 是 S 在 N_1 与 N_2 的外法綫方向。我們要指出，N_2 在以 N_1 为中心、d 为半徑的球內。用 $r_{1,2}$ 表示距离 $|N_1N_2|$，由于(99)，就得出：

$$r_{1,2}=\delta\sqrt{2(1-\cos\vartheta)},$$

式中 ϑ 是 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 之間的夾角。但由于(6)式及 $\alpha=1$，我們有 $1-\cos\vartheta\leqslant\frac{1}{2}a^2r_{1,2}^2$，而从最后一式就推出：$r_{1,2}\leqslant a\delta r_{1,2}$。

如果取 $\delta<\frac{1}{a}$，那末我們就会得出矛盾。因而对 $\alpha=1$ 的略普諾夫曲面，如 $\delta<\frac{d}{3}$，$\delta<\frac{1}{a}$，則曲面 S_δ 無重复点。并且，由于加在 S 上的条件[192]，可直接推出，在 $\delta<d$ 时所有的点 P 都在 S 的內部(或外部)。此外，我們如再假設在局部坐标下，曲面塊的方程是 $z=z(x, y)$，函数 $z(x, y)$ 有二阶的連續导数，那末曲面 S_δ 就有沿着 S_δ 連續变动的切平面。S_δ 为閉的这一事实直接如下推出：在 D_i 內部的点 M 向着 S 連續地移动时，M 到 S 的距离一定会在 M 的某一个位置时等于 δ。

注 設 $u(M)$ 在 S 內連续，有第一阶的連續的导数，有正常的

法綫导数。这时，以前討論的$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_i$的極限值是在$S$上的連續函数[196]，从此可知，必存在数$B$，使得

$$\left|\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_i\right| \leqslant B \quad (N\text{ 在 }S\text{ 上})。$$

另一面，由于法綫导数是一致地趋向于其極限的，对任意給定的正数ε，存在数η，使得在$|MN| \leqslant \eta$时成立：

$$\left|\frac{\partial u(M)}{\partial n} - \left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_i\right| \leqslant \varepsilon,$$

只要点M在S的内部并在S的过点N的法綫上。固定ε，卽得当$|MN| \leqslant \eta$时，$\left|\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right| \leqslant (B+\varepsilon)$，从此$|u(M_2)-u(M_1)| \leqslant (B+$ $+\varepsilon)\delta_{1,2}$，于此$\delta_{1,2}=|M_1M_2|$。从此推出，当$M$沿着法綫趋向$N$时，$u(M)$有一定的極限$u(N)$。我們可以进一步写出：

$$u(M)-u(N)=\int_0^{\delta} \frac{\partial u(M_1)}{\partial n}\, d\delta_1,$$

式中M_1是法綫上的变点，$\delta_1=|NM_1|$，$\delta=|NM|$，并且$\delta_1 \leqslant \delta \leqslant$ $\leqslant \eta$。依据上面对法綫导数的估計，就推得：$|u(M)-u(N)| \leqslant$ $\leqslant (B+\varepsilon)\delta$，从此可見对$N$在$S$上的位置$u(M)$是一致趋近于$u(N)$的。由于注意到了这一点，就不难証明[見196]，当M依任何方式趋向N时，$u(M)$趋向$u(N)$，并且$u(M)$直到S上为連續。对D_e，类似的論述也成立。因而，在函数$u(M)$有正常的法綫导数时，它直到S为連續。

因而，应用上述积分公式时，所需要的条件只是$u(M)$与$v(M)$的正常的法綫导数的存在。

上面的对于D_i的全部論述可以移用到平面的情形。但对平面上無限区域的情形，事情就不同了，我們以后再来說明它。

201. 調和函数序列 在轉到利用單層勢函数与双層勢函数解决拉普拉斯方程边値問題之前，我們先建立調和函数的某些性

質，作为我們已有的一些性質的补充。我們考察調和函数序列，或調和函数所成的級数(二者实际上是一样的)。我們在平面的情形进行所有的証明。对三維空間，它們是逐字逐句一样的。只要把普阿松公式換为給出球的狄义赫利問題解的公式。

关于調和函数的級数的一致收斂性的基本定理非常相似于对复变量正則函数的相类似的定理[III;12]：

如果級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y) \tag{100}$$

的每項在有界区域 B 內調和，在閉区域 $\overline{B}$ 上連續，而級数在这一区域的境界迴道 l 上一致收斂，那末它也在整个閉区域上一致收斂，級数的和是 B 內的調和函数。

設 ε 为預先給定的正数。由于在迴道 l 上的一致收斂性，故存在 N，使对任何 $n \geqslant N$ 及任何正的 p，成立不等式：

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x, y) \right| \leqslant \varepsilon, \quad [(x, y) \text{在 } l \text{ 上}]。$$

所写出的調和函数的有限和是在 B 內調和的函数，也在閉区域 $\overline{B}$ 連續，由于調和函数具有在境界上达到極值这一基本性質[II, 194]，我們就可断言，只要所写的不等式是在边境上有效，那末它們也就在所有內点有效，換句話說，它也就在整个閉区域有效。因而級数(100)的和 $S(x, y)$ 也是閉区域上的連續函数。現証，它也在閉区域內調和。設 M_0 为 B 內的任何点。以 M_0 为中心作圓 Σ_0，选 Σ_0 的半徑 R 使得整个圓 Σ_0 落在 B 的內部。用 $S_n(x, y)$ 記級数(100)的前 n 項之和。这一有限和式是一个調和函数，而它在 Σ_0 內部的值可以利用它在这一圓的圓周上的值依普阿松公式来表示：

$$S_n(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_n(R, \psi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\psi - \varphi) + \rho^2} d\psi,$$

式中(ρ, φ)是点$M(x, y)$的極坐标，但点M_0是取为原点的。在所說的圓的圓周上，$S_n(R, \psi)$关于ψ一致地趋向于$S(R, \psi)$，取極限，我們就有：

$$S(\rho, \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(R, \psi)\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2}d\psi,$$

这就是：在所說的圓内級数(100)的和可以用普阿松积分表示，因而就是調和函数。提醒一下，M_0是B内的任意一点。我們注意到，可以完全一样地証明，級数(100)在B内可对ρ与φ微分任意次。实际上，从普阿松公式直接推出：

$$\frac{\partial u_k(\rho, \varphi)}{\partial\rho}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_k(R, \psi)\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2}d\psi。$$

把級数(100)的兩边乘以

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2},$$

再在所說的圓上积分，我們就有：

$$\frac{\partial S(\rho, \varphi)}{\partial\rho}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial u_k(\rho, \varphi)}{\partial\rho}。$$

自然，所証明的定理可以用对調和函数序列的术語表出，卽：如果在区域B内調和，在閉区域$\overline{B}$連續的函数序列$S_n(x, y)$在边界迴道l上一致收斂于極限函数$S(x, y)$，那末它也在整个閉区域$\overline{B}$上一致收斂于其極限函数。極限函数在B内調和，并且在B内序列可以微分任意次。

再証明一个定理，它是关于一个特殊情形的，卽級数(100)的每項是正的函数的时候。預先說明普阿松公式的一个推論。函数$u(\rho, \varphi)$在以M_0为中心的圓$\rho<R$内調和，在閉圓上連續，在这圓内可由普阿松公式表示：

$$u(\rho, \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R, \psi)\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2}d\psi。$$

此外，我們假設这个函数为正的。由于考慮到$|\cos(\psi-\varphi)|\leqslant 1$，

我們就可写出不等式：

$$(R-\rho)^2 \leqslant R^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)+r^2 \leqslant (R+\rho)^2,$$

而由普阿松公式可直接推得：

$$\frac{R-\rho}{R+\rho}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\ \psi)\,d\psi \leqslant u(\rho,\ \varphi) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R+\rho}{R-\rho}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\ \psi)\,d\psi,$$

注意到平均值定理[II;194]，就有：

$$\frac{R-\rho}{R+\rho}u(M_0) \leqslant u(\rho,\ \varphi) \leqslant \frac{R+\rho}{R-\rho}u(M_0)。 \tag{101}$$

对正調和函数的这一估值——用它在一圓的中心的数值来估計它在圓內任意点的数值，称为哈納克不等式。利用这一不等式就可以証明如下的定理：

如果有一增加的函数序列 $S_n(M)$，函数 $S_n(M)$ 在 B 內調和，又如果这一序列在 B 內的任意的某一点 M_0 有有限的極限，那末它在 B 內处处收斂，並且在任一邊境界都在 B 內的区域 B_1 上为一致收斂。

依定理的条件，在 B 內，成立 $S_{n+1}(M) \geqslant S_n(M)$。由于序列在点 M_0 为收斂的，对任一已給正数 ε，存在 N，使得 $[S_{n+p}(M_0)-S_n(M_0)] \leqslant \varepsilon$ 对 $n \geqslant N$ 及任意 p 成立。設 Σ_0 为以 M_0 为中心、R 为半徑含在 B 內的圓。注意到上面所写出的差式是正的調和函数，我們可以写出：

$$0 \leqslant S_{n+p}(M)-S_n(M) \leqslant \frac{R+\rho}{R-\rho}\varepsilon,$$

式中 M 是所說的圓的任意內点，ρ 是点 M 到 M_0 的距离。以 M_0 为中心、$(R-a)$ (a 是任意小的指定正数)为半徑作圓 Σ_0'。我們得到在圓 Σ_0' 中的估計式：

$$0 \leqslant S_{n+p}(M)-S_n(M) \leqslant \frac{2R}{a}\varepsilon,$$

从此推出 $S_n(M)$ 在圓 Σ_0' 中的一致收斂性。取在 Σ_0 內的一点 M_1，因为序列在这一点收斂，利用上面所指出的論述，我們就得到这序列在以 M_1 为心、連境界都在 B 內的圓中的一致收斂性。繼續如此地进行下去，如同对解析延拓的情形完全一样的作法，我們就可以証明序列在 B 內的所有的閉圓上的一致收斂性。每一連同境界都在 B 內的閉区域 B_1，我們可以用有限个在 B 內的圓去遮蓋它，这就給出序列在这样的区域 B_1 的一致收斂性。再指出：由于前一定理，从序列的一致收斂性就推出序列的極限函数是在 B 內的調和函数。

可以用級数的术語来表达所証得的定理，这就是：如果級数(100)的每項是在 B 中的調和函数，并且从某一 n 起是正的。如果級数在 B 內某点收斂，那末它在 B 內处处收斂，且在每一連同境界都在 B 內的閉区域 B_1 上一致收斂。在前一定理中我們自然可以用减少序列来代替增加序列，相应地，也可以取負的函数来代替正的函数。

202. 拉普拉斯方程的內部边值問題的提法 設 D_i 为三維空間的有限区域，由曲面 S 所包圍。如我們所知，狄义赫利內部問題是要求出函数 $u(M)$ 在 D_i 內調和，在閉区域 $\overline{D}_i$ 內連續，在 S 上取得預先給好的值，这些值是在 S 上的連續函数。問題的解只能是一个[II,194]，在將来，在对境界 S 作了一些假定之下，我們要給出解的存在性的証明。在平面的情形，問題的情况完全是一样的。

对于諾伊曼問題，在境界上所給定的并非函数本身，而是法綫导数 $\frac{\partial u(M)}{\partial n}$ 的極限值 $f(N)$，这时我們是設 M 沿法綫趋向 N 的。如再假設 $u(M)$ 有正常的法綫导数，那末我們可以应用公式(93)到 $u(M)$ 与 $v(M)=1$ 上去，而得到：

$$\iint_S f(N)\,dS=0, \tag{102}$$

因而，在正常法綫导数存在时，这个不等式为諾伊曼內部問題有解的必要条件。我們指出：如果某一函数 $u(M)$ 給出諾伊曼內部問題的解，那末函数 $u(M)+C$ 其中 C 是任意常数也給出問題在同一边值条件 $f(N)$ 下的解。諾伊曼內部問題解的唯一性是在于下述的断言：这些解已取尽了問題所有的解，这就是：如果 $u_1(M)$ 与 $u_2(M)$ 是諾伊曼問題在同一的边值条件 $f(N)$ 下的兩个解，那末它們的差 $u_2(M)-u_1(M)$ 在 D 中应为常数。

以上断言容易証明，只要假設 $u_1(M)$ 与 $u_2(M)$ 有正常的法綫导数。这时差式 $v(M)=u_2(M)-u_1(M)$ 也有正常的法綫导数，它的極限值等于零，因为 $v(M)$ 直到 S 为連續，所以，把公式(92)应用到 $v(M)$，我們就得出：

$$\iiint\limits_{D_i}\left[\left(\frac{\partial v(M)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v(M)}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v(M)}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=0,$$

从此也得出 $v(M)$ 在 D_i 內为常数。后面有一段我們要引出諾伊曼問題解的唯一性的一般証明。

还指出，在狄义赫利与諾伊曼的內部問題提法中，境界 S 也可以由若干塊閉曲面構成。

拉普拉斯方程的第三基本边值問題，是在于求出在 S 內的調和函数，并且，在区域的境界上法綫导数与函数本身的一个綫性組合是已給的。这就是，边值条件具有形式：

$$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_i+p(N)u=f(N)\qquad (N\text{ 在 }S\text{ 上}),\tag{103}$$

式中 $p(N)$ 与 $f(N)$ 是在 S 上給定的連續函数，并且，我們設 $p(N)>0$。假設 $u(M)$ 有正常的法綫导数，我們来証明唯一性定理。如果問題有兩个解，那末它們的差式 $v(N)$ 就会滿足齐次的边值条件：

$$\left(\frac{\partial v(N)}{\partial n}\right)_i+p(N)v(N)=0。\tag{104}$$

对 $v(M)$ 应用公式(92),利用(104),就得出:

$$\iiint\limits_{D_i}\left[\left(\frac{\partial v(M)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v(M)}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v(M)}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=$$

$$=-\iint\limits_{S}p(N)v^2(N)dS。$$

右边的积分不可能是正的,而左边的积分不可能是負的,这就是,它們双方都等于零,由是直接推出 $v(M)=0$。

所有前面的結果在平面的情形都有效。

到現在为止我們考察了所謂內部問題。这些問題都是在某些边值条件下要求决定在有界区域內的調和函数。我們現在轉向于**外部問題**,这时,我們要求在某一閉曲面之外(或某几个閉曲面之外)的無限区域內为調和的函数。对平面也可提出类似的問題。这时,对未知函数在無穷远点鄰域的情况所加的条件起了重要的作用。这一問題在平面的情形与在空間的情形的解法是不同的。我們从說明上面所提到的在無穷远处的条件开始,而首先研究平面的情形。

203. 平面上的外部問題 函数 $u(M)$ 是在無穷远点鄰域为調和的函数,如果点 M 趋向無穷远时,函数 $u(M)$ 有有限的極限,那末我們称函数 $u(M)$ 在無穷远点为正則的。現在来解釋这一定义的意义。在無穷远点的鄰域作起与 $u(M)$ 共軛的調和函数 $v(M)$ [III;2]。依逆时針方向环繞無穷远点一周,函数 $v(M)$ 得到一个常数項的增量。我們記它为 γ。复变函数

$$f(z)=u(z)+v(z)i-\frac{\gamma}{2\pi}\lg z$$

为單值的,且在無穷远点鄰域为正則,因而要在这一鄰域中展开为 z 的整数冪的罗朗級数。我們来証明:在这个展开式中完全沒有 z 的正数冪的項。事实上,如果这样項数有無限的話,那末,当 $|z|\to\to\infty$ 时函数 $f(z)$ 就能够取到与任何預先指定数值任意接近的值

[III$_2$; 17]。但事实是，函数的实数部分。即 $u(z)-\frac{\gamma}{2\pi}\lg|z|$ 在 $\gamma\neq0$ 时它是趋向于無限的；当 $\gamma=0$ 时它有有限的極限(因为 $u(z)$ 有有限的極限)。

如果正数冪的項数是有限，即

$$f(z)=a_m z^m+a_{m-1}z^{m-1}+\cdots+a_0+\frac{a_{-1}}{z}+\cdots\quad(a_m\neq0),$$

那末我們就会有：

$$u(z)-\frac{\gamma}{2\pi}\lg\rho=r\rho^m\cos(m\varphi+\psi)+$$
$$+R\left[a_{m-1}z^{m-1}+\cdots+a_0+\frac{a_{-1}}{z}+\cdots\right]$$

($z=\rho e^{i\varphi}$;　$a_m=re^{i\psi}$,　R—实数部分的記号)。

如果在 φ 固定时把等式的两边用 ρ^m 来除后再令 ρ 趋向于無穷，那末左边显然地趋向于零，但右边却有極限 $r\cos(m\varphi+\psi)$，它与 φ 有关，并非恒等于零。这样一来，我們就引出了矛盾，因而 $f(z)$ 的展开式中只能有自由項与負数冪的項：

$$f(z)=a_0+\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+\cdots。\tag{105}$$

当 $|z|\to\infty$ 时，函数 $f(z)$ 有有限而确定的極限 a_0，从此可以直接推出，常数 γ 应当等于零，这就是，如果 $u(M)$ 在无穷远点正則，$v(M)$ 是它的共軛函数，那末函数 $f(z)=u(z)+iv(z)$ 在無穷远点的鄰域有展开式(105)。从前面的論述可直接推出，为使能得出这一結果，只要單單假設 $u(M)$ 在無穷远点的鄰域是有界就够了。从此已能推出展开式(105)，因而当点 M 趋向無穷远时 $u(M)$ 具有有限的極限。

狄义赫利外部問題归結为求在閉迴道 l 以外为調和的函数 $u(M)$，要它在無穷远为正則，在 l 上取指定的值 $f(N)$。設 z_0 为在 l 内部的某一点。进行平面上的保角变換 $w=\frac{1}{z-z_0}$。平面在

l 以外的部分变为某一有界区域 B，調和函数变为調和函数[**III**$_2$; **29**]，点 $z=\infty$ 变为 $w=0$，$f(z)$变成 w 的函数，它在 $w=0$ 处是正則的。以上所叙述的狄义赫利外部問題轉化为变后区域的內部問題，显然，对所提的問題，它只有唯一的解。

利用展开式(105)，关于 z 微分，并注意到

$$\text{在 } |z|\to\infty \text{ 时,}\quad z^2 f'(z)\to -a_{-1},$$

我們就可断言：如果調和函数 $u(M)$ 在无穷远点正則，那末乘积 $\rho^2\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\rho^2\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$(\rho=|z|)$在点 M 趋向无穷远时仍保持有界的。从此直接推得乘积 $\rho^2\dfrac{\partial u}{\partial m}$（$m$ 为任意方向，在点 M 变化时它也可能发生变化），在点 M 无限远离时仍保持有界。如果 B 是平面在閉迴道 l 之外的部分，$u(M)$ 与 $v(M)$ 是在 B 內为調和的函数，在无限远点为正則，并且及其一阶导数直到迴道上都是連續的，那末就会成立公式：

$$\iint\limits_B\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dS=\int_l u\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e ds \tag{106}$$

$$\int_l\left[u\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e-v\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e\right]ds=0, \tag{107}$$

式中 n 是 l 的朝向区域 B 的外法綫方向。这些公式的証明完全和 [**200**] 中所作的关于空間情形的証明一样。只要指出下列事实就够了：在以定点 O 为中心、R 为半徑的圓周 C 上，乘积 $u\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)_e$ 与 $u\left(\dfrac{\partial v}{\partial u}\right)_e$ 有估值 $\dfrac{1}{R^2}$，而圓周长为 $2\pi R$。如同在[**200**]中一样，如果用 $u(M)$ 与 $v(M)$ 沿 l 存在正常法綫导数这一要求来代替它們的第一阶偏导数直到 l 的連續性，公式(106)与(107)仍有效。

現在来讲下列情形的諾伊曼外部問題，这时，在 l 上当 M 沿法綫趋向 N 时有边值条件：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e=f(N)\qquad(N\text{ 在 } l \text{ 上}), \tag{108}$$

而 $u(M)$在无穷远点的正則性要求仍然保留。設解 $u(M)$ 存在，且

有在 l 上的正常法綫导数。作有充分大的半徑 R 的圓周 C，对 $u(M)$ 与 $v(M)\equiv 1$ 应用公式(107)，所考虑区域是 l 与 C 所圍成的，我們就得：

(109)
$$\oint_l \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e ds+\oint_C \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e ds=0。$$

但在 C 上，导数 $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e$ 的阶数为 $\frac{1}{R^2}$，从此可得，当 $R\to\infty$ 时沿 C 的积分趋于零，取極限，由于(108)就得到：

(110)
$$\int_l f(N)\,ds=0$$

对諾伊曼内部問題我們也得出过这一必要条件。利用公式(106)可以証明，在具有正常法綫导数的条件下諾伊曼外部問題解的唯一性[見 202]。在三維空間，諾伊曼外部問題的可解性却不需要类似于(110)的条件。

再指出一个事实：基本奇解 $\lg\frac{1}{r}$ 在無穷远点不是正則的。当 $r\to\infty$ 时它趋向于 ∞。对应于偶極子的第二奇解 $\frac{\cos\varphi}{r}$ 在無穷远点却已为正則，它在这点化为零。在三維空間，不仅偶極子的势函数，而且是基本解 $\frac{1}{r}$ 在無穷远点都化为零。單層势函数(81)給出 l 外的調和函数，但一般說来在無穷远点并非正則。如果电荷的总和为零，即

(111)
$$\int_l \mu(N)\,ds=0,$$

那末在这特殊情形下，势函数(81)为正則的。事实上，設 R 为点 M 到原点的距离。把等式(111)乘以与积分变点 N 無关的因子 $\lg R$，我們就可以把势函数(81)写作形式：

$$u(M)=\int_l \mu(N)\lg\frac{R}{r}\,ds,$$

当 M 無限远离时，$\lg\frac{R}{r}$ 关于在 l 上的点 N 一致地趋向于零。因而

我們看到,單層勢函数在無穷远点为正則,且等于零。

再証明調和函数的一个性質:設 $u(M)$ 是某一除去中心的圓域中的調和函数,我們取該圓的中心 N_0 作为坐标原点,$u(M)$ 在該圓中的絕对値为有界。我們要証明当 $M\to N_0$ 时 $u(M)$ 的極限値是存在的,又如取該極限値为 $u(N_0)$,則 $u(M)$ 在整个圓內(包括原点)为調和的。为了要証明这一点,我們就只要进行为了引出展开式(105)的那些論述就可以了,但是要把無穷远点改为原点。代替(105)式的是:

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots,$$

从此也就得出我們的論断。

204. 凱尔文变换 在考察三維空間的調和函数时,我們已不像平面的情形一样,有那样强大的輔助工具——复变函数論,特別是把每一調和函数仍变为調和函数的保角变換。但在三維空間的場合,也具有某些非常特殊形式的点变換,它們也具有这个性質。卽是:如果 $u(x, y, z)$ 是某一区域 D 中的調和函数,那末函数

$$v(x', y', z')=\frac{1}{r'}u\left(\frac{x'}{r'^2}, \frac{y'}{r'^2}, \frac{z'}{r'^2}\right) \tag{112}$$

$$(r'^2=x'^2+y'^2+z'^2)$$

也就是区域 D' 的調和函数,区域 D' 是由 D 借助变換

$$x'=\frac{x}{r^2};\quad y'=\frac{y}{r^2};\quad z'=\frac{z}{r^2}\qquad (r^2=x^2+y^2+z^2) \tag{113}$$

面得到的。我們首先注意到 $r'=\dfrac{1}{r}$,面(113)的逆变換也与(113)具有同一的形式,卽:

$$x=\frac{x'}{r'^2};\quad y=\frac{y'}{r'^2};\quad z=\frac{z'}{r'^2}。 \tag{113$_1$}$$

如果引入球坐标,公式(112)化为

$$v(r', \theta, \varphi)=\frac{1}{r'}u\left(\frac{1}{r'}, \theta, \varphi\right)$$

的形狀。注意到函数 $u(r, \theta, \varphi)$ 满足拉普拉斯方程：

$$r^2 u_{rr}+2r u_r+\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\, u_\theta)_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}\, u_{\varphi\varphi}=0,$$

以及一个显然满足的恒等式：

$$r'^3\left(v_{r'r'}+\frac{2}{r'}\, v_{r'}\right)=u_{rr}+\frac{2}{r}\, u_r,$$

我們不难断定：函数 $v(r', \theta, \varphi)$ 满足拉普拉斯方程。变换 (113) 是关于以原点为中心的單位球的对称变换[見 **II**; **197**]。自然，我們也能够把球心取在任意点 (a,b,c)，半徑 R 也可視为任意的。在这时，公式 (112) 与 (113) 可写为下面的形狀：

$$x'-a=\frac{R^2}{r^2}(x-a);\quad y'-b=\frac{R^2}{r^2}(y-b);\quad z'-c=\frac{R^2}{r^2}(z-c)$$

(114)

$$v(x', y', z')=\frac{R}{r'}\, u\left[a+\frac{R^2}{r'^2}(x'-a), \cdots\right]$$

$$r^2=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2};$$

$$r'^2=\sqrt{(x'-a)^2+(y'-b)^2+(z'-c)^2}。$$

变换 (114) 称为凱尔文变换。在闡明調和函数在三維空間無穷远点的正則性这一概念之前，我們先来証明它的一个性質，在平面場合下对应的性質在前段末已証明过了。設有一以原点为心的球 S_0，$u(M)$ 为把 S_0 除去中心后所得的区域中的調和函数，在这球內为有界。我們要証当 M 趋向原点时，$u(M)$ 的極限是存在的，并且，如果取这个極限为 $u(M)$ 在原点的值，那末 $u(M)$ 也在原点为調和。

利用在[**II**; **197**]所指出的积分，我們可以作出在 S_0 內全部的点为調和的函数，而在 S_0 的表面上，取与 $u(M)$ 相同的極限值。

对差式 $u_1(M)-u(M)$ 作关于球 S_0 的凱尔文变换。变后函数在球 S_0 外調和，在这一球的表面等于 0，而当 M' 趋向于無穷远时趋向于零。最后一情况是可由变换的形狀及 $u(M)$ 在坐标原点

有界这一事实所直接推出。注意到調和函数的極值应在区域边界上取到，我們就可断言，函数 $u_1(M)-u(M)$ 应恒等于零，即函数 $u_1(M)$ 重合于函数 $u(M)$，因而，后一函数也在坐标原点調和。

数 $u(M)$ 为在 O 点及其鄰域中調和的函数，我們取 O 为原点。以 O 为中心、任意的半徑（比如說是 1）作球，关于这个球作凱尔文变换，我們就得到变后函数 $v(M')$，它在無穷远点鄰域为調和的。当 $r'\to\infty$ 时，这一函数趋向于零，此外，从公式 (112) 还可直接推出，当 $r'\to\infty$ 时乘积 $r'v(M')$ 保持有界，我們也还可以同样地肯定乘积 $r'^2\dfrac{\partial v}{\partial x'}$，$r'^2\dfrac{\partial v}{\partial y'}$，$r'^2\dfrac{\partial v}{\partial z'}$ 的有界性。后面的这些結果可直接地由函数 $u(M)$ 的导数在原点鄰域有界这一事实推出。相反地，如果函数 $u(M)$ 在無穷远点鄰域內有界，而且当 $r\to\infty$ 时，乘积 $ru(M)$ 保持有界，那末施行凱尔文变换，我們就能断言变后函数 $v(M')=\dfrac{1}{r'}u(M)$ 在原点的鄰域中調和，有界，因面也就在原点調和。但这时，由上面所导出的論述直接可推出，当 $r\to\infty$ 时，乘积 $r^2\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$r^2\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$r^2\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 保持有界。最后，我們設函数 $u(M)$ 在無穷远点鄰域內調和，而且仅知道 $r\to\infty$ 时 $u(M)\to 0$，就是說，任給一正数 ε，存在一正数 A，使得：只要 $r\geqslant A$，就有 $|u(M)|\leqslant\varepsilon$。作以原点为中心、适当大的半徑的球 S_0，使得 $u(M)$ 在 S_0 外以及这球面上为調和。我們可以作出在球 S_0 內的調和函数 $v_1(M')$，使它在球面上的極限值与 $u(M)$ 的極限值相同。

設 $u_1(M)$ 是对函数 $v_1(M')$ 关于球 S_0 作凱尔文变换的結果。差式 $u(M)-u_1(M)$ 在 S_0 外为調和函数，在 S_0 上等于零，又当 $r\to\infty$ 时也趋向于零。因而我們原来的函数 $u(M)$ 应当重合于函数 $u_1(M)$，而 $u_1(M)$ 就是在球 S_0 內部的調和函数 $v_1(M')$ 的凱尔文变换的結果。对这样的函数，如我們以前見到过的乘积

$$(115)\qquad ru_1(M),\ r^2\frac{\partial u_1(M)}{\partial x},\ r^2\frac{\partial u_1(M)}{\partial y},\ r^2\frac{\partial u_1(M)}{\partial z}$$

在 $r\to\infty$ 时应当保持有界，因而我們看到，从 $r\to\infty$ 时 $u(M)\to 0$ 这一事实就能推出对 $u(M)$ 所作的乘积(115)在 $r\to\infty$ 时都应保持有界。

如果 $r\to\infty$ 时 $u(M)\to 0$，我們就称在無穷远点鄰域內調和的函数 $u(M)$ 在無穷远为正則的。如果仅仅知道 $u(M)$ 趋向于一个固定的極限 b，我們可称：这样的函数等于一个常数項 b 与一个在無穷远为正則的調和函数的和。如果对 S 外的調和函数 $u(M)$，$v(M)$，乘积(115)保持有界，这些函数从外面到 S 上有正常的法綫导数，那末如同我們已經看到的[200]，对这些函数成立公式(94)，(95)，其中的积分是展布在 S 外的那部分空間。

狄义赫利外部問題是要求在 S 外調和的函数 $u(M)$，使得它在無穷远点正則，直到 S 上是連續的，并且在曲面 S 上采取預先給定的函数值 $f(N)$。取在 S 內的某一点 M_0 为原点，作一凱尔文变换，我們就可以把狄义赫利外部問題化为对变后区域的狄义赫利內部問題。利用普通的論述，可以証明狄义赫利外部問題解的唯一性。問題的解的存在性归結到狄义赫利內部問題的解的存在性，而后者，在关于曲面的一些一般性的假設下，以及边値条件为連續的条件之下，可以証明它是有解的。

我們要指出狄义赫利外部問題提法在平面的場合与在空間的場合的差别。在平面的場合，我們給了边界上的極限值且只要求当 $r\to\infty$ 时函数趋向于有限的極限。在三維空間的場合，我們还給定这一極限值，即假設它是趋向于零。我們似乎也还可以假設：当 $r\to\infty$ 时，我們的函数趋向于某一已給数 b。考察差式 $u(M)-b$，我們就会回到原来所提的問題上去。不难看出，在三維空間的场合，为了要决定狄义赫利外部問題的解，光是要求 $u(M)$ 在 $r\to\infty$

时有有限的極限还是不够的。事实上，我們把若干电荷安放在导体的表面上，这样，在曲面 S 上，静电的單層勢函数为某一常数 c，并且，不难証明，$u(M)$ 会給出一个在 S 外的調和函数，且在 $r\to\infty$ 时，$u(M)$ 趋向于零。又常数 c 本身也是 S 外的調和函数，在 S 上也有同样的極限值，但据我們的定义，它在無穷远点已經不是正則的了。对平面的場合，这一論述是不能移用的，因为由曲綫 l 所确定的静电單層勢函数在無限远点化为無限。还指出，有时仅在函数 $u(M)$ 在無穷远点正則的情形，人們方才称它为在曲面 S 外調和的。这就是說，某些作者把無穷远点为正則这一要求，也包括在“在曲面 S 外調和的函数”这一定义中。

諾伊曼外部問題是在于求出一个在 S 外調和的函数，在無穷远正則但在 S 上它的法綫导数的極限值是已給的。在現在的情况，法綫导数的極限值已不必満足条件(110)。在平面的場合，我們所进行过的对于这个条件的証明已經不适用于空間的場合，这是因为半徑为 R 的球面的面积的阶次为 R^2，而 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 沿半徑为充分大的球面积分的值，当 $R\to\infty$ 时不应趋向于零。如果假定諾伊曼外部問題的解有正常法綫导数，那末問題的解的唯一性可直接由公式(94)推出。类似的論述我們对諾伊曼内部問題是已进行过了。

在本段最后，我們指出，調和函数的上述的在無穷远点近旁的性質，可以从这个函数在無穷远近旁依球函数的展开式中直接得出。

205. 諾伊曼問題解的唯一性 在本段中我們要給出諾伊曼内部問題解的唯一性的証明，这里并不用到法綫导数的正常性。首先考察某种特殊类型的立体，在其中作起調和函数，这函数是具有以下將指出的一些性質。設 $T(a, k, h)$ 为一立体，它是由曲面

(116) $$Z=k(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$$

及平面 $Z=h$ 所圍成的。于此 k, α 与 h 都是正常数。点 $(0, 0, 0)$ 称为这物体的頂点，記它为 N_0。立体在平面 $Z=h$ 中的这一部分边界用字母 σ' 来記它，而字母 σ'' 表示物体边界的其余部分。再設 u_0 与 u_1 是兩个实常数，且 $u_0<u_1$。作起函数 $w(M)$，使在立体 $T(\alpha, k, h)$ 內部为調和，直到边界为連續，又在 σ' 上 $w(M)<u_1$，在 σ'' 上 $w(M)\leqslant u_0$，又 $w(N_0)=u_0$。如果 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，θ 为向徑与 z 軸的夾角，$P_n(x)$ 为勒上特函数[**III**$_2$;**141**]，那末如所知[**III**$_2$; **135**]，函数 $r^nP_n(\cos\theta)$ 对任意 n 將在立体 $T(\alpha, k, h)$ 內調和。我們作具有形狀

(117) $$w(M)=\gamma[r\cos\theta+r^{1+\beta}P_{1+\beta}(\cos\theta)]+u_0$$

的 $w(M)$，于此 γ 与 β 为正常数，稍后就可决定的。显然，我們有 $w(N_0)=u_0$。首先我們証明，对所有与零充分接近的 β，有：

(118) $$P_{1+\beta}(0)<0。$$

函数 $P_n(x)$ 为超越几何級数之和：

$$P_n(x)=F\left(n+1, -n, 1; \frac{1-x}{2}\right) \quad (|x|<1),$$

由此可以写出：

$$P_n(0)=1-\frac{(n+1)n}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n-k+1)}{(k!)^2 2^k}$$

或者

$$P_n(0)=-\frac{(n-1)(n+2)}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\left[\prod_{s=1}^{k}\frac{(n+s)(n-s+1)}{2s^2}\right]。$$

我們假設 $1<n<2$，所以对应于 $s=1$ 及 $s=2$ 的因子是正的，而其余的 $(k-2)$ 个因子为負。对后面这些因子添上乘数 $(-1)^{k-2}$，我們可以把它們写成形狀：

$$0<\frac{(n+s)(s-n-1)}{2s^2}=$$

$$=\frac{s^2-n^2-s-n}{2s^2}<\frac{1}{2}\quad(s=3,\ 4,\ \cdots)。$$

因此，如果我們把首先兩个因子分出，就得到不等式：

$$P_n(0)<-\frac{(n-1)(n+2)}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{16}\cdot\frac{1}{2^{k-2}},$$

即

$$P_n(0)<\frac{(n-1)(n+2)}{2}\left[\frac{(n+1)n}{8}-1\right],$$

从此也推出：如果 $n^2+n<8$，則 $P_n(0)<0$。因而对所有的与零充分接近的正的 β，(118) 已証好。固定 β，使它滿足这个条件，并且 $\beta<\alpha$，于此 α 是取自方程(116)。我們注意到 $z=r\cos\theta$，在曲面(116)上就得到：

$$r\cos\theta+r^{1+\beta}P_{1+\beta}(\cos\theta)=k\rho^{1+\alpha}+r^{1+\beta}P_{1+\beta}(\cos\theta),$$

于此 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，而最后，在曲面(116)上：

$$r\cos\theta+r^{1+\beta}P_{1+\beta}(\cos\theta)=r^{1+\beta}[kr^{\alpha-\beta}\sin^{1+\alpha}\theta+P_{1+\beta}(\cos\theta)]。$$

如果 $r\to0$，那末 $\theta\to\frac{\pi}{2}$，而由于 (118) 及 $\beta<\alpha$，这时方括弧有負的極限值。因而，我們可以固定 h 为一充分小的正数，能使得在物体 $T(\alpha,\ k,\ h)$ 的表面 σ'' 这一部分上成立：

$$r\cos\theta+r^{1+\beta}P_{1+\beta}(\cos\theta)\leqslant0。\tag{119}$$

最后，我們选擇正数 γ 充分小，使得公式(117)給出在 σ' 上 $w(M)<$ $<u_1$。所作的函数 $w(M)$ 滿足上述的一切条件。在物体 $T(\alpha,\ k,\ h)$ 的軸上，即在 Z 軸上，我們有：

$$w(M)=\gamma(z+z^{1+\beta})+u_0\quad(z>0)。$$

如果 M 是这个軸上的变点，那末

$$\frac{w(M)-w(N_0)}{z}=\gamma+\gamma z^{\beta}>\gamma。\tag{120}$$

現証明定理：

定理 如果 $u(M)$ 是在 D_i 內非常数的調和函数，u_0 为 $u(M)$ 在 D_i 內数值的有限的下确界，并存在 S 上的点 N_0，使得当 M 从內部趋向 N_0 时，$u(M)\to u_0$，那末当 M 沿法綫趋向 N_0 时，比

$$\frac{u(M)-u(N_0)}{|N_0M|} \tag{121}$$

保持大于某一正数。

我們假設存在立体 $T(a, k, h)$，它与 S 相切于点 N_0，而它的所有的点，除 N_0 外，均在 S 內部。数 h 固定得充分小，使得在所論立体表面的 σ'' 部分上，处处成立(119)。設 u_1 是 $u(M)$ 在 $T(a, k, h)$ 的表面上 σ' 部分的最小值。因为 $u(M)$ 并非常数，所以 $u_0<$ $<u_1$，并且如果选择 γ 充分小，我們就可以作起具有前述性質的 $w(M)$。并且 $w(N_0)=u(N_0)$，在 $T(a, k, h)$ 的表面的其余部分 $w(N)<u(N)$。这时，因为 Z 軸的方向指向 S 在点 N_0 的內法綫，我們就得到：

$$\frac{u(M)-u(N_0)}{|N_0M|}=\frac{u(M)-u(N_0)}{z}>\frac{w(M)-w(N_0)}{z}>\gamma, \tag{122}$$

这就証明了定理。

从所証定理直接推出諾伊曼問題解依如下意义的唯一性：

如果在 D_i 內調和的函数 $u(M)$ 直到 S 为連續，且在整个曲面上 $\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_i=0$，那末 $u(M)$ 为常数。設 N_0 为曲面 S 上使 $u(M)$ 有最小值的点。从(122)直接推出：当 M 保持在 N_0 点的法綫上，$M\to N_0$ 时，沿 N_0 点法綫方向的导数不可能趋向于零。如果是这样的，那末从有限改变量公式，我們就会得出：

$$\frac{u(M)-u(N_0)}{z}\to 0,$$

这就与(122)相矛盾。

諾伊曼外部問題的唯一性也可以完全同样地进行証明。

上述証明是 M. B. 凱尔迭盧(Келдыш)与 M. A. 拉符倫捷夫(Лаврентьев)的共同著作中所給出的(Доклады Академии Наук СССР, т. XVI; № 3; 1937)。

如果可以从 S 的內部用球来与它相切,那末唯一性定理的証明可以依初等方式进行 [C. 沙勒姆巴(Заремба), Успехи математических наук, т. I вып. 3—4]。

206. 三維空間边值問題的解法 現考察对于曲面 S 所包圍的区域 D_i 的狄义赫利的与諾伊曼的內部問題。我們將求具双層勢函数形狀的

$$(123)\qquad u(M)=\iint_S \mu(N)\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}dS\qquad (r=|MN|),$$

作为狄义赫利內部問題的解,于此 $\boldsymbol{r}$ 是 MN 的方向,$\boldsymbol{n}$ 是在曲面上点 N 的外法綫方向。所求的是密度函数 $\mu(N)$。根据公式(42)的第一式,具边值

$$(124)\qquad u|_S=f(N)$$

的狄义赫利內部問題等价于对密度 $\mu(N)$ 的如下的积分方程:

$$f(N_0)=\iint_S \mu(N)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})}{r_0^2}dS+2\pi\mu(N_0)$$
$$(r_0=|N_0N|)。$$

引入核

$$K(N_0;N)=-\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})}{r_0^2},$$

我們就能把最后一方程写作形狀:

$$(125)\qquad \mu(N_0)=\frac{1}{2\pi}f(N_0)+\iint_S \mu(N)K(N_0;N)dS。$$

核 $K(N_0;N)$ 并不对称,这是因为法綫是选为点 N 的,而 $\boldsymbol{r}_0$ 記方向 $\overline{N_0N}$。如果采取 N_0 点的法綫,$\boldsymbol{r}_0$ 的方向取为从 N 到 N_0,那

末我們就得到了伴随的方程轉置核[9]。因而这一轉置核 $K_1(N_0;N)$ 是由公式

$$K_1(N_0;N)=K(N;N_0)=\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)}{r_0^2} \tag{126}$$

所定义，这里 $\boldsymbol{n}_0$ 是点 N_0 的外法綫方向。因为在 $K_1(N_0;N)$ 中我們应当把 $\boldsymbol{r}_0$ 的方向改为相反的方向，而在(126)中 $\boldsymbol{r}_0$ 仍然記方向 $\overline{N_0N}$，所以我們把核改变一次符号。以

$$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_i=f(N) \tag{127}$$

为边值条件的諾伊曼內部問題的解我們要用單層勢函数的形式来求它，即置

$$u(M)=\iint\limits_S\frac{\mu(N)}{r}dS。 \tag{128}$$

利用公式(49)的第一式，我們导来了与所提問題相等价的积分方程

$$f(N_0)=\iint\limits_S\mu(N)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)}{r_0^2}dS+2\pi\mu(N_0)。$$

这一方程也可以写作

$$\mu(N_0)=\frac{1}{2\pi}f(N_0)-\iint\limits_S\mu(N)K_1(N_0;N)dS。 \tag{129}$$

完全一样地，利用公式(42)与(49)的第二式，我們得到在边值条件

$$u|_S=f(N); \tag{130$_1$}$$

$$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n}\right)_e=f(N) \tag{130$_2$}$$

下的狄义赫利外部問題与諾伊曼外部問題的积分方程：

$$\mu(N_0)=-\frac{1}{2\pi}f(N_0)-\iint\limits_S\mu(N)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})}{r_0^2}dS \tag{131$_1$}$$

$$\mu(N_0)=-\frac{1}{2\pi}f(N_0)+\iint\limits_S\mu(N)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)}{r_0^2}dS, \tag{131$_2$}$$

于此，如同以前一样，我們用(123)的形式来求狄义赫利問題的解，用(128)的形式来求諾伊曼問題的解。写出帶參数的方程

$$\mu(N_0)=\varphi(N_0)+\lambda\iint_S \mu(N)K(N_0;N)dS \tag{132}$$

$$\mu(N_0)=\varphi(N_0)+\lambda\iint_S \mu(N)K_1(N_0;N)dS。 \tag{133}$$

在 $\lambda=1$, $\varphi(N_0)=\frac{1}{2\pi}f(N_0)$ 时，方程(132)对应于狄义赫利內部問題，当 $\lambda=-1$ 与 $\varphi(N_0)=-\frac{1}{2\pi}f(N_0)$ 时，它对应于狄义赫利外部問題。当 $\lambda=1$ 且 $\varphi(N_0)=-\frac{1}{2\pi}f(N_0)$ 时，方程(133)对应諾伊曼外部問題，在 $\lambda=-1$, $\varphi(N_0)=\frac{1}{2\pi}f(N_0)$ 时它对应于諾伊曼內部問題。如果 S 是略普諾夫曲面，且在条件(3)中 $\alpha=1$，那末根据[**192**]的結果，我們有对积分方程的核的估計：

$$|K(N_0;N)|\leqslant\frac{C}{r}, \tag{134}$$

而我們就可以認为，对方程(132)及(133)，积分方程理論的基本定理[**19**]都有效。

207. 积分方程的研究 考察齐次方程：

$$\mu(N_0)=\lambda\iint_S \mu(N)K(N_0;N)dS。 \tag{135}$$

对凸曲面的情形，它的研究可以很簡單地进行。在这时 $\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)\geqslant0$ 而 $K(N_0;N)\leqslant0$。設 $\mu(N)$ 是方程(135)的非零解，設 N_0 是使 $|\mu(N)|$ 取到最大値的点。如果 $\mu(N)$ 不是常数，那末我們得到：

$$|\mu(N_0)|<|\lambda||\mu(N_0)|\iint_S\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)}{2\pi r_0^2}dS,$$

或者由于(26)：

$$|\mu(N_0)|<|\lambda||\mu(N_0)| \qquad (\mu(N_0)\neq0);$$

从此 $|\lambda|>1$。如果在公式(135)中我們置 $\mu(N)$ 为非零常数，那末再一次利用公式(26)，我們就得到 $\lambda=-1$。

因而我們得到：

如果 S 是凸曲面，那末 $\lambda=1$ 并非方程(135)的特征值，而 $\lambda=-1$ 为秩数为 1 的特征值，对应特征函数 $\mu(N)=$常数。因而我們能够断言。对方程(133)，$\lambda=1$ 也并非特征值，而 $\lambda=-1$ 是秩数为 1 的特征值。

現在要証，这些結果对任意的 $\alpha=1$ 的略普諾夫曲面也成立，在这时我們利用[200]中的結果，它們的基础在于制作平行曲面的可能性。我們現在將从方程(133)出發而考察 $\lambda=1$ 时对应的齐次方程：

$$\mu(N_0)=\iint_S \mu(N)K_1(N_0;\ N)dS。\tag{136}$$

設 $\mu_0(N)$ 是这个方程的連續解。我們必須証明 $\mu_0(N)\equiv 0$。以 $\mu_0(N)$ 为密度的單層勢函数給出函数 $u_0(M)$，它在 D_i 与 D_e 都調和，在全空間連續，它的法綫导数 $\left(\frac{\partial u_0(N)}{\partial n}\right)_e$ 在 S 上的極限值等于零。最后一事实是由于 $\mu_0(N)$ 按条件滿足方程(136)而推出的。公式(94)可以应用到單層勢函数 $u_0(N)$，从此就推出 $u_0(N)$ 在 D_e 中为常数。單層勢函数在無穷远处等于零，因而在 D_e 中 $u_0=0$，特別在 S 上也有 $u_0=0$。这时在 S 内調和函数 $u_0(M)=0$，这就是在全空間 $u_0(M)\equiv 0$。注意到(54)，我們得到：

$$\mu_0'(N)=\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial u_0(N)}{\partial n}\right)_i-\left(\frac{\partial u_0(N)}{\partial n}\right)_e\right]\equiv 0$$

在 S 上成立，这就是所要証明的。因而可以断言 $\lambda=1$ 并非方程(132)与(133)的特征值。由于(26)，齐次方程(135)当 $\lambda=-1$ 时有等于常数的解，这就是 $\lambda=-1$ 为方程(132)及(133)的特征值。我們現証它的秩数等于 1，这只要証明当 $\lambda=-1$ 时齐次方程

(133)，即

$$\mu(N_0) = -\iint_S \mu(N) K_1(N_0; N) dS \tag{137}$$

除一任意常数因子外只有一个特征函数。

設 $\mu_1(N)$ 为方程(137)的特征函数。以 $\mu_1(N)$ 为密度的單層勢函数給出一个在 D_i 内調和的函数 $u_1(M)$，对于它，$\left(\frac{\partial u_1(N)}{\partial n}\right)_i$ 在 S 上的極限值等于零。如前，公式(92)指出，$u_1(M)$ 在 D_i 内为常数，在 S 上也为常数，因而 $\mu_1(N)$ 給出一个單層勢量，它在 S 內及 S 上保持为常数值。換言之，$\mu_1(N)$ 是靜电密度。

設 $\mu_2(N)$ 是方程(137)的另一非零解。我們要証明：$\mu_2(N)$ 与 $\mu_1(N)$ 只相差一个常数因子。作起以 $\mu_3(N)=\mu_1(N)+c\mu_2(N)$ 为密度的單層勢函数 v_3，于此 c 为常数。如前面一样，它在 D_i 中和在 S 上將是常数。可以选擇 c 使得 u_3 在 D_i 中及在 S 上的常数值等于零。單層勢函数 u_3 在無穷远也等于零。从此推得 u_3 在 D_e 中也等于零，即在全空間 $u_3\equiv 0$。从此，并根据公式(54)，我們就得出結論 $\mu_3(N)=\mu_1(N)+c\mu_2(N)=0$ 在 S 上成立，这就是 $\mu_2(N)$ 实际上与 $\mu_1(N)$ 只差一常数因子。从 $u_3\equiv 0$ 的証明中，可直接推出以 $\mu_1(N)$ 与 $\mu_2(N)$ 为密度的單層勢函数在 $\overline{D}_i$ 中均不为零。从此推出决定常数 c 的可解性。

积分

$$\iint_S \mu_1(N) dS \tag{138}$$

給出均衡地分布在导体表面的电荷的总的电量，現証它是不等于零的。如剛我們所已經提到，u_1 在 D_i 中保持为常数，而公式(54)給出：

$$\mu_1(N) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial u_1(N)}{\partial n}\right)_e。 \tag{139}$$

如果积分(138)等于零，那末我們就有：

$$\iint_S \left(\frac{\partial u_1(N)}{\partial n}\right)_e dS = 0。\tag{140}$$

对 u_1 应用公式(94)。在 S 上函数 u_1 保持为常数值，而积分(140)等于零。从此推出，当 $u=u_1$ 时公式(94)的兩端等于零，这就是 u_1 在 D_e 等于常数，而公式(139)表明 $\mu_1(N)$ 在 S 上等于零，而这就与基本的假設 $\mu_1(N)$ 为齐次方程(137)的不恒等于零的解相矛盾了。因而积分(138)实在是不等于零。只要把 $\mu_1(N)$ 乘以常数因子，我們就可以給积分(138)以任意預先給定的数値。

从所举出的論述中推出，方程(132)及(133)当 $\lambda=1$ 时对任何的自由項有确定的解，而我們因而就得到狄义赫利內部問題与諾伊曼外部問題的解。

現轉向于 $\lambda=-1$ 时的方程(133)。它給出作为諾伊曼內部問題的解的勢函数的密度。为使解存在，其充分且必要条件是积分方程的自由項正交于齐次伴隨方程的特征函数，也就是与常数相正交。这就引导到条件：

$$\iint_S f(N)\,dS = 0,\tag{141}$$

其必要性我們从前已見到过。在所作的假設下，它也是充分的。如果这一条件滿足，那末非齐次方程除掉齐次方程(137)的解一項而外，即除掉成为靜电密度的一項而外，就是完全确定的。把这一未定的項代入單層勢函数中，就导得常数勢函数，而在解諾伊曼內部問題时常数項并不起实質上的作用。

現考察 $\lambda=-1$ 时的方程(132)，它对应于狄义赫利外部問題。为使这个方程为可解，其充要条件是方程的自由項正交于齐次方程(137)的解，就是說正交于靜电密度 $\mu_1(N)$：

$$\iint_S \mu_1(N) f(N)\,dS = 0。\tag{142}$$

这一补充条件并非由于問題的本質，而是仅仅因为我們要求具双層勢函数形狀的狄义赫利外部問題的解所引起的。从这一种勢函数的形狀就直接地推出，它在 $r\to\infty$ 时化为零，其阶数为 $\frac{1}{r^2}$。这样的加强的在無穷点化为零的条件在解狄义赫利外部問題不是必須的。就是这个情况招致了补充条件(142)的出現。現在証明可以对 $f(N)$ 不加任何补充条件而利用双層勢函数与單層勢函数的和式来解决狄义赫利外部問題。事实上，設 $\mu_1(N)$ 是靜电密度，对于它积分(138)等于 1，又 $u_1(M)$ 为对应它的單層勢函数。勢函数 $u_1(M)$ 在 S 上有等于某一非零常数 k 的極限値。选取常数 c，使能成立等式：

$$\iint_S \mu_1(N)[f(N)-c]dS=0,$$

这就是，置

$$c=\iint_S \mu_1(N)f(N)dS。$$

根据以前，我們可以組成一双層勢函数 $w(M)$，它是以 $f(N)-c$ 为边值的狄义赫利外部問題的解。这时和

$$w(M)+\frac{c}{k}u_1(M)$$

是具所給的边値 $f(N)$ 的狄义赫利外部問題的解。

注　在本段中我們假設：我們要解边値問題的区域是由一个曲面 S 所圍成的。如果有界区域 D 的外面是由曲面 S_0 所包圍，內面是由曲面 S_k $(k=1, 2, \cdots, m)$ 所圍成，結果就要不同了。將对这一区域求狄义赫利問題的成双層勢函数形狀的解。对密度函数，我們仍然得到 $\lambda=1$ 时的方程(132)，并且 S 为 D 的全边界，卽 S 由曲面 S_0 及 S_k $(k=1, 2, \cdots, m)$ 構成，并且在 S_k 上法綫应当朝向 D 外，这就是朝曲面之內。这样我們就有狄义赫利內部問題。在 $\lambda=1$ 时的方程(133)对应諾伊曼外部問題。在这一情形

下，它是来求每一曲面 S_k 內部及 S_0 外部的調和函数，并且在这些曲面上它的法綫导数值为已給。照例，在無穷远点函数应为正則的。

如果所給的法綫导数之值等于零，那末有 $\lambda=1$ 时的齐次方程，如同我們剛才所見，若是 D 由一个曲面所圍成，这一方程只有零解。在現在的情况下就不是这样了。事实上，我們把所有的曲面看作导体表面。在曲面 S_1 上安放單位的正电荷，而曲面 S_0 通地，并設在所有曲面已建立好靜电体系。在曲面 $S_l(l=2,\cdots,m)$ 我們有誘导的电荷分布，其总量为零。

設 $\mu_1(N)$ 是在 S 上所得到的靜电分布的密度。具有这样的密度的單層勢函数显然在每一曲面 S_k 內部为常数，并在 S_0 之外等于零，就是說，这一勢函数是具有齐次边值条件的諾伊曼外部問題的解。換言之，$\mu_1(N)$ 滿足当 $\lambda=1$ 时的齐次方程(133)。逐次地把單位正电荷放置在曲面 S_k 的每一个的上面，我們就有 $\lambda=1$ 时的齐次方程(133)的 m 个綫性独立的解 $\mu_k(N)$。可以証明，这些函数 $\mu_k(N)$ 構成所提到的齐次方程的綫性無关解的完全系。这样我們就看到 $\lambda=1$ 是方程(132)与(133)的特征值。为使方程(132)可以解，其充要条件为 $f(N)$ 滿足 m 个条件：

$$\iint_S f(N)\mu_k(N)dS=0。$$

如果至少其中的一个条件不滿足，狄义赫利內部問題就不能用双層勢函数来解出。可以証明，它可以作为双層勢函数与單層勢函数之和而解出，正像我們对狄义赫利外部問題所作的一样。在边界由好几塊曲面組成的情况下，勢函数理論的詳細研究可見 H. M. 根特尔 (Гюнтер) 的書"勢函数論及其在数学物理的基本問題上的应用"(La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique, Paris 1934)。

我們以前在未知調和函数直到S为連續的条件下已証过諾伊曼問題解的唯一性。从以上所作的討論推出，諾伊曼問題的唯一的解可以表示为單層勢函数。

208. 关于解边值問題的結果的綜述 我們現在要表述以上所得到的关于狄义赫利与諾伊曼問題的解法的結果，并举出关于这一問題的一些新的結果。对任一在S上的連續的函数$f(N)$，方程(125)决定了連續的密度$\mu(N)$，它能使得双層勢函数(123)給出具边值条件(124)的狄义赫利問題的解。完全类似的方程(131_2)給出連續的密度$\mu(N)$，使得單層勢函数(128)解决了具边值条件(130_2)的諾伊曼外部問題。如果$f(N)$满足条件(141)，那末方程(129)决定密度$\mu(N)$，使得單層勢函数为諾伊曼內部問題的解。

現作出关于諾伊曼問題解法的一个重要的注解。在方程(129)与(131_2)中，右边的积分項滿足李普希茲条件[**197**]。如果函数$f(N)$也滿足这样的条件，那末从所述的条件推出，$\mu(N)$也滿足这样的条件。但从[**198**]可推出，这时所对应的單層勢函数，即諾伊曼問題的解非但本身直到S为連續，而且有直到S为連續的第一阶偏导数。

現在回到諾伊曼內部問題可解性条件(141)。在解$u(M)$有正常法綫导数这一假設下，我們得到了它。因而$u(M)$应当直到S为連續[**200**]。現証明，單由$u(M)$直到S的連續性就可推出必要条件(141)。設$f(N)$不滿足这一条件，但直到S为連續的諾伊曼問題的解$u(M)$却存在，我們把它引向矛盾。

据假設，我們有：

$$\iint_S f(N)\,dS \neq 0,$$

就可以选擇这样的非零的常数C，使得

$$\iint_S [f(N)-C]\,dS = 0。$$

由于以上所說，我們可以作起具边值条件：

$$\left(\frac{\partial u_1(N)}{\partial n}\right)_i = f(N) - C$$

的諾伊曼內部問題的解 $u_1(M)$，它是具有連續密度的單層勢函数的形狀，并且 $u_1(M)$ 直到 S 为連續。差式 $u_2(M) = u(M) - u_1(M)$ 也直到 S 連續且滿足边值条件：

$$\left(\frac{\partial u_2(N)}{\partial n}\right)_i = C。$$

如果有必要，我們改变 $u_2(M)$ 的符号，使 $C>0$。函数 $u_2(M)$ 在 S 上某一点 N_0 达到自己的最小值，但这就与以下的事实相矛盾：当 M 依法綫趋向 N_0 时，$\frac{\partial u(M)}{\partial n}$ 趋向于正数 C。因而諾伊曼內部問題可解性条件(141)可直接地从所要求的解直到 S 的連續性推出。

以上我們指出諾伊曼問題的解的导数迫近于 S 时的性質。对狄义赫利問題的解的类似的研究是比較困难的，这是由于解被表示为双層勢函数的形狀。双層勢函数的研究是在前已提到的 A. M. 略普諾夫的著作"論狄义赫利問題的諾伊曼基本原理"(1902)中所完成的。

我們来列举 A. M. 略普諾夫所得到的关于双層勢函数及狄义赫列問題解的結果。

1. 具連續密度的双層勢函数在曲面 S 上点的数值 $w(N)$ 是滿足以任意的小于 1 的正数为指标的李普希茲条件的函数。

2. 如果具連續密度的双層勢函数从曲面 S 的一側来看有正常法綫导数，那末从曲面的另一側来看也有正常的法綫导数，而且对 S 的每一点，这兩个法綫导数是相同的。

3. 要使在 S 上具有連續边值函数 $f(N)$ 的狄义赫利的內部或外部問題的解在 S 上有正常法綫导数，其充要条件为以 $\mu(N)$ 为密度的双層勢函数在 S 上有正常法綫导数。这一定理是在条件(3)中的 α 等于 1 时得到証明的。

4. 設 $F(x, y, z)$ 为單值，連續，具有头兩阶导数，定义在曲面 S 的某一鄰域上的函数。并設 $f(N)$ 为 $F(x, y, z)$ 在 S 上的值。$u(M)$ 为在 D_i 或 D_e 內的調和函数，它在 S 上取值 $f(N)$。这时 $u(M)$ 沿任一固定方向的导数直到 S 上为連續。这个定理的証明未假設 $\alpha=1$。

A. M. 略普諾夫也建立起双層勢函数有正常法綫导数的条件。現來举出它。設 N_0 为 S 上的某一点，我們把它取为在点 N_0 的 S 的切平面的極坐标原点。在鄰近于点 N_0 的点 N，密度 $\mu(N)$ 的数值可以視为 N 点在切平面上投影的 ρ 与 θ 的函数。記：

$$\bar{\mu}(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\rho,\ \theta)d\theta。$$

上面所提到的条件归結为下面所述。存在兩个正数 b 与 β，使得对任意选擇的点 N_0 成立不等式：

$$|\bar{\mu}(\rho)-\mu(N_0)|\leqslant b\rho^{\beta+1}。$$

这一定理是略普諾夫在假設 $\alpha=1$ 下証明的。

在質体勢函数，單層勢函数与双層勢函数的理論中及有关狄义赫利問題解的研究的进一步結果可以在以上所提到的 Н. М. 根特尔的書中与 Х. Л. 斯穆棱茨基(Смолицкий)的著作"基本函数导数的估值"("Оценки производных фундаментальных функций" Доклады Академии Наук СССР, т. XXIV, № 2,1950)中找到。

举出后一著作中关于狄义赫利問題解的結果。

設 $z=z(x,\ y)$ 为曲面 S 在点 N_0 的近旁的显式方程，它在 $x^2+y^2\leqslant\frac{d^2}{4}$ 时成立[192]。如果 $z(x,\ y)$ 有到 l 阶的連續导数，而所有这些导数的絕对值不超过某一常数 B，这常数 B 对曲面 S 的所有点 N_0 均为同一的，那末我們說曲面屬于类 S_l。

在 S 上所給定的每个函数 $f(N)$，在点 N_0 的近旁可表示为局部坐标的函数 $f(x,\ y)$。將用 $D^kf(x,\ y)$ 来記函数 $f(x,\ y)$ 某一 k 阶导数，如果成立不等式：

$$|D^kf(x,\ y)|\leqslant A;$$

(143)

$$|[D^kf(x,\ y)]_{(x_2,y_2)}-[D^kf(x,\ y)]_{(x_1,y_1)}|\leqslant B(\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2})^\beta$$

$$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ l),$$

于此 $x_i^2+y_i^2\leqslant\frac{d^2}{4}\ (i=1,\ 2)$，$A$，$B$ 与 β 是与 N_0 选擇無关的常数，那末我們就說，$f(N)$ 屬于类 $\mathrm{Lip}\,\beta(l,\ B)$。設函数 $f_1(M)=f_1(x,\ y,\ z)$ 在閉区域 $\overline{D}_i$ 上定义，在 D_i 內部有到 l 阶的导数，直到 S 为連續，且这些导数滿足类似于(143)的关系，在其中 D^k 記关于 $(x,\ y,\ z)$ 的某一 k 阶导数，并引入点 $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 到点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 的距离代替 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$。这时我們說 $f_1(M)$ 屬于

类 Lip $\beta(l, B)$。在所提到的 Х. Л. 斯穆棱矣基的著作中証明了定理：設在 S 上所給的 $f(N)$ 屬于类 Lip $\beta(l, B)$ 而曲面 S 屬于类 $S_{l+\gamma}$，那末以 $f(N)$ 为边值的狄义赫利內部問題的解 $u(M)$ 屬于类 Lip $\beta(l, CB)$，于此 C 为与 $f(N)$ 的选擇無关的常数。

209. 平面上的边値問題 在平面上的狄义赫利問題与諾伊曼問題也可以完全与[206]中一样地来考察。我們用双層勢函数的形式

$$u(M)=\int_l \mu(N)\frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}\,ds \tag{144}$$

来求狄义赫利問題的解，而以單層勢函数的形式

$$u(M)=\int_l \mu(N)\lg\frac{1}{r}\,ds \tag{145}$$

来求諾伊曼問題的解。可以得出对密度的积分方程：

$$\mu(N_0)=\varphi(N_0)+\lambda\int_l \mu(N)K(N_0;N)\,ds \tag{146}$$

$$\mu(N_0)=\varphi(N_0)+\lambda\int_l \mu(N)K_1(N_0;N)\,ds, \tag{147}$$

于此

$$K(N_0;\ N)=-\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})}{\pi r_0};$$

$$K_1(N_0;\ N)=\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}_0)}{r_0} \qquad (r_0=|N_0N|)。$$

在 $\lambda=1$ 和 $\varphi(N_0)=\frac{1}{\pi}f(N_0)$ 时方程 (146) 对应狄义赫利內部問題，当 $\lambda=-1$ 和 $\varphi(N_0)=-\frac{1}{\pi}f(N_0)$ 时它对应狄义赫利外部問題。当 $\lambda=1$ 和 $\varphi(N_0)=-\frac{1}{\pi}f(N_0)$ 时，方程 (147) 对应諾伊曼外部問題，而 $\lambda=-1$ 和 $\varphi(N_0)=\frac{1}{\pi}f(N_0)$ 时它对应諾伊曼內部問題。在一切情形下，$f(N_0)$ 是出現在边值条件中的函数。

方程 (146) 可以写成形狀：

$$\mu(s_0)=\varphi(s_0)+\lambda\int_0^{l_0}\mu(s)K(s_0;s)ds,$$

于此 s 及 s_0 为迴道 l 的弧 LN 及 LN_0 的長度，它們是从某一定点 L 开始按一定方向来度量的，而 l_0 为迴道 l 的長。也可类似地写方程(147)。在[199]中对迴道 l 所作的假設下，核 $K(s_0;s)$ 与 $K_1(s_0;s)$ 为連續核。

如同在[207]一样，$\lambda=1$ 并非特征值，而 $\lambda=-1$ 是秩数为 1 的特征值。这时，方程(146)的特征函数为任意常数而方程(147)的特征函数为静电密度 $\mu_0(N)$，对于它，單層势函数(145)在 l 上及 l 內等于常数。

把 $\lambda=1$ 和 $\varphi(N_0)=\frac{1}{\pi}f(N_0)$ 时的方程(146)的解代入公式(144)，我們得到狄义赫利內部問題的解。把 $\lambda=1$ 时的方程(147)的解代入公式(145)，一般說来并不得出諾伊曼外部問題的解。这是因为当 $r\to\infty$ 时 $\lg\frac{1}{r}$ 趋向于無限。如果 $f(N)$ 滿足条件：

$$\int_0^l f(N)ds=0,$$

那末把 $\lambda=-1$ 时 (147) 的解代入公式(145)就給出諾伊曼內部問題的解。

轉到狄义赫利外部問題。如果 $f(N)$ 滿足条件：

$$\int_l \mu_0(N)f(N)ds=0,$$

那末把 $\lambda=-1$ 时的方程(146)的解代入(144)就給出問題的解。

如果这个条件不滿足，那末选取一个常数 a，使成立[見 207]

$$\int_l \mu_0(N)[f(N)-a]ds=0,$$

且如前，依公式 (144) 得到以 $f(N)-a$ 为边值条件的問題的解 $w(M)$，而和 $w(M)+a$ 就是以 $f(N)$ 为边值条件的問題的解。添加一常数的原因是在于：公式(144)給出在無穷远为零的調和函

数，而在平面的情形，外部問題的解并不要求在無穷远处化为零。

210. 球函数的积分方程 对以原点为中心、以1为半徑的球 Σ 的情形来考察齐次方程(133)。在这一情形下，方向 $\boldsymbol{n}_0$ 为向徑 $\overline{ON_0}$ 的方向，而 $\cos(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}_0) = -\frac{r_0}{2}$，这就是說齐次方程(133)有形狀：

$$\mu(N_0) = -\frac{\lambda}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{\mu(N)}{r_0}\, dS. \tag{148}$$

我們如果从(132)出發，也会得着这同一方程。在右边的积分是以 $\frac{-\lambda\mu(N)}{4\pi} = \frac{-\lambda\mu(\theta, \varphi)}{4\pi}$ 为密度的球壳在点 $N_0(\theta_0, \varphi_0)$ 的势函数。

首先考察在球内部的点 $M(\rho, \theta', \varphi')$ 的势函数。用 r 来記距离 $|MN|$，以 ρ 来記 $|OM|$，就有展开式[III₂; 132]：

$$\frac{1}{r} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos\gamma)\rho^k \quad (\rho<1), \tag{149}$$

于此 $P_k(x)$ 是勒让特多項式，γ 是向徑 $\overline{OM}$ 与 $\overline{ON}$ 所組成的角。把某一 n 阶的球函数取为 $\mu(\theta, \varphi)$：

$$\mu(\theta, \varphi) = Y_n(\theta, \varphi).$$

利用以上在 $\rho<1$ 为一致收斂的展开式，我們得出

$$\iint_{\Sigma} Y_n(\theta, \varphi)\frac{1}{r}\, d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta', \varphi')\rho^n,$$

这是直接地可由如下的公式[III₂, 133]：

$$\iint_{\Sigma} Y_n(\theta, \varphi) P_m(\cos\gamma)\, dS = 0 \quad m\neq n \text{ 时},$$

$$\iint_{\Sigma} Y_n(\theta, \varphi) P_n(\cos\gamma)\, dS = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta', \varphi')$$

推出。当 M 重合于在球面上的点 N_0 时，我們將有：

$$\iint_{\Sigma} Y_n(\theta, \varphi)\frac{1}{r_0}d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1}Y_n(\theta_0, \varphi_0)。$$

从此可見，$\lambda_n = -(2n+1)$ 为方程(148)的特征值，并且每个这样的特征值对应 $(2n+1)$ 个特征函数，即 n 阶的球函数。第一个特征值 $\lambda_0 = -1$，对应于等于常数的特征函数(球的靜电密度)。

現証方程(148)不能再有其他的特征值，并且对应每个特征值 λ_n 已不具有除上述球函数而外的其他的特征函数。設 λ' 为(148)的某一与以上所指出的数不同的特征值，而 $\mu'(N)$ 为对应的特征函数。方程(148)的核关于 N 及 N_0 为对称的函数，又因 $\mu'(N)$ 与所有球函数应为正交，特別是与 $P_k(\cos\gamma)$ 正交，即

$$\iint_{\Sigma} \mu'(\theta, \varphi)P_k(\cos\gamma)d\sigma = 0。$$

并且，从展开式(149)推出，以 $\mu'(N)$ 为密度的球壳的勢量在球內处处等于零，因而在球面上也处处等于零。但这时积分方程(148)指出，$\mu'(N)$ 在整个球上恒等于零，这对于特征函数是不能成立的。現考察特征值 λ_n。如果它对应某一不为 n 阶球函数的特征函数，那末我們就可認为，这一特征函数与所有球函数正交，而重复如上的論述，我們就可以确信，在整个球面上这一函数应当恒等于零。

因而，球函数乃是积分方程(148)的特征函数的完全系。

211. 輻射着的物体的热平衡 考察拉普拉斯方程的第三問題。

在热流为穩定的狀态下，物体內的溫度 $u(M)$ 应当滿足拉普拉斯方程，而在边界 S 上应滿足条件

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0) = 0,$$

于此 h 是外导热系数，而 u_0 为物体外介質与物体相密接处的溫

度。这兩个量我們都可以視为在曲面 S 上点的函数 而因此，我們轉向于求在 S 内部的調和函数，而在这曲面的表面上滿足形狀为

$$\frac{\partial u(N)}{\partial n}+p(N)u(N)=f(N) \tag{150}$$

的条件，于此 $p(N)$ 与 $f(N)$ 为在 S 上的函数，且 $p(N)>0$。我們將用單層勢函数的形式来解这边值問題。边值条件(150)引导到如下的对密度的积分方程：

$$\iint_S \mu(N)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)}{r_0^2}\,dS+2\pi\mu(N_0)+$$
$$+p(N_0)\iint_S \mu(N)\frac{1}{r_0}\,dS=f(N_0),$$

或

$$\mu(N_0)=\frac{1}{2\pi}f(N_0)-\iint_S \mu(N)\left[\frac{p(N_0)}{2\pi r_0}+\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)}{2\pi r_0^2}\right]dS。$$

現証在上面所作的假設下，齐次方程不能有非零解。事实上，我們已在上面見到[202]，当 $p(N)>0$ 时可表示为單層勢函数的調和函数，也就是具有正常法綫导数而滿足齐次边值条件

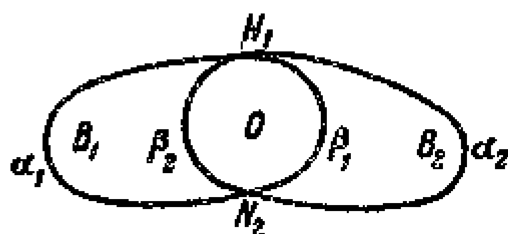
$$\frac{\partial u(N)}{\partial n}+p(N)u(N)=0 \tag{151}$$

的調和函数在 S 内恒等于零。現設齐次方程有解 $\mu(N)$。以 $\mu(N)$ 为密度的單層勢函数滿足齐次条件(151)，因而在 S 内部等于零。因为它在無穷远点也等于零，如前，我們从此就得出結論 $\mu(N)\equiv 0$，即齐次方程实际上無解，因而非齐次方程对任意的自由項 $f(N_0)$ 有解。現設曲面 S 为單位球 Σ，而函数 $p(N)$ 为正常数 h。在这情形下，由于 $r_0=-2\cos(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_0)$，我們得到积分方程：

$$\mu(N_0)=\frac{1-2h}{4\pi}\iint_\Sigma \mu(N)\frac{1}{r_0}\,d\sigma+\frac{1}{2\pi}f(N_0),$$

我們在前段中已經研究过它。如果取 h 为参数，那末这个方程的特征值由方程 $1-2h=2n+1$ 所决定，这就是特征值为 $h=0, -1, -2, \cdots$，而它所对应的函数將为球函数。我們可以完全类似地来考察平面情形的第三边值問題。

212. 許瓦茲方法 再指出一种解狄义赫利問題的方法。設我們已能对区域 B_1 与 B_2 及任意的連續边值解出狄义赫利問題，并且这兩个区域有公共区域 D，如同圖 12 所示。許瓦茲方法給出对区域 B_1 与 B_2 的联合的区域 $B=B_1+B_2$ 解狄义赫利問題的可能性。



(圖十二)

我們在平面的情形进行論述，但对三維空間的情形，它仍然是同样的。区域 B_1 与 B_2 的迴道由于它們的交点而划分为若干部分，对 B_1 分为 α_1 与 β_1 兩部分，对 B_2 分为 α_2 与 β_2 兩部分。設在区域 B 的迴道 $l=\alpha_1+\alpha_2$ 已給連續函数 $\omega(N)$。許瓦茲方法的計算是按以下方式进行的。把在 α_1 上給定的函数 $\omega(N)$ 保持連續性地依任何方法延拓到 β_1。設这样地所得的在 β_1 上的函数为 $\omega_1(N)$。我們解对 B_1 的狄义赫利問題，作起在 B_1 中的調和函数 $u_1(M)$，其边值如下：

$$u_1(N)=\begin{cases}\omega(N) & \text{在 } \alpha_1 \text{ 上}\\ \omega_1(N) & \text{在 } \beta_1 \text{ 上。}\end{cases}$$

把这一函数在 β_2 的数值連同 $\omega(N)$ 在 α_2 上的数值取为新的在 B_2 中为調和的函数 $v_1(M)$ 的边值，即：

$$v_1(N)=\begin{cases}\omega(N) & \text{在 } \alpha_2 \text{ 上}\\ u_1(N) & \text{在 } \beta_2 \text{ 上。}\end{cases}$$

現在 B_1 中作調和函数，其边值为：

$$u_2(N)=\begin{cases}\omega(N) & \text{在 } \alpha_1 \text{ 上}\\ v_1(N) & \text{在 } \beta_1 \text{ 上。}\end{cases}$$

再作在 B_2 中的調和函数 $v_2(M)$，其边值为：

$$v_2(N)=\begin{cases}\omega(N) & \text{在 } \alpha_2 \text{ 上}\\ u_2(N) & \text{在 } \beta_2 \text{ 上}\end{cases}$$

等等。而一般地有：

$$u_n(M)\text{在 } B_1 \text{ 調和，且 } u_n(N)=\begin{cases}\omega(N) & \text{在 } \alpha_1 \text{ 上}\\ v_{n-1}(N) & \text{在 } \beta_1 \text{ 上}\end{cases}$$

$$v_n(M)\text{在 } B_2 \text{調和，且 } v_n(N)=\begin{cases}\omega(N) & \text{在 } \alpha_2 \text{ 上}\\ u_n(N) & \text{在 } \beta_2 \text{ 上。}\end{cases}$$

現証極限 $\lim u_n(M)$ 在 B_1 中存在，$\lim v_n(M)$ 在 B_2 中存在，而在区域 B_1 与 B_2 的公共部分这些極限相重合。为此，我們要利用一个即將叙述的引理。首先讓我們提到关于区域的迴道所作的假設。我們假設，区域 B_1 与 B_2 的迴道是由有限段具連續变化切綫的曲綫弧所組成。因而在迴道上可能有有限个角点。此外，我們假設在交点 N_1 与 N_2（圖 12）这兩个迴道都有切綫，而在 N_1 与 N_2 的切綫組成不等于零的交角。現来表述引理：如果区域 B_1 与 B_2 的迴道滿足所示的条件，又 $w(M)$ 为在 B_1 中的調和函数，在閉区域中連續，又在 α_1 上取的值为零，而在 β_1 上滿足条件 $|w(M)|\leqslant A$，那末存在只与区域 B_1 与 B_2 有关而与 $w(M)$ 的选擇無关正常数 $q<1$，使得在 β_2 上 $|w(M)|\leqslant qA$。如果我們从 B_2 出發来估計在 β_1 上的 $w(M)$，类似的断言也正确。这时我們可以假設，q 对于兩个区域是同一的。我們把引理的証明擱置到下一段去，而先来应用它来証明許瓦茲的步驟的收斂性。

根据作法：

$$u_{n+1}(N)-u_n(N)=\begin{cases}0 & \text{在 } \alpha_1 \text{ 上}\\ v_n(N)-v_{n-1}(N) & \text{在 } \beta_1 \text{ 上}\end{cases}$$

(153)

$$v_n(N)-v_{n-1}(N)=\begin{cases}0 & \text{在 } \alpha_2 \text{ 上}\\ u_n(N)-u_{n-1}(N) & \text{在 } \beta_2 \text{ 上。}\end{cases}$$

我們引入如下的記号：

$$M_n=\max_{N\in\beta_1}|u_{n+1}(N)-u_n(N)|=\max_{N\in\beta_1}|v_n(N)-v_{n-1}(N)|$$

$$M'_n=\max_{N\in\beta_2}|v_{n+1}(N)-v_n(N)|=\max_{N\in\beta_2}|u_{n+1}(N)-u_n(N)|。$$

注意到边值条件(153)及引理，我們就得 $M'_n\leqslant qM_n$ 及 $M_n\leqslant qM'_{n-1}$。从此推出：$M_n\leqslant q^2M_{n-1}$，$(n=2, 3, \cdots)$，此即 $M_n\leqslant q^{2(n-1)}M_1$。

作起級数

$$u_1(M)+\sum_{n=1}^{\infty}[u_{n+1}(M)-u_n(M)]。\tag{154}$$

从第二項起，它的每項在 α_1 等于零，且在 β_1 上有估計 $|u_{n+1}(N)-u_n(N)|\leqslant q^{2(n-1)}M_1$。因而所写出的級数在 B_1 的迴道上絕对且一致收斂，因而在整个閉区域也如此。它的和 $u(M)$ 在閉区域 $\overline{B}_1$ 为連續，在 B_1 內部为調和。級数(154)的前 n 項之和为 $u_n(M)$，因而我們可以断言 $u_n(M)\to u(M)$ 在閉区域中一致地成立。同样可以証明 $v_n(M)\to v(M)$ 在閉区域 $\overline{B}_2$ 一致地成立，于此 $v(M)$ 在閉区域 $\overline{B}_2$ 連續，且在 B_2 調和。根据(152)：

$$u_n(N)=v_{n-1}(N)\text{ 在 }\beta_1\text{ 上；}\quad v_n(N)=u_n(N)\text{ 在 }\beta_2\text{ 上。}$$

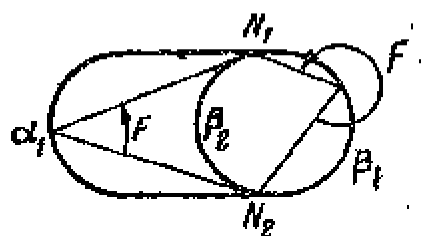
过渡到極限，我們見到 $u(N)$ 与 $v(N)$ 在 β_1 上与 β_2 上相重合。从此推出，它在区域 B_1 与 B_2 的公共部分 D 上也处处重合。因而在 $B=B_1+B_2$ 之內的函数 $u(M)$ 与 $v(M)$ 給出唯一的調和函数。由于(152)，这一調和函数在迴道 $l=\alpha_1+\alpha_2$ 上有已給的边值 $\omega(N)$，因而，許瓦茲方法实际上解决了上面所提出的問題。

213. 引理的証明 作起沿弧 β_1 具單位密度而分布的双層勢函数：

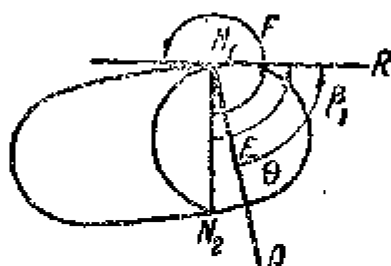
$$F(M)=-\int_{\beta_1}\frac{\partial\lg\frac{1}{r}}{\partial\bar{n}}ds。\tag{155}$$

这就是从点 M 来看弧 β 的視角，于此我們假設 M 屬于 B_1。在

B_1 内为調和的函数(155)在弧 α_1, β_1 的内点取連續的極限值(圖13)。



(圖十三)



(圖十四)

当迴道上的点 N 从弧 α_1 的一側及从弧 β_1 的一側接近于点 N_1 时,我們就有所提到的函数 $F(N)$ 的不同的极限值,我们記为 $F_-(N_1)$ 与 $F_+(N_1)$。

这些極限值是割綫 $\overline{N_1N_2}$ 与区域 B_1 的迴道在点 N_1 的切綫方向的夾角(圖 14),并且我們有:

$$F_+(N_1)-F_-(N_1)=\pi。\tag{156}$$

如果我們把点 M 沿任一射綫 N_1Q 趋向于 N_1, N_1Q 与圖中所示的在点 N_1 的切綫方向夾角为 θ, 那末不难从圖中見到,函数(155)將有極限 $F_+(N_1)-\theta$, 根据(156),可以把它写为形狀:

$$F_+(N_1)-\theta=\frac{\theta}{\pi}F_-(N_1)+\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)F_+(N_1)。\tag{157}$$

当 M 的任意的方式趋向于 N_1 时,函数(155)可以有不同的極限值,但它們应当包含在 $F_-(N_1)$ 与 $F_+(N_1)$ 之間,而函数(155)在 N_1 近旁为有界。在点 N_2 也可以得到完全相类似的結果。

我們現在来定义在迴道 $l=\alpha_1+\beta_1$ 上的函数 $f(N)$,它在 α_1 內部等于零,在 β_1 内部等于 π。如前,用 $F(N)$ 来表示函数(155)的極限值,在 α_1 与 β_1 内部我們还作起函数 $f_1(N)=F(N)-f(N)$。不难看出,它將在整个迴道 $l=\alpha_1+\beta_1$ 上包括 N_1 与 N_2 在內为連續,因为减数与被减数在这兩点有同样的躍度。这个函数的数值,例如在 N_1 会等于 $F_-(N_1)$。設 $F_1(M)$ 为在 B_1 内調和的函数,在

其迴道上有边值 $f_1(N)$。作起調和函数

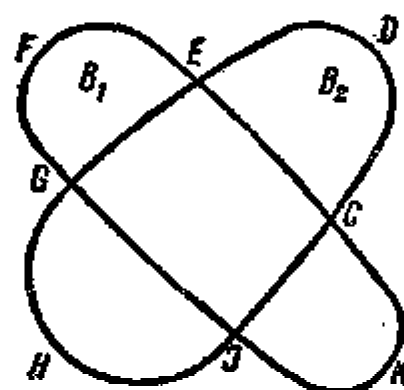
(158) $$G(M)=\frac{1}{\pi}[F(M)-F_1(M)]。$$

它在 α_1 内部的边値为零，在 β_1 内部的边値为 1。此外，由于上述的关于 $F(M)$ 的性質，当 M 趋向于 N_1 或 N_2 时，$G(M)$ 的極限値必須屬于区間 $[0, 1]$。由于極大極小値原理，函数(158)在所有内点的値也在这个区間内部，即如果 M 在 B_1 之内 $0<G(M)<<1$。我們設 θ_1 与 θ_2 是曲綫 β_2 在点 N_1 与 N_2 的切綫与区域 B_1 迴道在这些点的切綫的交角。当 M 沿着 β_2 趋向 N_1 时，函数 $F(M)$ 由于(157)有極限 $[F_+(N_1)-\theta_1]$，而具連續边値 $f_1(N)$ 的函数 $F_1(M)$ 將有極限 $f_1(N_1)=F_-(N_1)$，因而由于(156)，函数(158)会有極限 $1-\frac{\theta_1}{\pi}$。同样地，在点 N_2 函数(158)会有極限 $1-\frac{\theta_2}{\pi}$。这兩个極限皆小于 1，而在区域内部我們有 $0<G(M)<1$。从此直接推出，存在这样的正数 $q<1$，使在 β_2 上 $G(M)\leqslant q$。

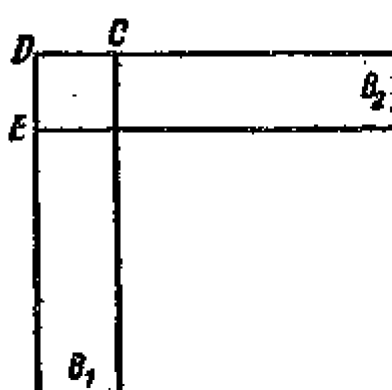
在这些輔助的作法之后，我們回到引理中所提到的函数 $w(M)$。用 $w(M)/A$ 来代替这个函数，我們就可假定在引理 1 中所具有的 A 等于 1，即在閉区域 $\bar{B}_1$ 上連續的調和函数在 α_1 上有等于零的極限値，在 β_1 上 $|w(N)|\leqslant 1$。在点 N_1 及 N_2，極限値 $w(M)$ 显然等于零。作起調和函数 $H(M)=G(M)-w(M)$。它的極限値在 α_1 内部等于零而在 β_1 内部为非負的，这是因为在 β_1 内部 $G(N)=1$ 而 $|w(N)|\leqslant 1$。当 M 趋近于 N_1 及 N_2 时，$H(M)$ 的極限値应当屬于区間 $[0, 1]$。从此直接可以推出，在閉区域 $\bar{B}_1$ 上 $H(M)\geqslant 0$，即 $w(M)\leqslant G(M)$，并因此在 β_2 上我們有 $w(M)\leqslant\leqslant G(M)\leqslant q$。完全同样地，在 $\bar{B}_1$ 上 $G(M)+w(M)\geqslant 0$，而从此推出在 β_2 上 $-w(M)\leqslant G(M)\leqslant q$。兩个所得的不等式給出 $|w(M)|\leqslant q$，这就是所要証的引理。这一証明可以在三維空間中

照样地进行[1]。

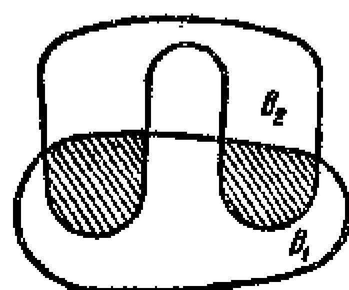
214. 許瓦茲方法(續) 我們已考察过許瓦茲方法运用在区域 B_1 与 B_2 有最簡单的相互位置的情形。这些区域的边界可以有多于两个的交点(图 15),可以有公共的部分(图 16)。也可能发生 B_1 与 B_2 单連通而它們的和为多連通(图 17)。在图 15 中区域 $B=B_1+B_2$ 的迴道是 $CDEFGHIKC$。在图 16 中折綫 CDE 是迴道的公共部分,在图 17 中阴影的区域是区域 B_1 与 B_2 的公共部分。在所有的情形下,許瓦茲方法中逐次逼近的作法是几乎与以前完全相同。对計算的方法作若干的改变,在对区域 B_1 与 B_2 会解狄义赫利問題的假定下,我們能得到的不是对 B_1 与 B_2 之和的解,而是对区域 B_1 与 B_2 的公共部分的解。在图 12 的情形,这就是由迴道 β_1 与 β_2 所包圍的区域。在这迴道上,我們給定边值 $\omega(N)$。



(圖十五)



(圖十六)



(圖十七)

我們将用两調和函数之和的形式

$$w(M)=u(M)+v(M) \tag{159}$$

来求具这个边值的調和函数,于此 $u(M)$ 在 B_1 为調和,$v(M)$ 在 B_2 为調和。把未知函数分为这样的两項,显然并不是唯一的,但这对进一步的作法并不重要。把依任何方式給定在 β_1 上的函数 $\omega(N)$ 延拓到弧 α_1 上,使能得到連續函数,并以 $\varphi_1(N)$ 来記它。

---

[1] 柯朗与希尔柏特,数学物理方法,卷 2。

作起对 $u(M)$ 与 $v(M)$ 的逐次逼近，其第一步是对以下的边值条件狄义赫利問題的解：

$$u_1(N)=\begin{cases}\varphi_1(N) & 在\ \alpha_1\ 上,\\ \omega(N) & 在\ \beta_1\ 上;\end{cases}$$

$$v_1(N)=\begin{cases}0 & 在\ \alpha_2\ 上,\\ \omega(N)-u_1(N) & 在\ \beta_2\ 上。\end{cases}$$

这时我們还注意到差式 $\omega(N)-u_1(N)$ 在点 N_1 与 N_2 等于零。为了作出以后的逼近，我們置：

$$u_{n+1}(N)=\begin{cases}\varphi_1(N) & 在\ \alpha_1\ 上,\\ \omega(N)-v_n(N) & 在\ \beta_1\ 上;\end{cases}$$

$$v_{n+1}(N)=\begin{cases}0 & 在\ \alpha_2\ 上,\\ \omega(N)-u_{n+1}(N) & 在\ \beta_2\ 上。\end{cases}$$

这一过程將为收斂，而和(159)將給出問題的解。

所示方法的詳細叙述可見 Л. В. 康托洛維奇(Канторович)与 В. И. 克雷洛夫(Крылов)的書"高等分析中的近似計算"(Приближенные методы высшего анализа)，在其中不仅对拉普拉斯方程，而且对其他的橢圓型方程也可以应用这个方法。这方法对三維的情形也适用。

还指出另一能够应用許瓦茲方法的情况。現在我們討論狄义赫利外部問題，因此，我們將不考察平面的情况而考察三維空間的情况。設在空間有 n 个閉曲面 $S_k(k=1, 2, \cdots, n)$，其中任意兩个沒有公共点。用 D 来記空間在所有的 S_k 之外的部分，而 D_k 用来記 S_k 之外的部分。假設我們对每一对 S_k 上的任意的連續边值关于每一 D_k 能解狄义赫利問題，而要指出这时可以如何来解区域 D 的狄义赫利問題。所有区域 D_k 及区域 D 把無穷远点包含在內部，并且照例，在解狄义赫利問題时是假設調和函数在無穷远点等于零。

这样，我們要找寻在 D 内調和的函数，它在曲面 S_k 上采取已給的連續的数值：

(160) $$u|_{S_k}=f_k(N) \quad (k=1, 2, \cdots, n)。$$

首先我們对每一 k 求函数 $u_{0,k}(M)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$，它在 D_k 内調和而在 S_k 上采取值 $f_k(N)$。其次求函数 $u_{1,k}(M)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ 使在 D_k 内調和，具边值：

(161) $$u_{1,k}(N)=-\sum_{i\neq k}u_{0,i}(N) \text{ 在 } S_k \text{ 上成立} \quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

于此和式是对从 $i=1$ 到 $i=n$ 的所有 i 进行，但 $i=k$ 除外。

一般地，对任一正整数 m，我們求函数 $u_{m,k}(M)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$，使在 D_k 内部調和并具边值：

(162) $$u_{m,k}(N)|_{S_k}=-\sum_{i\neq k}u_{m-1,i}(N) \text{ 在 } S_k \text{ 上成立}$$
$$(k=1, 2, \cdots, n)。$$

函数

$$\sum_{m=0}^{p}u_{m,k}(M) \qquad (k=1, 2, \cdots, n)$$

在 D_k 内調和，且在 S_k 上的边值为

$$\sum_{m=0}^{p}u_{m,k}(N)=f_k(N)-\sum_{m=0}^{p-1}\sum_{i\neq k}u_{m,i}(N) \qquad (k=1, 2, \cdots, n)。$$

从兩边减去和式

$$\sum_{m=0}^{p-1}u_{m,k}(N),$$

我們就可以把前一等式改写为形狀：

(163) $$\sum_{m=0}^{p-1}\sum_{i=1}^{n}u_{m,i}(N)=f_k(N)-u_{p,k}(N) \text{ 在 } S_k \text{ 上成立}$$
$$(k=1, 2, \cdots, n)。$$

如果我們証明了当 p 無限增大时，在閉区域 $\overline{D}$ 中所有的函数 $u_{p,k}(M)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ 一致地趋向于零，那末从 (163) 会推出，当 p 無限增大时，在 D 内調和而且直到边界为連續的函数

$$\sum_{m=0}^{p-1}\sum_{i=1}^{n} u_{m,i}(M)$$

就給出对区域 D 以在 S_k 上的 $f_k(N)$ 为边値的狄义赫利問題的解:

(164)
$$u(M)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} u_{m,i}(M)。$$

轉向于闡明 $u_{p,k}(M)$ 在閉区域 $\overline{D}$ 中一致地趋向于零的条件。以 $v_k(M)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ 記在 D_k 内为調和的函数,在 S_k 上等于1。这时,在 D_k 内 $v_k(M)\geqslant 0$,且由于当 M 趋向于無限远时 $v_k(M)\to 0$,所以存在满足条件 $0<q_k<1$ 的 q_k,使得

(165) $v_k(M)\leqslant q_k$ 在 S_i 上成立 $i\neq k$ $(k=1, 2, \cdots, n)$。

如果 $w_k(M)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ 是某一在 D_k 内調和函数的函数,直到 S_k 为連續,又满足条件:

(166) $|w_k(M)|\leqslant a_k$ 在 S_k 上成立 $(k=1, 2, \cdots, n)$,

于此 a_k 为常数。那末 $a_kv_k(M)-w_k(M)$ 將在 D_k 中調和,在 S_k 上为非負的。从此推出,在閉区域 $\overline{D}_k$ 内 $a_kv_k(M)-w_k(M)\geqslant 0$,卽在 $\overline{D}_k$ 内 $w_k(M)\leqslant a_kv_k(M)$。我們可以改变調和函数 $w_k(M)$ 的符号,这时条件(166)并不改变,因而就可假設在所論的点 M $w_k(M)\geqslant 0$。因而从以上議論就推出:

(167)
$$|w_k(M)|\leqslant a_kv_k(M),$$

从此,由于(165)得

(168) $|w_k(N)|\leqslant a_kq_k$ 在 S_i 上 $i\neq k$ $(k=1, 2, \cdots, n)$。

因此,这个不等式是(160)的推論。設 a 是一正数,它能使在 $k=1, 2, \cdots, n$ 时 $|f_k(N)|\leqslant a$,又設 q 为 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 中的最小者,并且显然,$0<q<1$。由于(160),我們在 S_k 上有 $|u_{0,k}(N)|\leqslant a$。由于(161)及(168),我們在 S_k 上还有 $|u_{1,k}(N)|\leqslant(n-1)aq$ $(k==1, 2, \cdots, n)$。再应用 $m=2$ 时的(162),再一次地利用(168),我們在 S_k 上得到 $|u_{2,k}(N)|\leqslant(n-1)^2aq^2$。而一般地,$|u_{p,k}(N)|\leqslant$

$\leqslant (n-1)^r a q^r$ 在 S_k 上成立，因而，

$$(169)\qquad |u_{p,k}(M)| \leqslant [(n-1)q]^r a \quad (M \text{ 在 } \overline{D}_k \text{ 中}) \quad (k=1, 2, \cdots, n)。$$

如果曲面的数目 $n=2$，从此就推出当 $p\to\infty$ 时 $u_{p,k}(M)\to 0$ 一致地在 $\overline{D}_k$ 中成立，因而在閉区域 $\overline{D}$ 中成立。如果 $n>2$，那末我們得到为使 $u_{p,k}(M)\to 0$ 的如下的充分条件：

$$(170)\qquad (n-1)q<1。$$

数 q 根据其本身的作法与边值条件 $f_k(N)$ 無关，它仅仅由区域 D 所决定。我們也可以完全同样地考察区域 D 为有界区域的情形，它具有外边界 S_1 与內边界 $S_2, S_3, \cdots, S_n$。这时对 S_1 所包圍的区域 D_1 我們具有狄义赫利內部問題，而对区域 D_k $(k=2, \cdots, n)$ 则与前面一样为外部問題。上面的作法屬于 Г. M. 戈魯净(Голузин, Матем. сборник т. 41, 2; 1934)。不难确信，这个作法在平面的情形也有效，只要在各个閉迴道 l_k 上給定边界值。

215. 次調和函数与优調和函数 在解狄义赫利問題时，积分方程方法在实質上是受到相当重大的限制的，我們不得不把一些限制加到区域的边界上去。我們指出另一个解狄义赫利問題的方法，它在对区域边界与对在这边界上的边值的非常一般的假定下都能适用。这一方法帶有較理論的性質而并沒有給出問題的解的近似的作法。它是由潘加勒所提出，其后由彼戎予以精确化的[Math. Zeitschr. Bd. 18(1923)，也可參考 И. Г. 彼得罗夫斯基在"Успехи Математических Наук" т. VIII 上的論文以及他的关于偏微分方程的書]。

本段我們要叙述若干新的概念，它們在叙述上面所提到的方法时要加以利用的。这些新概念在数学物理中还呈現了广泛的兴趣。所有的叙述都在平面情形进行。在三維空間中，这叙述簡直是一样的。在研究用所提到的方法作出的調和函数的边值时是有一

些区别的，我們在叙述这方法的最后来指出它。

对于一个自变量的函数，方程 $y''(x)=0$ 是拉普拉斯方程的类似，而它的通积分为一次多项式 $y=ax+b$，它的圖形为直綫。狄义赫利問題，即在已給区間 $[a, b]$ 内由已給在区間端点的函数值来确定方程 $y''(x)=0$ 的解的問題簡單地归結为过兩已給点画出直綫的問題。一次多項式以下面的事实为其特征：它在任何点 $x=x_0$ 之値是它在与 $x=x_0$ 等距离的兩点 $x=x_0+h$ 与 $x=x_0-h$ 之値的算术平均值。現考察凹向朝着 y 軸正方向的連續曲綫。設 $y=y(x)$ 为它的方程。在这曲綫上的点，我們有

$$y(x_0)<\frac{1}{2}[y(x_0+h)+y(x_0-h)]。\tag{171$_1$}$$

完全类似地，如果曲綫的凸向朝着 y 軸的正方向，那末

$$y(x_0)>\frac{1}{2}[y(x_0+h)+y(x_0-h)]。\tag{171$_2$}$$

不等式 (171_1) 直接地可从下述事实推出：在所論情形下曲綫的每一小段都在它的弦的下面。引入在多变数情况下相应的函数。設 $f(M)$ 为在区域 B 内連續的函数。如果对在 B 内的每一点 P，存在正数 δ，使得 $f(P)$ 不超过 $f(M)$ 在以 P 为心以任意的 $\rho<\delta$ 为半徑的圓上的平均值，那末我們算 $f(M)$ 在 B 内为次調和的。如果引入点 P 的坐标 (x, y)，那末所說的条件可写为形狀：

$$f(x, y)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\,d\varphi,\quad(\rho<\delta)。\tag{172$_1$}$$

如果函数 $f(M)$ 为在 B 内的調和函数，那末对每一在 B 内的点，在公式 (172_1) 中成立等号[**II;194**]，因而，調和函数是次調和函数的特殊情形。这定义也可直接推到三維的情形，只要我們用球来代替圓就可以了。可以完全相类似地定义优調和函数。对于它，我們对区域 B 的任一内点应有

$$f(x, y)\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\,d\varphi\tag{172$_2$}$$

以代替(172_1)。

調和函数也是优調和函数的特殊情形。从定义直接推出：如果$f(M)$是次調和函数，C为常数，那末当$C>0$时$Cf(M)$为次調和函数，当$C<0$时，它是优調和函数。如果$f(M)$是优調和函数，那末当$C>0$时$Cf(M)$为优調和函数，当$C<0$时它为次調和函数。此外，从定义直接推出，有限个优調和函数之和为优調和函数，而有限个次調和函数之和为次調和函数。

我們設$f(M)=f(x, y)$在区域B内有二阶的連續导数，且

$$(173_1) \qquad \Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\geqslant 0 \quad (\text{在 } B \text{ 内})$$

对以$P(x, y)$为心在B内的圓K_ρ应用格林公式，并置$u=f$，$v=$$=1$，我們就得出：

$$(174) \qquad \int_{C_\rho}\frac{\partial f}{\partial n}ds=\iint_{K_\rho}\Delta f\,d\sigma,$$

于此C_ρ为圓K_ρ的圓周。对函数f再应用公式[II; 193]：

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_{C_\rho}\left(f\frac{\partial \lg r}{\partial n}-\lg r\frac{\partial f}{\partial n}\right)ds+\frac{1}{2\pi}\iint_{K_\rho}\Delta f\lg r\,d\sigma,$$

于此r是从(x, y)到积分变点的距离。在C_ρ上方向n重合于方向r，而$ds=\rho\,d\varphi$，且利用(174)，我們可以改写前一公式为：

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)d\varphi+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\iint_{K_\rho}\Delta f\lg\frac{r}{\rho}d\sigma。$$

在圓K_ρ，我們有$r:\rho\leqslant 1$，而由于(173_1)，最后的一个公式就給出不等式(172_1)，即当在条件(173_1)下，函数$f(M)$为在B内的次調和函数。完全同样地，如果在B中

$$(173_2) \qquad \Delta f\leqslant 0,$$

那末$f(M)$为在B中的优調和函数。根据次調和函数及优調和

函数的定义，我們自然并不假設导数的存在性。条件 (173_1) 与 (173_2) 类似于已知的曲綫的凸与凹的条件 [I; 71]。

現說明次調和函数与优調和函数的某些簡單的性質。設 $f(M)$ 在閉区域連續，在区域內为次調和的。这时从 (172_1) 直接推出，次調和函数在边界上取最大值。此外，如它在某內点的鄰域不为常数，那末它就不能在这一点有極大。同样地，优調和函数在边界上取最小值。

216. 輔助的命題 我們現在来証明有关次調和函数与优調和函数的一些命題，我們在解狄义赫利問題时需要到它們。今后照例用 $\overline{B}$ 記有界区域 B 与其边界之和，即記閉的区域。

定理 I. 設 $f_k(M)$ $(k=1, \cdots, m)$ 为在 $\overline{B}$ 連續的函数，且在 B 中为次調和的。作函数 $\varphi(M)$，使它在 $\overline{B}$ 的每一点 M 等于 $f_k(M)$ $(k=1, \cdots, m)$ 中的最大值，即

$$\varphi(M)=\max[f_1(M), \cdots, f_m(M)]。 \tag{175$_1$}$$

这时 $\varphi(M)$ 会在 $\overline{B}$ 連續且在 B 內为次調和。

定理 I′ 类似地，如果 $f_k(M)$ 为优調和且

$$\psi(M)=\min[f_1(M), \cdots, f_m(M)], \tag{175$_2$}$$

則 $\psi(M)$ 也是优調和的。

$\varphi(M)$ 在 $\overline{B}$ 的連續性是直接可由 $f_k(M)$ 的連續性推出。設 (x_0, y_0) 为 B 內的某一点，并不妨設在这一点 $\varphi(x_0, y_0)$ 等于 $f_1(x_0, y_0)$。由于 $f_1(x, y)$ 的次調和性，我們有：

$$\varphi(x_0, y_0)=f_1(x_0, y_0)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)d\varphi。$$

但是，由于 (175_1)，在积分进行所沿的圓周上 $\varphi(M)\geqslant f_1(M)$，因而更会有：

$$\varphi(x_0, y_0)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)d\varphi,$$

这就給出 $\varphi(M)$ 的次調和性。

定理 II. 設 $f(M)$ 在 B 內为次調和，在 $\overline{B}$ 为連續，K 为包含于 B 中的圓，又 $u_K(M)$ 为在 K 中的調和函数，它在 K 的圓周上的数値重合于 $f(M)$ 的值。这时在 K 中成立

$$f(M) \leqslant u_K(M)。 \tag{176$_1$}$$

定理 II′ 类似地，如果 $f(M)$ 为优調和函数，那末在 K 中

$$f(M) \geqslant u_K(M)。 \tag{176$_2$}$$

表示式 $f-u_K=f+(-u_K)$ 为次調和函数 $f(M)$ 与調和函数 $(-u_K)$（也为次調和）之和。此卽 $f-u_K$ 在 K 內为次調和函数，在边界上等于零。因而根据上段所說，在 K 内 $f-u_K\leqslant 0$，这就导得 (176_1)。

定理 III. 在定理 II 的条件下，如果我們把 $f(M)$ 在圓 K 的数値用 $u_K(M)$ 的数値来代替，幷記新的函数为 $f_K(M)$，那末这一在 $\overline{B}$ 为連續的函数在 B 内为次調和的。

定理 III′ 对优調和函数的同样的作法会給出优調和函数 $f_K(M)$。

在 K 之外，函数 f_K 与 f 相重合，而条件 (172_1) 对 K 外的任一点当 δ 充分小时显然满足。在 K 內 f_K 为調和的，而 (172_1) 成立等号而满足。所余下来的要驗証在圓 K 的圓周上 (172_1) 也满足。設 (x_0, y_0) 为这样的点，并且，如果所論圓周与区域 B 的边界有公共点，那末我們假設 (x_0, y_0) 在 B 的內部。我們有：

$$f_K(x_0, y_0)=f(x_0, y_0)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$(\rho<\delta)。$$

在 K 内由于定理 II，$f_K\geqslant f$，又在 K 外 $f_K=f$，因而更有：

$$f_K(x_0, y_0)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_K(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)\,d\varphi,$$

这就是所要証明的。

217. 上函数与下函数法 我們現在要轉向于叙述解狄义赫

利問題的一个新方法。設在平面上有一有界区域 B, l 为其边界, 我們对它暂时不作任何假定。設在 l 上給定函数 $\omega(N)=\omega(x, y)$, 我們暂时只假定它为有界, 卽存在数 a 与 b, 使得

$$a\leqslant\omega(N)\leqslant b\,。\tag{177}$$

任一函数 $\varphi(M)$ 如在閉区域 $\overline{B}$ 連續, 在区域内部为次調和, 又在边界上滿足条件 $\varphi(N)\leqslant\omega(N)$, 我們就称它为下函数。类似地, 上函数 $\psi(M)$ 应为在区域内为优調和, 在边界上应滿足条件 $\psi(N)\geqslant\omega(N)$.

显然, 存在無穷多个这兩类的函数。例如, 不超过 a 的常数就是下函数。設 φ 为某一下函数, ψ 为某一上函数, 表示式 $\chi=\varphi-$ $-\psi=\varphi+(-\psi)$ 为兩个次調和函数之和, 是一次調和函数, 且在 l 上 $\chi\leqslant0$。从此推出在 $\overline{B}$ 上 $\chi\leqslant0$, 卽在 $\overline{B}$ 上 $\varphi\leqslant\psi$。换言之, 每一下函数在 B 中不大于任一上函数。从定理 I 及 I′ 直接推出: 如果 $f_1(M)$, $f_2(M)$, $\cdots$, $f_m(M)$ 为下函数, 那末由公式 (175_1) 所决定的函数也为下函数, 类似地, 对于上函数, 公式 (175_2) 也是上函数。由于定理 III 及 III′ 同样地可推出, 如果 $f(M)$ 是下函数, 那末函数 $f_K(M)$ 也是下函数, 类似地如果 $f(M)$ 是上函数, 那末 $f_K(M)$ 也是上函数。

十分显然, 所有下函数以某一数为上界, 所有上函数有下界。例如在不等式(177)中所描述的 b 是一个上函数, 对于任何下函数就有 $\varphi(M)\leqslant b$。完全类似地, 对于任一上函数, 有 $\psi(M)\geqslant a$。因而所有的上函数 $\psi(M)$ 的全体在 B 中任一固定点 M 的函数值的集合有一下确界[I; 42], 我們記它为 $u(M)$。这就是在 B 内定义的函数。从 $\psi(M)\geqslant a$ 推出 $u(M)\geqslant a$, 又因为 b 是上函数, 我們有 $u(M)\leqslant b$, 卽所作的函数滿足条件 $a\leqslant u(M)\leqslant b$。根据下确界的定义, 对在 B 内的每点 M_0, 存在一上函数的序列 $\psi_n(M)$, 使当 $n\to\infty$ 时, $\psi_n(M_0)\to u(M_0)$。如果存在上函数 $\psi(M)$, 使得 $\psi(M_0)=$

$=u(M_0)$，那末我們例如可以假定对任意 n $\psi_n(M)=\psi(M)$。对不同的点 M_0，序列 $\psi_n(M)$ 可能是不同的。現証定理：

定理 $u(M)$ 为在 B 内的調和函数。

我們指出，在后文中，函数的指标不写在下面，而写在上面的括弧中。

預先証明引理：

引理 如果 P 是 B 内部任意的定点，那末存在單調的上函数序列

$$\varphi^{(1)}(M)\geqslant\varphi^{(2)}(M)\geqslant\cdots\quad(M\text{ 在 }\overline{B}\text{ 中})\tag{178}$$

使得 $\varphi^{(n)}(P)\to u(P)$。

如我們以上所見，存在上函数序列 $\psi_n(M)$，使 $\psi_n(P)\to u(P)$。置：

$$\varphi^{(n)}(M)=\min[\psi_1(M),\psi_2(M),\cdots,\psi_n(M)]。\tag{179}$$

如我們上面所見，$\varphi^{(n)}(M)$ 为連續的上函数。当 n 增加时，作出極小值的函数 $\psi_s(M)$ 的个数是增加的，因而 $\varphi^{(n)}(M)$ 滿足条件 (178)。从函数 $u(M)$ 是上函数的下确界这一事实及 (179) 式推出 $u(P)\leqslant\varphi^{(n)}(P)\leqslant\psi_n(P)$，而从此，由 $\psi_n(P)\to u(P)$ 就推出 $\varphi^{(n)}(P)\to u(P)$。引理証畢。

注 設 K 是在 B 内以 P 为心的任意一圓。依定理 III′ 中所示方法作 $\varphi_K^{(n)}(M)$。由于在圓 K 的圓周上成立不等式 (178)，那末类似的不等式在整个閉圓 K 上成立。在圓 K 外，$\varphi_K^{(n)}(M)$ 重合于 $\varphi^{(n)}(M)$，因而也滿足条件(178)：

$$\varphi_K^{(1)}(M)\geqslant\varphi_K^{(2)}(M)\geqslant\cdots\quad(M\text{ 在 }\overline{B}\text{ 中})。$$

此外，$u(M)\leqslant\varphi_K^{(n)}(M)\leqslant\varphi^{(n)}(M)$，又因 $\varphi^{(n)}(P)\to u(P)$，我們有 $\varphi_K^{(n)}(P)\to u(P)$。因而我們可以假定，在引理中用到的函数 $\varphi^{(n)}(M)$ 在含于 B 内的以 P 为心的任一面定圓内为調和的。

轉向定理的証明。只要証明 $u(M)$ 在位于 B 内的任一圓 K 内

为调和函数就够了。設 P 为这个圆的中心。根据引理及关于它的注，函数 $\varphi^{(n)}(M)$ 在 K 内調和，这一函数在 P 点有極限 $v(P)$。根据哈納克定理，这些函数在 K 内的一切的点皆趋向于某一調和函数：

$$\varphi^{(n)}(M)\to v(M) \quad (M \text{ 在 } K \text{ 内}),$$

并且这个收斂性在含于 K 内以 P 为心的圓 K' 内为一致的。我們要証在 K 中成立 $v(M)=u(M)$。这点証明了，定理就算証畢。我們应用反証法。設在 K 内的某一点 P_1，我們有 $v(P_1)>u(P_1)$。因而应当存在上函数 $w(M)$，使得 $w(P_1)<v(P_1)$。設 K' 为以 P 为心的圓，使点 P_1 在其圓周上。作起上函数：

$$\rho^{(n)}(M)=\min[w(M),\ \varphi^{(n)}(M)] \text{ 及 } \rho_{K'}^{(n)}(M),$$

并且

$$\rho_{K'}^{(n)}(M)\leqslant\rho^{(n)}(M),$$

因为 $\varphi^{(n)}(M)$ 在閉圓 K' 内一致收斂于 $v(M)$，我們能断言，$\rho^{(n)}(M)$ 在閉圓 K' 也一致收斂于極限函数：

$$\rho(M)=\min[w(M),\ v(M)]。$$

因而在圓 K' 的圓周上一致收斂性也成立，而我們就可以断言，在 K' 内調和的函数 $\rho_{K'}^{(n)}(M)$ 在閉圓 K' 一致收斂于某一調和函数 $\rho_{K'}(M)$。因为 $w(P_1)<v(P_1)$，我們有 $\rho(P_1)<v(P_1)$，而一般地，在圓 K' 的圓周上我們有 $\rho(M)\leqslant v(M)$。因而由調和函数的平均值定理，有：$\rho_{K'}(P)<v(P)$。可是 $v(P)=u(P)$，由此推出 $\rho_{K'}(P)<$ $<u(P)$。在点 P 函数 $\rho_{K'}(M)$ 是上函数 $\rho_{K'}^{(n)}(M)$ 的極限，而不等式 $\rho_{K'}(P)<u(P)$ 与 $u(P)$ 为上函数在点 P 的下确界这一事实相矛盾。因而 $u(M)$ 在 B 内为調和函数这一定理証畢。

在三維的情形，証明几乎是完全一样的。这样，对在边界 l 上給定的任意的有界函数 $\omega(N)$，利用上面所指出的方法就可以作出在 B 内为調和的函数 $u(M)$。如果我們不作上函数的下确界 $u(M)$，我們也还可以作下函数的上确界 $u_0(M)$。如果 $\omega(N)$ 是在边界 l 上的連續函数，那末可以証明，$u_0(M)$ 与 $u(M)$ 是重合

的。在后文，我們經常討論上函数的下确界。

如我們已經提到的，所有的作法可以無变更地移到三維的情形中去。函数 $u(M)$ 称为以 $\omega(N)$ 为边値的狄义赫利問題的广义解。它的意义將在下段解釋。

注 当在边界 l 上的 $\omega(N)$ 为連續时，上面所指出的狄义赫利問題的广义解还可有另一作法，現来指出它。把函数 $\omega(N)$ 扩充到全平面，而保持它的連續性。再設 $B_n(n=1, 2, \cdots)$ 是区域序列，它們連同边界 l_n 都在 B 內，而趋向于 B，这就是說，在 B 內的每一点 M 位于从某一 n 开始的所有的 B_n 之中。比方說区域 B_n 可以是由有限个圓所合成，設对区域 B_n，对在 l_n 上任何的連續的边値，我們已能解狄义赫利問題。

設 $u_n(M)$ 是对 B_n 的狄义赫利問題的解，并且在 l_n 上的極限値为由我們已說过的 $\omega(N)$ 的延拓所給出。可以証明，当 n 無限增大时，$u_n(M)$ 趋向于上面所作出的狄义赫利問題的广义解 $u(M)$，并且在 B 內的每一閉区域上，这收斂是一致的。这样，$u_n(M)$ 的極限原来是既与 $\omega(N)$ 的延拓方法無关，也与区域 B_n 的选取無关。重要的仅是我們上面說过的这些区域的性質。这些事实的証明可以在 M. B. 凱尔迭廬的論文中找到 (Успехи Матем. наук, т. VIII)，

218. 边界值的研究 到此为止我們还沒有对区域 B 的边界作任何假設。我們現在对它添加某些条件，它們將是对区域 B 的边界上定点 N_0 而进行表述的。区域 B 的边界点集記为 l。

条件 I. 存在 $\overline{B}$ 上連續与在 B 內优調和的函数 $w(M)$，它使得 $w(N_0)=0$，而在 $\overline{B}$ 的其他部分 $w(M)>0$。

我們現在来証明定理。

定理 如果条件 I 滿足且边界函数 $\omega(N)$ 在点 N_0 連續，那末当点 M 从区域的內部趋向点 N_0 时，$u(M)$ 趋向 $\omega(N_0)$

用 β_η 記区域 $\overline{B}$ 中到 N_0 的距离不大于 $\eta>0$ 的那些点。設 ε 为已給的正数。由于 $\omega(N)$ 在点 N_0 的連續性，故存在一正数 η，使对屬于 β_η 的区域 B 的边界点成立不等式：

(180) $\omega(N_0)-\varepsilon\leqslant\omega(N)\leqslant\omega(N_0)+\varepsilon$ （N 在 l 上，又屬于 β_η）。

作起在 $\overline{B}$ 連續又在 B 内次調和的函数

(181) $$\varphi_1(M)=\omega(N_0)-\varepsilon-Cw(M),$$

于此 C 为我們馬上就要选定的某一正常数，由于(180)及 $w(M)\geqslant 0$，对在 l 上而又屬于 β_η 的点有 $\varphi_1(N)\leqslant\omega(N)$。选擇 C 相当大，使得在 β_η 之外且在 l 上的点滿足同一个不等式：

(182) $\omega(N_0)-\varepsilon-Cw(N)\leqslant\omega(N)$ （N 在 l 上而在 β_η 外）。

在 $\overline{B}$ 中到 N_0 的距离不小于 η 的所有的点，函数 $w(M)$ 达到最小的正值，我們記它为 m_η。这直接由以下事实推出，所指出的点成一閉集又函数 $w(M)$ 在这点集中为連續且为正值[II; 89]。为使不等式(182)能滿足，只要取

$$C\geqslant\frac{\omega(N_0)-\varepsilon-a}{m_\eta},$$

就可以了，于此 a 为在(177)中有过的数。在 C 的这样的选取下，函数(181)为下函数。同样地当 C 充分大时，函数

(183) $$\psi_1(M)=\omega(N_0)+\varepsilon+Cw(M)$$

为上函数。从 $w(N_0)=0$ 推出：

$$\varphi_1(N_0)=\omega(N_0)-\varepsilon,$$

又由于 $\varphi_1(M)$ 在 $\overline{B}$ 的連續性，可以找出一个小的正数 δ_1，使得在 β_{δ_1} 中：

$$\varphi_1(M)\geqslant\omega(N_0)-2\varepsilon\quad(M\text{ 在 }\beta_{\delta_1}\text{ 中})。$$

設 $\psi(M)$ 为任意的上函数。对所有屬于 $\overline{B}$ 的点 M，成立 $\psi(M)\geqslant\varphi_1(M)$，因而，从最后一个不等式推出：

$$\psi(M)\geqslant\omega(N_0)-2\varepsilon\quad(M\text{ 在 }\beta_{\delta_1}\text{ 中})。$$

函数 $\psi(M)$ 的下确界也应当满足这一不等式，即：

(184) $u(M)\geqslant\omega(N_0)-2\varepsilon$ （M 在 B 内又属于 β_{δ_1}）。

完全同样地，从(183)推出：

$$\psi_1(N_0)=\omega(N_0)+\varepsilon,$$

因此，由于 $\psi_1(M)$ 的連續性存在小的正数 δ_2，使得在 β_{δ_2} 中有：

$$\psi_1(M)\leqslant\omega(N_0)+2\varepsilon \quad (M \text{ 在 } \beta_{\delta_2} \text{ 中})。$$

并且更加有：

(185) $u(M)\leqslant\omega(N_0)+2\varepsilon$ （M 在 B 中且屬于 β_{δ_2}）。

設 δ 为数 δ_1 与 δ_2 中的最小者。由于(184)与(185)，我們有：

(186) $\omega(N_0)-2\varepsilon\leqslant u(M)\leqslant\omega(N_0)+2\varepsilon$ （M 在 B 中且屬于 β_δ）。

由于 ε 的任意性，从此就推出，当 M 在区域内部趋向于 N_0 时 $u(M)$ 趋向于 $\omega(N_0)$，而定理証畢。这証明在二維与三維情形都有效。如果 $\omega(N)$ 在边界的每一点均为連續，又在每一点条件 I 均滿足，那末函数 $u(M)$ 在閉区域 $\overline{B}$ 为連續且在边界点取值 $\omega(N)$。

定义 如果对于任意选擇的在 l 上为連續的函数 $\omega(N)$，当 $M\to N_0$ 时函数 $u(M)$ 趋向于 $\omega(N_0)$，那末点 N_0 称为正則的边界点。不具有这样性質的边界点称为非正則的边界点。

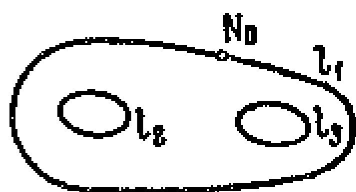
从上面所証的定理推出，条件 I 是点 N_0 为正則的充分条件。

現指出在三維的情形下的关于正則边界点的几何性質的一个充分条件。設点 N_0 为一边界点，它具有如下的性質：存在一球它除点 N_0 外不包含 $\overline{B}$ 的任何点。設 M_1 为这个球的中心，R 为它的半徑。用 r 来記距离 $|M_1M|$ 而作起函数：

$$w(M)=\frac{1}{R}-\frac{1}{r}。$$

显然这一函数能滿足条件 I 的所有的要求，并且在 B 內它是調和的。

現考察平面的情况，設 B 的边界是由有限个具方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 的閉曲綫所組成，于此 $x(t)$ 与 $y(t)$ 为参数 t 的連續的周期函数（圖 18）。首先設，点 N_0 在外迴道 l_1 上（圖 18）。把坐标原点 $z=0$ 置于該点且选擇單位，使区域 $\bar{B}$ 位于圓 $|z|<1$。之中作起函数



（圖十八）

$$F(z)=-\frac{1}{\lg z}。$$

当 z 在 B 中变化时，它不能繞原点一周，因而 $F(z)$ 在 $\bar{B}$ 为單值函数而在 $\bar{B}$ 上为連續，且 $F(0)=0$。

置 $z=\rho e^{i\varphi}$，对 $F(z)$ 的实部我們有表示式：

$$w(z)=-\frac{\lg \rho}{(\lg \rho)^2+\varphi^2},$$

于此 $\lg \rho<0$。这一調和函数滿足上面所示的全部的条件。

特别，在 β_ε 之外，成立：

$$w(z)>-\frac{\lg R}{(\lg \varepsilon)^2+\varphi_0^2},$$

于此 φ_0 为 φ 在 $\bar{B}$ 的最大値，又 R 是原点到 $\bar{B}$ 点最大的距离。

現設 N_0 在内迴道 l_2 上。在 l_2 之内任选一点 a，作平面的保角变換

$$z'=\frac{1}{z-a}。$$

迴道 l_2 变为外迴道，而对所考察的点 N_0 可以用上面所示的方法作起函数 $w(M)$。回到原来的变量 z，我們得到所要求的函数。因而如果 $\omega(N)$ 为在所論迴道的每点連續，那末 $u(M)$ 就会直到迴道連續且在其上等于 $\omega(N)$。

現設 N_0 是 $\omega(N)$ 的不連續点，并且当 N 沿迴道从兩边趋向 N_0 时極限都存在，但这些極限是不同的（第一类間斷点）。把它們

記为 $\omega_1(N_0)$ 及 $\omega_2(N_0)$，并設 $\omega_1(N_0)<\omega_2(N_0)$。进行与以前一样的論述，代替(184)，我們得到：

$$u(M)\geqslant\omega_1(N_0)-2\varepsilon,$$

而代替(185)的是：

$$u(M)\leqslant\omega_2(N_0)+2\varepsilon。$$

当 M 从 B 的內部趋向 N_0 时 $u(M)$ 可能有不同的極限值。但由于前一不等式及 ε 的任意性，对任一这些極限值 u_0 有不等式：

$$\omega_1(N_0)\leqslant u_0\leqslant\omega_2(N_0)。\tag{187}$$

如果 $\omega(N)$ 为有界函数，即滿足条件(177)，那末如我們所見，函数 $u(M)$ 也滿足这一条件。因而 $u(M)$ 是有界的調和函数，在 $\omega(N)$ 的所有的連續点，它取到边值 $\omega(N)$。

現回到三維空間的情形。可以作起比較簡單的具有非正則点的閉曲面。这情况是由勒貝格所發現，其后 П. С. 烏来松也独立地發現它。边界值問題的較詳細的說明可以在 M. B. 凱尔迭虚的論文中找到 (Успехи Матем. Наук, т. VIII)。

在平面的情形下再举一例。設 B 为以坐标原点为中心的圓，但原点除外。边界点集 l 为圓周及其中心。設在圓周上 $\omega(N)=0$，在圓心 $\omega(N)=1$。这样的函数在 l 上为連續。当 M 趋向圓周上点时，調和函数 $u(M)$ 显見是趋向于零的。現証 $u(M)$ 当 M 趋向于圓心时不可能趋向于 1。如果是这样，那末 $u(M)$ 就在整个圓內部調和，只要把它在原点的数值取为 1 就可以了[203]。但在圓心这是与关于調和函数的平均值定理相矛盾的。因而坐标原点为非正則的边界点。

不难証明在所論情形 $u(M)\equiv0$。实际上，$u(M)$ 有界，因而当 M 趋向于中心时有極限 [203]，如果把 $u(M)$ 在中心的数值取作这个数值，那末 $u(M)$ 在圓內处处調和 [203] 且在圓周上等于零，即 $u(M)\equiv0$。

还指出，可以作出另一正則性条件以代替条件 I。这个条件只牽涉到点 N_0 的近旁，并可以証明，这一新的条件等价于条件 I。

条件 II. 对点 N_0 的某一近旁 β_η 存在函数 $w_\eta(M)$，它在 β_η 直到边界为連續，在 β_η 中优調和且 $w_\eta(N_0)=0$，又在 β_η 的其他点 $w_\eta(M)>0$。

可以証明，在三維空間中如果点 N_0 为某一圓錐的頂点，而該圓錐的与 N_0 充分接近的点在 $\bar{B}$ 外(除点 N_0 外)，那末点 N_0 滿足条件 II，因而这样的点为正則（見 И. Г. 彼得罗夫斯基，偏微分方程講义)。

在以后如果不另外声明的話，我們常假設，包圍所討論的区域的迴道或曲面上的所有的点均为正則的。例如略普諾夫曲面就是这样的曲面。对于它們，我們已經利用勢函数論与积分方程来作出狄义赫利問題的解。

如果在边界上給定連續函数 $\omega(N)$，且所有点均为正則，那末所作的調和函数 $u(M)$ 直到边界連續，且在边界上取値 $\omega(N)$。我們知道，只可能存在一个这样的函数。如果在边界上有非正則点，那末調和函数 $u(M)$ 在区域內有界并在所有的正則边界点取値 $\omega(N)$。可以証明，只存在一个具这样性質的函数。这一重要論斷的証明可以在以上提到的凱尔迭肅的論文中找到 (Успехи Математических Наук, т. VIII, 1941)。

219. n 維空間中的拉普拉斯方程 到此为止我們考察了在平面上与在三維空間中的拉普拉斯方程。

这些結果容易推到 n 維空間的情形，这时方程易有形狀：

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}=0\,。$$

举出关于解这一方程有关的主要的結果。有到二阶連續导数且滿足这一方程的函数称为調和的。基本奇解具形狀：

$$\frac{C}{r^{n-2}} \quad (n>2),$$

于此常数 C 选为 $\frac{1}{(n-2)\omega_n}$，于此 ω_n 为 n 維空間中單位球面的面积，这就是，基本奇解具形狀：

$$\varphi_0(r)=\frac{1}{(n-2)\omega_n r^{n-2}} \quad (n>2)。$$

以 r 为半徑的 n 維球的体积 v_n 可用如下的公式表达 [II; 98]：

$$v_n=\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{n(n-2)\cdots 2}r^n \quad n \text{ 为偶数时}$$

$$v_n=\frac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n(n-2)\cdots 1}r^n \quad n \text{ 为奇数时},$$

如易于驗証的，可以把它們写为統一的形式：

$$v_n=\frac{2(\sqrt{\pi})^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}r^n,$$

由此，对 r 微分并置 $r=1$，我們得到：

$$\omega_n=\frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}。$$

对在以 S 为表面的区域 D 中的調和函数，成立公式 [II; 194]：

$$u(M)=\int_S\left(\varphi_0(r)\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\varphi_0(r)}{\partial n}\right)dS,$$

于此，我們处处都仅写出一个积分号。量 r 为曲面 S 上的积分变点到 M 的距离。調和函数的許多基本性質，在其中有关于調和函数在球心数值的平均值定理，狄义赫利問題解的唯一性定理等等都仍然正确。

解以 R 为半徑的球的狄义赫利問題的公式具形狀：

$$u(M)=\frac{R^{n}(R^{2}-\rho^{2})}{\omega_{n}}\int_{S}f(N)\frac{ds}{(R^{2}+\rho^{2}-2R\rho\cos\theta)^{\frac{n}{2}}},\tag{188}$$

于此 ρ 是从球心到 M 的距离，N 是球面上的变点，θ 为 ON，OM 間的交角。

在 n 維空間中解狄义赫利問題的上函数与下函数法可以不加改变地予以移用，并且前所証明的曲面上点的正則性条件也成立。

220. 拉普拉斯算子的格林函数 对于偏微分方程，我們也可以类似于对常微分方程的作法，来定义格林函数。我們先从拉普拉斯方程的格林函数开始，边值条件是下列二个齐次条件之一：

$$u|_{S}=0,\tag{189}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+p(N)u|_{S}=0\quad(p(N)>0),\tag{190}$$

并且，我們所考察的是三維的情形。我們既可以对在 S 內的有限区域 D_i，也可以对 S 外的無限区域 D_e 作格林函数。先从有限区域 D_i 开始。格林函数应当是点对 $(P,\ Q)$ 的函数 $G(P;Q)$，并且，如果把它看成点 P 的函数，它在 D_i 內除点 Q 外，有二阶的連續的导数，滿足拉普拉斯方程，在边界上滿足边值条件。其次，視作点 P 的函数的 $G(P;\ Q)$ 应当在点 Q 帶有奇异性，它是与一个集中在点 Q 的有限的电荷（或質量）相适应的。注意到在公式 [**II**; **201**]

$$\Delta\left[\iiint\limits_{D_i}\frac{\mu(M)}{r}d\tau_{M}\right]=-4\pi\mu(M_0)\quad(r=|M_0M|)\tag{191}$$

中的因子 4π，我們就定义对条件 (189) 或 (190) 的格林函数如下：

定义 对应于边值条件 (189) 或 (190) 的拉普拉斯算子的格林函数是指一个函数 $G(P;\ Q)$，它滿足下列条件：(1) 在 D_i 內，除 Q 点外这一函数是調和的；(2) 它滿足边值条件 (189) 或 (190)；(3) 它可以表示为形式：

(192)　　$G(P;Q)=G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\dfrac{1}{4\pi r}+g(P;Q)$,

式中 $r=|PQ|$，而 $g(P;Q)$ 是在 D_i 內处处为調和的函数。

格林函数的制作归結为寻求它的正則部分 $g(P;Q)$。在边值条件(189)下，在 D_i 內調和的函数 $g(P;Q)$ 在 S 上应取边值

(193)　　$g(N;Q)|_S=-\dfrac{1}{4\pi r}\quad(r=|NQ|)$。

在(190)的情形，$g(P;Q)$ 的边值条件具有形式：

(194)　$\left(\dfrac{\partial g(N;Q)}{\partial n}\right)_i+p(N)g(N;Q)|_S=-\dfrac{1}{4\pi}\left[\dfrac{\partial\dfrac{1}{r}}{\partial n}+\dfrac{p(N)}{r}\right]_S$.

因而，格林函数的制作归之于解拉普拉斯方程的第一边值問題与第三边值問題，如果 S 是略普諾夫曲面，我們就可認为，格林函数是存在的。

对外区域 D_e，应当把在無穷远处的正則性的条件添加到格林函数的定义上去，这就是对任意的在有限处的固定的 Q，如果点 P 趋向無穷远，$G(P;Q)$ 就应当趋向于零。

設 D_i 是任意的有界区域，Γ 为其境界点集。在 D_i 中以(193)为边值条件的狄义赫利問題的广义解存在。这时，公式(192)定义出对于区域 D_i 的在边值条件(189)下的广义格林函数。如果 N_0 是边界上的正則点，那末当 $P\to N_0$ 时 $G(P;Q)\to 0$。还可以証明其逆，即如果当 $P\to N_0$ 时 $G(P;Q)\to 0$，那末 N_0 是边界的正則点。

在平面的情形，格林函数的定义是完全相类似的，但是要成立公式

(195)　　$G(P;Q)=\dfrac{1}{2\pi}\lg\dfrac{1}{r}+g(P;Q)$

以代替(192)。从公式(192)与(195)推得，当点 P 与 Q 重合时，格林函数化为無限，并且，当 P 充分接近 Q 时，格林函数是正的。

点 Q 称为格林函数的極点。后文中，我們只考虑边值条件 (189) 下的格林函数。我們来証明：如果点 P, Q 不相重合，$G(P;Q)$ 是它們的連續函数。注意到(192)，就可断言，$G(P;Q)$ 的連續性的証明要归結到 $g(P;Q)$ 的連續性的証明。估計差式 $g(P';Q')-g(P'';Q'')$。添加并减去 $g(P';Q'')$，我們得到

$$|g(P';Q')-g(P'';Q'')|\leqslant|g(P';Q')-g(P';Q'')|+$$
$$+|g(P';Q'')-g(P'';Q'')|。$$

差式 $g(P';Q'')-g(P'';Q'')$ 是 $g(P;Q'')$ 在点 P' 与 P'' 的差值，当 $P''\to P'$ 时，它显然趋向于零。差式 $g(P';Q')-g(P';Q'')$ 显然是調和函数 $g(P;Q')-g(P;Q'')$ 在点 P' 之值。这个調和函数在 S 的边值是 $\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right)$，这里 r' 与 r'' 是 S 上的变点 N 到点 Q' 与 Q'' 的距离。

設点 Q'' 与 Q' 充分接近，那末当 N 在 S 上变动时，差 $\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right)$ 的絕对值是可以任意小的。但調和函数 $g(P;Q')-g(P;Q'')$ 在边界 S 上取到最小値与最大値，我們就可断言，当 $Q''\to Q'$ 时 $g(P';Q')-g(P';Q'')\to 0$。这样也就証明了 $g(P;Q)$ 的連續性，因而也証得 $G(P;Q)$ 的連續性質。

函数 $G(P;Q)$ 在 Q 点近旁为正，在 S 上等于零，因而它在区域 D_i 內为正。在三維的情形，这一論述对 D_e 也适用。再引出一个有关 $G(P;Q)$ 的簡單的不等式。函数 $g(P;Q)$ 在 S 上有負的边值(193)。因而在閉区域 D_i 中 $g(P;Q)<0$，所以在 D_i 內

$$0<G(P;Q)<\frac{1}{4\pi r}\quad(r=|PQ|)。\tag{196}$$

对 D_e 同一估計也有效。

現进行对平面情形的論述。設 d 是平面上有限区域的直徑，即区域 $\overline{B}$ 的二点的最大距离。調和函数 $g(P;Q)+\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{d}$ 在边

界 l 上取值 $\frac{1}{2\pi}\lg\frac{r}{d}$，对极点 Q 在 B 内的任何位置，这值总是負的。因而我們有：在 B 中 $g(P;Q)+\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{d}<0$，即 $g(P;Q)<$ $<-\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{d}$。这給出：

$$G(P;Q)<\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{r}-\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{d},$$

即成立形为

$$0<G(P;Q)<a\lg\frac{1}{r}+b \quad (\text{在 } B \text{ 内}) \tag{197}$$

的不等式，这里 a 与 b 是常数。不等式(196)与(197)給出格林函数的一个估計，它与点 P, Q 間的距离 r 有关。

221. 格林函数的性质 考察在 D_i 中的格林函数。如前，記 r 为空間变点到点 Q 的距离。定义函数

$$v(P)=\begin{cases} g(P;Q) & \text{在 } S \text{ 内} \\ -\dfrac{1}{4\pi r} & \text{在 } S \text{ 外。}\end{cases} \tag{198}$$

它在 D_i 内及在 D_e 内都是調和的，在无穷远为零。在 D_e 它有直到 S 为連續的任意阶导数。我們可以把在 D_e 中的 $v(P)$ 視为具有边值

$$f(N)=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{199}$$

的諾伊曼問題的解，因而我們可以在 D_e 内把 $v(P)$ 表示为具連續密度的单层势函数

$$v(P)=\iint_S\frac{\mu(N)}{r'}\,dS \quad (r'=|NP|)。 \tag{200}$$

这一势函数在 S 上的值等于 $\left(-\frac{1}{4\pi r'}\right)$，于此 $r'=|NQ|$，即，它与 $g(P;Q)$ 在 S 上有相同的值。从此可見，由等式(198)所定义的 $v(P)$，在整个空間都可以用公式(200)来表达，即

$$g(P;Q)=\iint_S \frac{\mu_i(N)}{r'}dS \quad (P \text{在} D_i \text{中}) \tag{201}$$

所以，$g(P;Q)$ 在 D_i 中对 S 有正常法綫导数。显然，对 $G(P;Q)$ 也可以作同样的論断。

我們指出，由于边値条件(199)，对点 Q 在 D_i 中的任意位置，函数 $\frac{1}{r}$ 不仅在 S 上，而且在与 S 相近的全空間都有任何阶的导数。在 S 上，(199)的右边显然满足李普希茲条件：

$$|f(N_2)-f(N_1)|\leqslant ar_{1,2} \quad (r_{1,2}=|N_1N_2|),$$

而我們就可断言，$\mu(N)$ 满足李普希茲条件[196]，因而 $g(P;Q)$ 就有到 S 为連續的一阶导数[198]。

現証格林函数的对称性：

$$G(P;Q)=G(Q;P)。\tag{202}$$

这时，我們指出，由于前面所証，$G(P;Q)$ 有在 S 上的正常法綫导数。在 D_i 内，除点 Q 外，它有連續法綫导数。現对函数 $u=G(P;Q_1)$ 及 $v=G(P;Q_2)$ 应用公式

$$\iiint_{D_i'}(u\Delta v-v\Delta u)\,d\tau=\iint_{S'}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS,$$

选擇积分区域 D_i' 为由 D_i 除去兩个以点 Q_1 与 Q_2 为中心，ε 为半徑的小球后的区域。由于前述事实，这公式是可以这样地应用的。因为格林函数在極点以外滿足拉普拉斯方程，所以沿这区域的三重积分为零。由于边値条件在 S 上等于零，所以在 S 上的积分化为零。因而我們导出等式：

$$\iint_{S_2}\left[G(P;Q_1)\frac{\partial G(P;Q_2)}{\partial n}-G(P;Q_2)\frac{\partial G(P;Q_1)}{\partial n}\right]dS+$$

$$+\iint_{S_1}[\quad]\,dS=0,$$

式中 S_1 与 S_2 是上述的球面。在点 Q_2，函数 $G(P;Q_1)$ 并無奇异性，而函数 $G(P;Q_2)$ 在点 Q_2 趋向于無限，其阶数为 $\frac{1}{r}$。注意到

$\frac{1}{\varepsilon}$ 与球面积 $4\pi\varepsilon^2$ 的乘积当 $\varepsilon\to 0$ 时也趋向于零。我們看到，当 $\varepsilon\to 0$ 时，所有的不趋向于零的項就只是那些包含 $G(P;Q_i)$ 在这种点近旁的法綫导数的項，那些点是使 $G=+\infty$。有两个这样的項，取其和，我們得到：

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_2} G(P;Q_1)\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}dS-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1} G(P;Q_2)\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}dS+\eta=0,$$

式中，当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\eta\to 0$，r_1 为变点 P 到 Q_1 的距离，r_2 为变点 P 到 Q_2 的距离。在格林公式中，我們用外法綫，因而在上面的那些公式中，法綫要朝向球的內部，这就是与半徑相反的方向。我們还有：

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint\limits_{S_2} G(P;Q_1)\,dS-\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint\limits_{S_1} G(P;Q_2)\,dS+\eta=0。$$

应用积分的中值定理，我們可写出：

$$G(P_2;Q_1)-G(P_1;Q_2)+\eta=0,$$

于此 P_2 是 S_2 上的某一点，P_1 是 S_1 上的某一点。取在 $\varepsilon\to 0$ 时的極限，我們就得到：

$$G(Q_2;Q_1)=G(Q_1;Q_2),$$

这就証明了格林函数的对称性。

球的格林公式具有形式 [II; 198]：

$$G(P;Q)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho r_1}\right), \tag{203}$$

式中 ρ 是点 Q 到中心的距离，r_1 是点 P 到点 Q 关于球的对称点 Q' 的距离，R 是球的半徑。用 (x, y, z) 与 (ξ, η, ζ) 来記点 P 与 Q 的坐标，可以写出：

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2};\quad \rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2};$$

$$r_1=\sqrt{\left(x-\frac{R^2\xi}{\rho^2}\right)^2+\left(y-\frac{R^2\eta}{\rho^2}\right)^2+\left(z-\frac{R^2\zeta}{\rho^2}\right)^2}。$$

对公式(203)微分,例如关于 x 来微分,注意到

$$\frac{|x-\xi|}{r}<1 \text{ 与 } \frac{\left|x-\dfrac{R^2\xi}{\rho^2}\right|}{r_1}\leqslant 1,$$

我們就得到估計:

$$\left|\frac{\partial G(P;\,Q)}{\partial x}\right|\leqslant\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{R}{\rho r_1^2}\right)。$$

注意到对球內的点 P 有 $r_1>r$ 及 $\frac{R}{\rho}<1$, 我們得到:

$$\left|\frac{\partial G(P;\,Q)}{\partial x}\right|\leqslant\frac{1}{2\pi r^2}。\tag{204}$$

对别的偏导数也得到类似的估計。

設 $u(M)$ 是对由曲面 S 所圍成的区域 D_i 的具有边值 $f(N)$ 的狄义赫利內部問題的解。如果我們知道 $u(M)$ 有正常法綫导数,那末我們令 $v=g(P;\,Q)$ 而可以对区域 D_i 应用公式(91)。这时,我們得到[見 II; 198]:

$$u(Q)=-\iint_S f(N)\,\frac{\partial G(N;\,Q)}{\partial n}\,dS_N。\tag{205}$$

A. M. 略普諾夫証明过,对任意选擇的作为边值条件的連續函数 $f(N)$,这一公式給出狄义赫利問題的解。格林函数对称性的第一个严格的証明也是屬于他的。这些結果,以及以前我們說过的那些关于势函数論的結果,包含在 A. M. 略普諾夫的論文"与狄义赫利問題有关的某些問題"(1898)(О некоторых вопросах, связанных с задачей Дирихле)中,这篇文章我們在以前也已提到过。

222. 平面上的格林函数 对平面上的格林函微的研究与空間的情况相比呈現了若干特殊性。我們將考察具有迴道 l 的有界区域 B_i 中的格林函数,在 l 上的边值条件是(189)。

如同在[221]中的情形一样,我們定义在平面上的函数 $v(P)$:

$$(203)\qquad v(P)=\begin{cases} g(P;Q) & \text{在 } l \text{ 内} \\ -\dfrac{1}{2\pi}\lg\dfrac{1}{r} & \text{在 } l \text{ 外。}\end{cases}$$

如同在[221]中所作的一样,作起單層勢函数:

$$(207)\qquad v_1(P)=\int_l \mu(s)\lg\frac{1}{r'}ds,$$

式中 r' 是 P 到在 l 上的变点 N 的距离,在 l 外的区域 B_e 中,函数 $v_1(P)$ 对 l 上的法綫导数的極限值是

$$(208)\qquad f(N)=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}\lg\frac{1}{r}=-\frac{\cos(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{n})}{2\pi r'},$$

式中 $\boldsymbol{r}'$ 是方向 QN,而 $\boldsymbol{n}$ 是 l 的法綫的方向,它指向閉圍道 l 的外面。現作起在 B_e 內的調和函数

$$(209)\qquad w(P)=\int_l \mu(s)\lg\frac{1}{r'}ds+\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{r}\quad (r=|PQ|,\ Q\text{在 } l \text{ 內})$$

它在 l 上有等于零的正常法綫导数。在 B_e 內部作任一閉迴道 l' 使它圍繞 l, 对函数 $u=w(P)$, $v=1$, 在 l 与 l' 所圍成的区域中应用格林公式。我們有

$$\int_l \frac{\partial w(P)}{\partial n}ds-\int_{l'}\frac{\partial w(P)}{\partial n}ds=0,$$

并且,在兩种情形中,$\boldsymbol{n}$ 都是关于閉迴道的外法綫。从此,并由于在 l 上 $\dfrac{\partial w(P)}{\partial n}=0$, 就有:

$$(210)\qquad \int_{l'}\frac{\partial w(P)}{\partial n}ds=0。$$

但
$$\frac{\partial w(P)}{\partial n}=\int_l \mu(s)\frac{\cos(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{n})}{r'}ds+\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{2\pi r},$$

这里 $\boldsymbol{r}'$ 是方向 $\overline{PN}$。沿 l' 积分,改变积分次序[18],并注意到点 P 与 N 都在 l' 內部,由于(210),就得:

$$2\pi\int_l \mu(s)ds+1=0。$$

我們現在可以改写(209)为形式：

(211) $$w(P)=\int_l \mu(s)\lg\frac{r}{r'}ds \quad (r=|QP|;\ r'=|NP|)。$$

当点 P 無限远离时，比 $\frac{r}{r'}$ 一致地趋向于 1，即对任何一已給正数 ε，存在一个正数 M，它使得对 N 在 l 上的任意位置，只要 $r\geqslant M$，就有 $\left|1-\frac{r}{r'}\right|\leqslant\varepsilon$。因而在 B_e 內部为調和的函数(211)，在 l 上有正常法綫导数，当 P 無限远离时，它趋向于零。对这一函数应用公式

$$\iint\limits_{B_e}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dS=\int_l w\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_e ds,$$

从此推出，在 B_e 中 $w(P)=0$，此即在 B_e 中有

$$\int_l \mu(s)\lg\frac{1}{r'}ds=-\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{r}。$$

如同[221]中一样，从此直接推出，在全平面上，單層势函数(207)与由(206)所定义的函数 $v(P)$ 相同。还可以断言，在 l 上 $g(P;Q)$ 有正常法綫导数。其次，与在[221]中一样，可以断言，$g(P;Q)$ 在 B_i 中有直到 l 为連續的第一阶导数，$G(P;Q)$ 的对称性可完全与[221]的情形一样进行。对半徑为 R 的圓，格林函数具形狀：

(212) $$G(P;Q)=\frac{1}{2\pi}\lg\frac{\rho r_1}{Rr},$$

式中所用的記号与[221]中的一样。这就引出如下的估計：

(213) $$\left|\frac{\partial G(P;Q)}{\partial x}\right|\leqslant\frac{1}{\pi r};\quad \left|\frac{\partial G(P;Q)}{\partial y}\right|\leqslant\frac{1}{\pi r}。$$

对 B_i 中狄义赫利問題的解，成立类似于(205)的公式。

在边值条件(189)之下拉普拉斯算子的对平面單联区域的格林函数与把所論区域保角映照到圓 $|w|\leqslant 1$ 的实現函数有密切的联系。設 B 为有迴道为 l 的單联区域，而 $z_0=\xi+\eta i$ 是該区域的

某一内点。設 $w=f(z)$ 实现区域 B 到單位圓的保角变换，且 $f(z_0)=0$，这就是点 $z=z_0$ 变为單位圓的原点。从变换的單叶性推出，$f(z)$ 只在点 $z=z_0$ 有一單根：

$$(214)\qquad f(z)=(z-z_0)[a_0+a_1(z-z_0)+\cdots]\quad (a_0\neq 0)。$$

作起函数

$$(215)\qquad G(x,y;\xi,\eta)=-\frac{1}{2\pi}\lg|f(z)|。$$

不难驗証，这就是对区域 B 以 (ξ,η) 为極点的格林函数。事实上，$\lg|f(z)|$ 为 $\lg f(z)$ 的实部，因此它满足拉普拉斯方程。根据(214)，函数(215)在点 (ξ,η) 的趋向于無限的部分为 $\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{|z-z_0|}$，而最后，由于区域 B 的迴道 l 变为單位圓周，即在 l 上 $|f(z)|=1$ 而知在該迴道上，函数(215)化为零。

用 $H(x,y,\xi,\eta)$ 来記(215)的共軛調和函数，我們就有：

$$(216)\qquad G+iH=-\frac{1}{2\pi}\lg f(z),$$

因而可以把 $f(z)$ 用格林函数及其共軛函数表示起来

$$f(z)=e^{-2\pi(G+Hi)}。$$

函数 H 除一常数項外为确定的，因而上述公式的右边，还有一个模为 1 的常数因子可为任意，这对应于單位圓 $|w|\leqslant 1$ 圍繞原点的任意的轉动。

設区域 B 的迴道有如下的性質：l 的切綫与任一固定方向的交角 $\theta(s)$ 是弧長 s 的函数，満足李普希茲条件：

$$(217)\qquad |\theta(s_2)-\theta(s_1)|\leqslant b|s_2-s_1|^\beta,$$

式中 b 与 β 都是正常数。可以証明，这时，导数 $f'(z)$ 直到 l 連續，还存在兩个正常数 m 与 M，使得

$$(218)\qquad m\leqslant|f'(z)|\leqslant M。$$

自然，这些常数与点 z_0 的选擇有关（z_0 就是变换到 w 平面上坐标原点的那一点），我們确定了这一点 z_0，并作起 B 到圓 $|w|\leqslant 1$ 的一般的保角变换，在

其下，在 B 内的某一点 z' 变为坐标原点。为此，须先实现保角变换 $w=f(z)$，然后把圆 $|w|\leqslant 1$ 变换为自身，使得点 $f(z')$ 变为坐标原点。这后一变换式为一次分式，舍去模为 1 的常数因子，我們終于得出：

$$-2\pi G(z;\,z')=R\left[\lg\frac{f(z)-f(z')}{1-f(z)\overline{f(z')}}\right],$$

这里，照例用 R 来表示实部的記号，$G(z;\,z')$ 表示以点 z' 为極点的区域 B 的格林函数。关于 x 微分，这里可以把 x 取为任何的方向，就得出：

$$-2\pi\frac{\partial G(z;\,z')}{\partial x}=R\left[\frac{f'(z)}{f(z)-f(z')}+\frac{\overline{f(z')}f'(z)}{1-f(z)\overline{f(z')}}\right]=$$

$$=R\left\{\frac{f'(z)[1-|f(z')|^2]}{[f(z)-f(z')][1-f(z)\overline{f(z')}]}\right\},$$

或者，用模来代替实部：

$$2\pi\left|\frac{\partial G(z;\,z')}{\partial x}\right|\leqslant\frac{|f'(z)|\,|1-|f(z')|^2|}{|f(z)-f(z')|\,|1-f(z)\overline{f(z')}|},$$

并注意到 $|f(z)|<1$，$|f(z')|<1$，就得出：

$$(218_1)\qquad 2\pi\left|\frac{\partial G(z;\,z')}{\partial x}\right|<\frac{|f'(z)|\,|1-|f(z')|^2|}{|f(z)-f(z')|\,(1-|f(z')|)}<\frac{2|f'(z)|}{|f(z)-f(z')|}.$$

設 $z=\varphi(w)$ 是 $w=f(z)$ 的逆函数。它在圆 $|w|\leqslant 1$ 中定义。从 (218) 中推出 $|\varphi'(w)|\leqslant\frac{1}{m}$，而我們就得到：

$$|\varphi(w)-\varphi(w')|=\left|\int_w^{w'}\varphi'(\tau)d\tau\right|\leqslant\frac{1}{m}|w-w'|,$$

并且，所示的积分可以沿直綫段进行。最后一个不等式給出 $|f(z)-f(z')|\geqslant\geqslant m|z-z'|$，并注意到 (218_1)，由于最后的不等式就会得出：

$$(219)\qquad \left|\frac{\partial G(z;\,z')}{\partial x}\right|\leqslant\frac{2M}{2\pi m|z-z'|}=\frac{M}{\pi m r},$$

式中 r 表示点 z 与 z' 間的距离。因而在对週道 l 所作的假設下，我們得到格林函数沿任何方向的导数的估計，这估計只与距离 r 有关。

如果区域 B 为多連通的，每一圍繞它的閉週道都滿足上述条件，那末，在这情形下也可得到 (219) 型的估計。估計 (219) 的上述証明，以及对多連通区域的結果的証明（我們并未进行）是 Г. М. 戈魯潛告訴我們的。

223. 例 现在来講怎样作出格林函数的例子。我們从圆 $|z|<1$ 的格林函数开始。以前，我們已經决定过使这个圆变为自身的函数，它还滿足使圆内某一点 a 变为原点。这一函数可写为 [III$_2$; 31]

$$w=\frac{e^{i\psi}}{\bar{\alpha}}\cdot\frac{z-\alpha}{z-\alpha'},$$

式中 $\bar{\alpha}$ 是与 α 共軛的复数，α' 是 α 关于圓的对称点，即 $\alpha'=\bar{\alpha}^{-1}$。用 r_1 与 r_2 記点 z' 到点 α 与 α' 的距离，就直接地得出圓的格林函数的如下的表达式

$$G(z;\ \alpha)=-\frac{1}{2\pi}\lg\left|\frac{e^{i\psi}}{\bar{\alpha}}\cdot\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right|=-\frac{1}{2\pi}\lg\frac{r_1}{r_2}+\frac{1}{2\pi}\lg\sqrt{\xi^2+\eta^2}。$$

現設区域 B 为一矩形，其頂点为 $(0,\ 0)$，$(0,\ a)$，$(a,\ b)$，$(0,\ b)$。置 $\omega_1=2a$，$\omega_2=2bi$，作起維尔斯特拉斯函数 $\sigma(z;\ \omega_1,\ \omega_2)$。我們已見到过，把这个矩形变为單位圓，而使点 $z=\xi+\eta i$ 变为原点的函数是具有形狀[III$_2$；188]：

$$f(z)=e^{i\psi}\frac{\sigma(z-\xi-\eta i)\sigma(z+\xi+\eta i)}{\sigma(z-\xi+\eta i)\sigma(z+\xi-\eta i)}。$$

因而，矩形的格林函数有如下的表达式：

$$G(z;\ \alpha)=-\frac{1}{2\pi}\lg\left|\frac{\sigma(z-\xi-\eta i)\sigma(z+\xi+\eta i)}{\sigma(z-\xi+\eta i)\sigma(z+\xi-\eta i)}\right|。$$

复变函数論也可以应用于制作多連通区域的格林函数，并且，我們也和以前一样，限于在 l 上的边値条件 (189)。比如說，設 B 为由外週道 l_1 与內週道 l_2 所圍成的双連通区域，$G(z;\ \alpha)$ 为这区域的格林函数。作起与 $G(z;\ \alpha)$ 共軛的調和函数 $H(z;\ \alpha)$ 及复变数函数 $\varphi(z)=G(z;\ \alpha)+H(z;\ \alpha)i$。在格林函数的極点 $z=\alpha$，函数 $\varphi(z)$ 有一对数奇异点，即在这一点的鄰域，它可以表示为在这点为正則的一些項与函数 $-\frac{1}{2\pi}\lg(z-\alpha)$ 的和。但，此外，沿包含 l_2 的閉週道运行一周时，函数 $\varphi(z)$ 会得到某一虛数的項 γi 的添加，而函数 $f(z)=e^{-2\pi\varphi(z)}$ 將会得到一个模为 1 的因子 $e^{2\pi\gamma i}$。此外，后一函数在 $z=\alpha$ 时有一單根，而在閉週道 l_1 与 l_2 上，它的模等于 1，这是因为在这些週道上，格林函数 $G(z;\ \alpha)$ 化为零。因而，格林函数的制作归結到制作这样的一个解析函数 $f(z)$，它在多連通区域 B 的內部有單值的模，在区域的週道上这模等于 1，而在点 $z=\alpha$ 有唯一的單根。

我們来考察由兩个同心圓所圍成的环域的情况为例。把公共的圓心取为原点，而圓的半徑等于 $h^{-\frac{1}{2}}$ 与 $h^{\frac{1}{2}}$，于此 $0<h<1$。这常可由一适当选擇的相似变換来达到。依公式 $z=e^{i\pi v}$ 来引入一个新的变量 v 以代替 z，除了 h 以外，我們还考察一个由公式 $h=e^{\pi\tau i}$ 所定义的純虛数 $\tau=ci\ (c>0)$。上述环域在 v 平面上对应一个由平行于实軸的直綫 $y=\pm\frac{c}{2}$ 所組成的帶域，它还被

兩条平行于虛軸，距离为 2 的直綫所界限住。

函数 $f(z)$ 也作为 v 的函数，应当是在所論的整个帶域中解析。由 v 到 $(v+2)$ 相当于在环內繞原点一周，而这时函数 $f(z)$ 应当得到一个模等于 1 的因子。在帶域的边界 $y=\pm\frac{c}{2}$ 上，应当滿足条件 $|f(z)|=1$，并且，如果 $z=\alpha$ 为格林函数在 z 平面上的極点，那末作为 v 的函数的 $f(z)$，应当在由等式 $\alpha=e^{\pi\beta i}$ 所定义的那些点 β 上有單根。这些点应当为 $f(z)$ 在帶域中根的全体。我們可假設 α 为正实数。这一点常可簡單地由作环域繞原点的旋轉而达到。不难驗証，函数

$$f(z)=z^{\frac{\lg\alpha}{\lg h}}\frac{\vartheta_1\left(\frac{v}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{v}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}=e^{-\frac{\pi\beta}{\tau}vi}\frac{\vartheta_1\left(\frac{v}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{v}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}$$

会滿足上面所提出的全部的条件。在所写出的公式里，$\vartheta_0(v)$ 与 $\vartheta_1(v)$ 是我們从前所定义起来的函数 [III; 176]，而数 β，为了确定起見，是記方程 $\alpha=e^{\pi\beta i}$ 的純虛数的解。为了驗証函数 $f(z)$ 的所有的性質，我們必須利用 [III; 177] 中的表(109)与(110)，也須利用下述事实，对实数 h，函数 $\vartheta_k(v)$ 对 v 的共軛虛数值有共軛的虛数值。有了函数 $f(z)$，我們就可依照公式

$$G(z;\alpha)=-\frac{1}{2\pi}\lg|f(z)|。$$

得出格林函数。

我們指出，对边值条件

$$\frac{\partial u}{\partial n}+hu=0$$

圓 $|z|<1$ 的格林函数具有相当复杂的形式，即.

$$G(z;\alpha)=\frac{1}{2\pi h}+\frac{1}{2\pi}\lg\sqrt{\frac{1-2rr_1\cos(\varphi-\varphi_1)+r^2r_1^2}{r_1^2-2rr_1\cos(\theta-\theta_1)+r^2}}+$$
$$+\frac{1}{\pi}R\left[(rr_1e^{i(\varphi-\varphi_1)})^{-h}\int_0^{rr_1e^{i(\varphi-\varphi_1)}}\frac{z'^{h-1}}{1-z'}dz'\right],$$

式中，(r,φ) 与 (r_1,φ_1) 記点 z 与 α 的極坐标，R 是实部的記号。当 $h=\infty$ 时我們应該舍去最后一項，不难驗証，它就化为前面所指出的对边值条件(189)的格林函数的表示式。

224. 格林函数与非齐次方程 考察在由曲面 S 所圍成的区域 D_i 中的非齐次方程：

(220) $$\Delta u(P)=-\varphi(P)。$$

我們假設，$\varphi(P)$ 在 D_i 中直到 S 为連續，在 D_i 內有連續的一阶导数。現求(220)的解，使它直到 S 为連續，并滿足边值条件：

(221) $$u|_S=0。$$

这样的解只能够有一个。这是直接由下述事实推出，方程(220)在初始条件(221)下的兩个解的差应当滿足拉普拉斯方程及条件(221)，卽这个差应当恒等于零。現証，所求的解具有形式：

(222) $$u(P)=\iiint\limits_{D_i} G(P;\ Q)\varphi(Q)d\tau_Q$$

或其另一記法：

(223) $$u(x,y,z)=\iiint\limits_{D_i} G(x,y,z;\ \xi,\eta,\zeta)\ \varphi(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta。$$

由于(192)，还可以写作：

(224) $$u(P)=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D_i}\varphi(Q)\ \frac{1}{r}d\tau+\iiint\limits_{D_i} g(P;\ Q)\varphi(Q)d\tau。$$

第一項在 D_i 中有連續的二阶导数，拉普拉斯算子作用于它的結果是 $[-\varphi(P)]$ [II; 201]。現証第二項可以关于点 P 的坐标 (x,y,z) 在积分号下任意次地求导数。从此就可推出，它自身就是在区域 D_i 中的調和函数（因为 $g(P;\ Q)$ 是在点 P 的調和函数）。首先作一个注解。設調和函数的边界值 $f(N;\ a)$ 依賴于一个参数 a。这时調和函数本身也是依賴于 a 的函数 $u(P;\ a)$。如果 $a\to a_0$ 时 $f(N;\ a)$ 在 S 上一致地趋向于 $f(N;\ a_0)$，那末 $u(P;\ a)$ 在閉区域 $\overline{D}_i$ 也一致地趋向于 $u(P;\ a_0)$ [201]。

函数 $g(P;\ Q)$ 是点 $Q(\xi,\eta,\zeta)$ 的調和函数 [220]，其边值为 $\left(-\frac{1}{4\pi r}\right)$，于此 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$。我們設 P 是在 D_i 內部。

函数

$$(225)\qquad \frac{g(x+\Delta x,\, y,\, z;\, \xi,\, \eta,\, \zeta)-g(x,\, y,\, z;\, \xi,\, \eta,\, \zeta)}{\Delta x}$$

是点 (ξ, η, ζ) 的調和函数，其边界值为

$$-\frac{1}{4\pi\Delta x}\left[\frac{1}{\sqrt{(x+\Delta x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\right]。$$

当 $\Delta x\to 0$ 时这些边界值在 S 上一致地趋向于

$$(226)\qquad -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right),$$

而因此就直接推出，比 (225) 在閉区域 $\overline{D}_i$ 中一致地趋向于点 (ξ, η, ζ) 的調和函数，其边界值为 (226)。类似的論述也适用于任何阶数的其他的导数。因而函数 $g(P; Q)$ 对在区域 D_i 内的点 P 的坐标有任何阶的导数。从此也直接推出，公式(224)的第二項关于 (x, y, z) 在积分号下求导数是可能的。

所剩下要証明的是，由公式(222)所决定的函数滿足边值条件(221)。实質上，这是从下述事实中推出来的，$G(P; Q)$ 如作为 P 的函数来看，就滿足这个条件。这个論述的不足之处在于：在积分时点 Q 可以与 S 任意地接近，但另一面，当我們檢驗条件 (221) 时，点 P 应該趋向于 S。在这时，函数 $G(P; Q)$ 的性态尙未清楚。

进行对函数 (222) 滿足条件 (221) 这一事实的严格証明。設 D_i' 为区域 D_i 的一部分，它是在以 N_0 为中心、d_1 为半徑的球的外面的部分，D_i'' 是 D_i 在这一球里面的部分。如果給定一个正数 ε，那末由于注意到估計(196)，我們可以选取 d_1 充分小，使得沿 D_i'' 作公式(222)中的积分时，当 P 为在所說的球的內部任何位置时，积分的絕对值小于 $\frac{\varepsilon}{2}$。在沿 D_i' 作积分时，点 Q 在 D_i' 内，而点 P 比如說可以設为在以 N_0 为中心、$\frac{d_1}{2}$ 为半徑的球内部。在这时，距

离 $|PQ|$ 大于 $\frac{d_1}{2}$，而从 [220] 就推出，$G(P; Q)$ 为点对 (P, Q) 的連續函数。

因而，在沿 D_i' 的积分中，我們可以关于 P 取 $P \to N_0$ 时的極限，因为 $G(P; Q)$ 满足条件 (221)，所以这个極限等于零。所以，当 P 充分接近于 N_0 时，沿 D_i' 的积分的絕对值小于 $\frac{\varepsilon}{2}$，因而，只要 P 充分接近于 N_0，在公式 (222) 中的整个积分的絕对值也小于 ε。从此，由于 ε 的任意性，就推出这一积分满足条件 (221)。因而公式 (222) 給出方程 (220) 的满足边值条件 (221) 的解这一論断，就完全証好了。

注 1． 在体积势函数的連續二阶导数的存在性与普阿松公式的証明中，可以只假設，它的密度在区域 D_i 中满足李普希茲条件以代替第一阶連續的导数的存在。(例如，参考 H. M. 根特尔，"势函数理論及其对数学物理的基本問題的应用"，H. M. Гюнтер, "La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique methématique")。因而如果 $\varphi(P)$ 满足李普希茲条件：

$$(227) \qquad |\varphi(P_2) - \varphi(P_1)| \leqslant b r_{1,2}^{a} \quad (r_{1,2} = |P_1P_2|),$$

那末我們的論断——公式 (222) 給出問題 (220)，(221) 的解——仍然有效。如果 $\varphi(P)$ 只在閉区域 $\overline{D}_i$ 上連續，那末我們就不能斷定公式 (224) 右边的第一項有二阶的导数，也不能斷定它适合方程 (220)。但是所提到的公式的第二項为調和函数以及公式 (222) 所定义的函数满足条件 (221) 等証明保持有效。

注意到，具連續密度的体积势函数是方程 (220) 的广义解 [160]，我們可以断言，对在閉区域 $\overline{D}_i$ 中的連續函数 $\varphi(P)$，公式 (222) 給出满足条件 (221) 的广义解。

現証，这样的解是唯一的。設存在方程 (220) 的兩个連續的广

义解 $u_1(P)$ 与 $u_2(P)$，它們都滿足条件(221)。我們有：

$$\iiint_{D_i} u_1 \Delta\sigma\, d\tau = -\iiint_{D_i} \varphi\sigma\, d\tau ;$$

$$\iiint_{D_i} u_2 \Delta\sigma\, d\tau = -\iiint_{D_i} \varphi\sigma\, d\tau ,$$

这里 σ 是在 D_i 內有連續二阶的导数的任意函数，但在所有的与 S 相当接近的点，它等于零。逐項相減，得到：

$$\iiint_{D_i} (u_2 - u_1)\, \Delta\sigma\, d\tau = 0,$$

从此可知，(u_2-u_1)为在 D_i 內的調和函数[160]。由于(u_2-u_1)直到 S 为連續，而在 S 上等于零，就推知，在 D_i 中 u_2 恒等于 u_1。

因而，对任意的連續函数 $\varphi(P)$ 公式(222)給出方程(220)的唯一的滿足条件(221)的解。这个解在 D_i 有連續的第一阶导数[II; 200]。

注 2. 現設 $u(P)$ 是一在 $\overline{D}_i$ 上連續的已給函数，它滿足条件(221)且在 D_i 內有連續的二阶导数，它能使拉普拉斯算子 $\Delta u(P)$ 直到 S 为連續。把这个函数代入方程(220)的左端，我們就得到在閉区域 $\overline{D}_i$ 連續的函数 $\varphi(P)$。显然，函数 $u(P)$ 旣为方程(220)的滿足条件(221)的普通解，又是它的广义解。因此，这一函数 $u(P)$ 应当用 $\varphi(P)$ 依公式(222)表示起来。

所述的一切也可以移置于二維的情形，这时方程(220)具有形狀

$$\Delta u(x, y) = -\varphi(x, y)。 \tag{228}$$

在具有迴道 l 的区域 B 中的解，如果它滿足边値条件：

$$u|_l = 0, \tag{229}$$

那末它就可以由公式

$$u(x, y)=\iint_B G(x, y; \xi, \eta)\varphi(\xi, \eta)d\xi\, d\eta \tag{230}$$

給出。

225. 特征值与特征函数 以上所証明的格林函数的有关于非齐次方程(220)的基本性質構成应用格林函数来解方程

$$\Delta v+\lambda v=0 \quad (\text{在 } D_i \text{ 内}) \tag{231}$$

在边值条件

$$v|_S=0 \tag{232}$$

下的边值問題的基础，而这一边值問題联系于解波动方程与热傳导方程的边值問題，我們在后文还要詳述这一点。

把 λv 移在右端，如在 [173]，我們証明所提的問題 (231)，(232) 等价于具对称核的积分方程：

$$v(P)=\lambda\iiint_{D_i} G(P; Q)v(Q)d\tau, \tag{233}$$

当 P 与 Q 重合时这方程的核化为無限，但由于 (192)，核的極性的阶次为 $\frac{1}{r}$，即

$$G(P; Q)=\frac{K(P; Q)}{r}, \tag{234}$$

式中 $K(P; Q)$ 为連續函数，所以[18]中的全部理論都可应用。

把方程(233)表为形狀：

$$v(P)=\frac{\lambda}{4\pi}\iiint_{D_i} v(Q)\frac{1}{r}\,d\tau+\lambda\iiint_{D_i} g(P; Q)v(Q)d\tau \tag{235}$$

$$(r=|PQ|)。$$

如果 $v(P)$ 是这一方程的連續解，那末右端的第一項，它是作为有連續密度的質量分布的势函数，在 D_i 内有連續的第一阶导数。而右边第二項，如我們以前所見，在 D_i 中有連續的任意阶的导数。因此，$v(P)$ 在 D_i 内有連續的一阶导数。但这时，如我們所知

[II;201]，右边的第一项在 D_i 内有連續的二阶导数。应用普阿松公式，由于 (235)，我們就得到在 D_i 内的方程 $\Delta v=-\lambda w$。如在[224] 所見，可以得到边值条件 (232)。相反地，如在[224]所見，从 (231) 与 (232)，可直接得出 (233)。因而我們証明了边值条件 (232)下的方程 (231) 与积分方程(233)是等价的。对这一积分方程的核，我們有(234)，从此可直接推出不等式：

$$\iiint\limits_{D_i} G^2(P;Q)\,d\tau \leqslant C, \tag{236}$$

于此 C 为某一常数。

設 λ_k 与 $v_k(P)$ 为方程 (233) 的特征值与特征函数，也就是問題(231) (232)的特征值与特征函数：

$$\Delta v_k+\lambda_k v_k=0 \quad (\text{在 } D_i \text{ 内}); \tag{237$_1$}$$

$$v_k|_S=0。 \tag{237$_2$}$$

可以假設，$v_k(P)$ 在 D_i 中構成正交标准化系統：

$$\iiint\limits_{D_i} v_l(P)v_m(P)\,d\tau=\begin{cases}0 & \text{当 } l\neq m \text{ 时}\\ 1 & \text{当 } l=m \text{ 时}。\end{cases} \tag{238}$$

设函数 $\omega(P)$ 及其一阶与二阶导数在 D_i 直到 S 为連續并設此函数滿足条件(232)。我們可以把它表示为形式[224]：

$$\omega(P)=-\iiint\limits_{D_i} G(P;Q)\,\Delta\omega(Q)\,d\tau, \tag{239}$$

而应用[22]中的展开式的基本定理，我們就可断言，$\omega(P)$ 可按特征函数展开为富里埃級数：

$$\omega(P)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(P), \tag{240}$$

并且这一級数在閉区域 $\overline{D}_i$ 正则收斂。系数是可以用通常的方法来决定的：

(241) $$c_k=\iiint_{D_i}\omega(P)v_k(P)d\tau_{\circ}$$

因而我們有:

定理 每一連續函数 $\omega(P)$,如又在閉区域 $\overline{D}_i$ 有直到二阶的連續导数,又滿足条件 (232),可以展开为特征函数 $v_k(P)$ 的富里埃級数,它在閉区域 D_i 正則收斂。

其次我們指出,特征值 λ_k 的个数是無限的。在写出級数(240)时,我們已經利用到这一点。从級数 (240) 的一致收斂性就推出,如果 $\omega(P)$ 滿足定理中所指出的条件,那末就成立封閉性方程:

(242) $$\iiint_{D_i}\omega^2(P)d\tau=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2{}_{\circ}$$

在以下,我們証明这一方程对任何的在閉区域 $\overline{D}_i$ 中連續的函数都成立。不難証明,如果在閉区域 $\overline{D}_i$ 中的某一連續函数 $\omega_1(P)$ 的富里埃級数

(243) $$\sum_{k=1}^{\infty}a_kv_k(P)$$

在 $\overline{D}_i$ 一致收斂,那末它的和就等于 $\omega_1(P)$。用 $\omega_2(P)$ 来記級数 (243) 的和,我們来考察函数 $\omega_2(P)-\omega_1(P)$,它在 $\overline{D}_i$ 連續,与所有的特征函数正交。因而,它們与核也正交,即

$$\iiint_{D_i}G(P;Q)[\omega_2(Q)-\omega_1(Q)]d\tau=0\quad(P\text{ 在 }\overline{D}_i\text{ 中})_{\circ}$$

从此可見,在条件(232)下,方程

$$\Delta u(P)=\omega_1(P)-\omega_2(P)$$

的广义解是 $u(P)\equiv0$,因而,$\omega_2(P)$ 重合于 $\omega_1(P)$。

从最后的論述直接推出,核 $G(P;Q)$ 是完全核 [見 **175**],因而有無限个特征值 λ_k[25]。現指出封閉性方程对任何的在 $\overline{D}_i$ 中为連續的函数 $\omega(P)$ 都成立。这样的函数必須是有界的,这就是,

存在一正数 M，使得 $|\omega(P)|\leqslant M$。設 ε 为已給正数。选取閉区域 D'_i，使在 D_i 内，并使 $(D_i-D'_i)$ 的体积小于 $\frac{\varepsilon}{32M^2}$。在 $D_i-D'_i$ 內部作一閉曲面 S'，使包含 D'_i 于其內部，并且定义一函数 $\varphi(P)$，使得它在閉区域 D'_i 中等于 $\omega(P)$，在 S' 上与 S' 外等于零。这一函数可以扩充到全空間，使得它为連續，并满足不等式 $|\varphi(P)|\leqslant\leqslant M$ [157]。設 $\varphi_n(P)$ 为 $\varphi(P)$ 的平均函数。它有所有阶的导数，对所有的充分大的 n，它們在曲面 S 上等于零，又满足不等式 $|\varphi_n(P)|\leqslant M$。函数 $\varphi_n(P)$ 在 D'_i 中一致收斂于 $\omega(P)$，我們可以固定一个充分大的 n，使成立：

$$\iiint\limits_{D'_i}[\omega(P)-\varphi_n(P)]^2d\tau\leqslant\frac{\varepsilon}{4}。$$

对函数 $\varphi_n(P)$，由于上面所說的事实，成立封閉性方程，这就是，存在这样的 N，使得当 $m\geqslant N$ 时

$$\iiint\limits_{D_i}[\varphi_n(P)-s_m(\varphi_n)]^2\,d\tau\leqslant\frac{\varepsilon}{8},$$

式中 $s_m(\varphi_n)$ 为函数 $\varphi_n(P)$ 的富里埃級数的一段。注意到不等式 $(a+b)^2\leqslant2(a^2+b^2)$，就可以写出：

$$\iiint\limits_{D_i}[\omega(P)-s_m(\varphi_n)]^2\,d\tau=$$

$$=\iiint\limits_{D_i}\{[\omega(P)-\varphi_n(P)]+[\varphi_n(P)-s_m(\varphi_n)]\}^2\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant2\iiint\limits_{D_i}[\omega(P)-\varphi_n(P)]^2d\tau+2\iiint\limits_{D_i}[\varphi_n(P)-s_m(\varphi_n)]^2d\tau\leqslant$$

$$\leqslant2\iiint\limits_{D_i}[\omega(P)-\varphi_n(P)]^2d\tau+\frac{\varepsilon}{4}。$$

其次我們有：

$$2\iiint\limits_{D_i}[\omega(P)-\varphi_n(P)]^2d\tau=$$

$$=2\iiint\limits_{D_i-D_i'}[\omega(P)-\varphi_n(P)]^2d\tau+2\iiint\limits_{D_i'}[\omega(P)-\varphi_n(P)]^2d\tau\leqslant$$

$$\leqslant 2\iiint\limits_{D_i-D_i'}[\omega(P)-\varphi_n(P)]^2d\tau+\frac{\varepsilon}{2}。$$

对最后一积分，我們利用不等式

$$|\omega(P)-\varphi_n(P)|^2\leqslant 4M^2,$$

而得到：

$$2\iiint\limits_{D_i-D_i'}[\omega(P)-\varphi_n(P)]^2d\tau\leqslant 8M^2\cdot(D_i-D_i')\text{ 的体积}<\frac{\varepsilon}{4},$$

由此，前面的不等式給出，在 $m\geqslant N$ 时

$$\iiint\limits_{D_i}[\omega(P)-s_m(\varphi_n)]^2d\tau<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon。$$

再进一步 [3]，在 $m\geqslant N$ 时

$$\iiint\limits_{D_i}[\omega(P)-s_m(\omega)]^2d\tau<\varepsilon,$$

从此，由于 ε 的任意性，就推出对 $\omega(P)$ 的封閉性方程。

还指出，从(236)直接推出，級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}$$

是收斂級数[3]。不难証明，封閉性方程对于[3]中所指出的那种类型的無界函数，特别是对格林函数 $G(P;Q)$ 是成立的。

226. 特征函数的法綫导数 对我們今后重要的是：研究函数 $v_k(P)$ 的导数当 P 迫近于曲面 S 时的性态。

定理 函数 $v_k(P)$ 在 S 上有正常法綫导数。

作起質体勢函数：

$$u(P)=\frac{\lambda_k}{4\pi}\iiint\limits_{D_i}\frac{v_k(Q)}{r}d\tau \quad (r=|PQ|)。$$

它在全空間有定义，連續，有連續的第一阶导数，在無穷远等于零，它是 D_e 中的調和函数，在 D_i 中有到二阶的連續导数而且滿足方程：

$$\Delta u=-\lambda_k v_k。 \tag{244}$$

我們可以作起單層勢函数：

$$v(P)=\iint\limits_S\frac{\mu(N)}{r}dS,$$

它在 S 上滿足边值条件：

$$\left(\frac{\partial v(N)}{\partial n}\right)_e=\frac{\partial u(N)}{\partial n},$$

并且，必須指出 $u(P)$ 在全空間有連續的第一阶导数。作起函数：

$$w(P)=u(P)-v(P)。$$

它在 D_e 內有界，在無穷远等于零，在 S 上有等于零的从外部的正常法綫导数。对在 D_e 的函数 $w(P)$ 可以应用格林公式[200]，从此推出在 D_e 中 $w(P)\equiv 0$，因而这式子在 S 上也成立。由于(244)，在 D_i 內部的函数 $w(P)$ 滿足方程

$$\Delta w=\Delta u-\Delta v=-\lambda_k v_k,$$

从此推得，在 D_i 中 $w(P)$ 重合于 $v_k(P)$，即

$$v_k(P)=u(P)-v(P) \quad (P\text{ 在 }D_i\text{ 中}),$$

式中 $u(P)$ 与 $v(P)$ 前已定义。从此直接推出，特征函数 $v_k(P)$ 在 S 上有正常法綫导数。注意到这一点，我們就可以对函数 $v_k(P)$（非調和的）应用格林公式：

$$\iiint\limits_{D_i}\left[\left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_k}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_k}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=$$

$$=\iint\limits_S v_k\left(\frac{\partial v_k}{\partial n}\right)_i dS-\iiint\limits_{D_i}v_k\Delta v_k d\tau。$$

注意到方程 $\Delta v_k=-\lambda_k v_k$ 和条件(237_2)以及函数 $v_k(P)$ 已为标准化，即

$$\iiint_{D_i} v_k^2(P)\,d\tau=1,$$

我們就得到公式

$$\lambda_k=\iiint_{D_i}\left[\left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_k}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_k}{\partial z}\right)^2\right]d\tau, \tag{245}$$

从此推出 λ_k 是正的。这一結果也可以較簡單地得到。它直接地可从如下的定理推出，在 $\lambda<0$ 和条件(232)下，方程(231)只有零解。我們將在[234]中証明这一定理。

在[208]中提到的斯穆棱茨基的論文中在曲面为充分光滑的假設下，研究了特征函数的各阶导数。

証明了如下的事实：如果 S 屬于类 S_{l+5}，那末 $v_k(P)$ 屬于类 $\mathrm{Lip}\,\beta\left(l-2,\ C_l\lambda_k^{\frac{l+1}{2}}\right)$，于此 $0<\beta<1$ 为任意的，而 β 的选擇决定了数 C_l 的选擇。

在平面的情形，特征函数的正常法綫导数的存在性的証明，由于把以前的証明改变形狀之后，就归結到与在[222]中所进行的关于格林函数的正常法綫导数的存在性的証明的作法相类似的过程。

227. 特征值与特征函数的極值性質 完全与[186]中相类似，我們可以闡明特征值 λ_n 与特征函数 $v_n(P)$ 的極值性質。如我們所見，它們是有弱極性[依据(234)]的对称核的积分方程(238)的特征值与特征函数。我們假設，特征值 λ_n（它們为正）依不減少的次序排列，即 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$。我們知道，$\lambda_1$ 是积分

$$\iiint_{D_i}\iiint_{D_i} G(P;Q)\,\omega(P)\,\omega(Q)\,d\tau_P\,d\tau_Q \tag{246}$$

在滿足条件

$$\iiint_{D_i}\left[\iiint_{D_i} G(P;Q)\,\omega(Q)\,d\tau_Q\right]^2 d\tau_P=1$$

的在連續函数类 $\omega(P)$ 中的最小值，而这个最小值可以在 $\omega(P)=$

$=v_1(P)$ 时达到。在 $d\tau$ 处的記号是指出积分的变点的。在积分(246)中,关于点 P 与点 Q 的积分的次序是無关的[見 **17**]。

为了得到后面的特征值与特征函数,必須添上正交性条件:

$$\iiint\limits_{D_i} \omega(P) v_k(P) d\tau = 0 \quad (k=1, 2, \cdots, n-1)。$$

引入可以用核来表示的函数类 A:

$$v(P) = \iiint\limits_{D_i} G(P; Q) \omega(Q) d\tau_Q,$$

式中 $\omega(Q)$ 是 $\overline{D}_i$ 中的任意連續函数,我們就可以把上面的問題叙述成如下的問題:在条件

$$\iiint\limits_{D_i} v^2(P) d\tau = 1$$

下,求积分

$$\iiint\limits_{D_i} v(P) \omega(P) d\tau$$

在上述的函数类 $v(P)$ 中的極小。

这一类函数是对于任何一个在 $\overline{D}_i$ 中連續的函数 $\omega(P)$ 的普阿松方程

$$\Delta v(P) = -\omega(P)$$

的广义解类,它們在 S 上等于零。而最后,我們可以談論积分

$$-\iiint\limits_{D_i} v \Delta v \, d\tau \tag{247}$$

在类 A 的極小,这里 Δv 是广义的拉普拉斯算子。如同[**186**],上面所示的正交性条件归結为函数 $v(P)$ 的正交性条件:

$$\iiint\limits_{D_i} v(P) v_k(P) d\tau = 0 \quad (k=1, 2, \cdots, n-1)。\tag{248}$$

类 A 中的函数 $v(P)$ 在 D_i 內部有連續的一阶导数,如果我們重复[**226**]中的論述,我們就会証明,$v(P)$ 在 S 上有正常法綫导数。

現来定义作为类 A 的部分的类 A_1。类 A_1 是一具有如下的性質的函数 $v(P)$ 的集合：它們在閉区域 $\bar{D}_i$ 連續，在 S 上等于零，在 D_i 中它們有到二阶的連續导数，并且它的拉普拉斯算子直到 S 为連續。所有的特征函数都屬于类 A_1。如果 $v(P)$ 屬于类 A_1，那末我們可以对积分 (247) 用格林公式，而注意到在 S 上 $v(P)=0$，就可以写出积分

$$\iiint_{D_i} (v_x^2+v_y^2+v_z^2)\,d\tau \tag{249$_1$}$$

以代替积分 (247)。因而，我們能断言，λ_1 是这个积分在类 A_1 中的满足条件

$$\iiint_{D_i} v^2 d\tau=1 \tag{249$_2$}$$

的最小値，而这个最小値在 $v(P)=v_1(P)$ 时达到。为了得到后面的特征値与特征函数，必須利用已求到的特征函数而添加上面提到过的正交性条件 (248)。可以証明，格林公式

$$\iiint_{D_i} (v_x^2+v_y^2+v_z^2)\,d\tau=-\iiint_{D_i} v\Delta v\,d\tau$$

对类 A 中的任意函数 v 成立，式中 Δv 是广义拉普拉斯算子。

因此，上述的特征値与特征函数的極值性質对类 A 中的函数也成立。在第五卷中我們要証明，这些極值性質在广泛得多的一类函数中也成立。

228. 赫姆荷茲方程与輻射原理　考察波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u \tag{250}$$

并將要求它的具有已給頻率的正弦駐波系統型的解

$$u=e^{i\omega t}v\,。\tag{251}$$

对 v，我們得到赫姆荷茲方程：

$$\Delta v+k^2v=0\quad (k=\omega : a), \tag{252}$$

其形狀与拉普拉斯方程相类似。首先我們要闡明这方程的解在無穷远处要满足什么样的条件。我們已在 [III₂; 154] 中提到这个条件而称它为輻射原理。在本段中我們要給出这个条件的数学的説法。設在某一曲面 S 外有一駐波系統，以 S 外的某点 M 为中心作球 S_ρ。这个球的半徑取得相当大，使得 S 在 S_ρ 之內，应用克希荷夫公式 [II; 202]:

$$u(M;t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S+S_\rho}\left[\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]+\frac{1}{ar}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n}-[u]\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right]dS$$

到解(251)。在所写的公式中，积分沿 S 与 S_ρ 进行。对解 (251)，我們有:

$$[u]=e^{i\omega\left(t-\frac{r}{a}\right)}v;\quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]=e^{i\omega\left(t-\frac{r}{a}\right)}\frac{\partial v}{\partial n};\quad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=i\omega e^{i\omega\left(t-\frac{r}{a}\right)}v,$$

而沿 S_ρ 积分时我們得到如下形狀的积分:

$$\iint\limits_{S_\rho}\frac{e^{-ikr}}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}+ikv\right)dS+\iint\limits_{S_\rho}\frac{v}{r^2}e^{-ikr}dS, \tag{253}$$

并且在积分号下，应置 $r=\rho$。自然就要求，当 $\rho\to\infty$ 时这一个表示式要趋向于零（在無穷远点沒有振动的源泉），球面的面积元素包含因子 ρ^2，如果使 v 满足要求：当 $r\to\infty$ 时

$$rv\ \text{有界},\quad r\left(\frac{\partial v}{\partial r}+ikv\right)\to 0,$$

并且这个条件对任意选择的向徑 r 的始点都成立。还关于这些向徑的方向一致地成立。在后文中我們將利用如下的記号，用 $O(r^\alpha)$ 来記，使当 $r\to\infty$ 时比值 $x:r^\alpha$ 保持有界的这种量 x，而用 $o(r^\alpha)$ 来記使当 $r\to\infty$ 时比值 $x:r^\alpha\to 0$ 的这种量 x，并且这关系式应关于向徑 r 的方向一致地成立，且与原点的选擇無关。以前的条件可写作形式:

$$v=O(r^{-1}); \tag{254}$$

(255) $$\frac{\partial v}{\partial r}+ikv=o(r^{-1})。$$

这些条件也就是在三維空間情形下的輻射原理的数学的說法。在二維空間，完全相类似地，这些条件具有形式

(256) $$v=O(r^{-\frac{1}{2}});$$

(257) $$\frac{\partial v}{\partial r}+ikv=o(r^{-\frac{1}{2}})。$$

滿足輻射原理的基本解，在三維情形下为解：

(258) $$v(P)=\frac{e^{-ikr}}{r},$$

式中 r 是从某一定点到动点 P 的距离。对解 (258) 关于 r 微分，我們能斷言，它能滿足比条件(255)更强的条件，即在右端可以用 $O(r^{-2})$ 来代替 $o(r^{-1})$。这时，我們在公式(255)中，假定距离是从同一点 O 算起的。現在驗証公式(254) 与 (255)，但假設距离是从另一点 O_1 算起的，并記 $O_1P=\rho$。ρv 的有界性直接可从 $\rho : r\to 1$ 而推出。公式(255)的驗证可以簡單地由于对解(258)借助于 r 关于 ρ 的微分而得到。这时，我們有：

$$\frac{\partial r}{\partial \rho}=\cos\gamma,$$

式中 γ 是方向 r 与 ρ 的交角。应用对三角形 OO_1P 的边長 OO_1 平方的公式，我們得到：

(259) $$\cos\gamma=1+O(r^{-2})。$$

在平面的情形，滿足輻射原理的基本解是解 $H_0^{(2)}(kr)$，于此 $H_0^{(2)}(z)$ 是第二汉克尔函数。为了驗証它，只須利用汉克尔函数的漸近表示式与公式

(260) $$\frac{d}{dz}H_0^{(2)}(z)=-H_1^{(2)}(z)$$

就够了。这时条件(257)在較强的形式下得到滿足，即在右边將有

$O(r^{-\frac{3}{2}})$ 来代替 $o(r^{-\frac{1}{2}})$。我們把这一解 $H_0^{(2)}(kr)$ 乘以如此的常数因子，使得在 $r=0$ 时，解的奇异性归結为 $\lg\frac{1}{r}$。因而我們得到解：

(261) $$v=\frac{\pi}{2i}H_0^{(2)}(kr)。$$

如同从前一样，可以証明，解

(262) $$H_m^{(2)}(kr)\cos m\varphi;\quad H_m^{(2)}(kr)\sin m\varphi \quad (m=1, 2, 3, \cdots)$$

也滿足輻射原理。

229. 唯一性定理 在輻射原理成立时，可以証明唯一性定理，就是：如果函数 v 在某一閉迴道 l 之外滿足方程(252)，在無穷远处滿足輻射原理，在 l 上滿足齐次边值条件，例如条件 $v|_l=0$ 或 $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_l=0$，那末它就恒等于零。

应用公式

(263) $$\iint_{B_1}(u_1\Delta u_2-u_2\Delta u_1)\,dS=\int_\lambda\left(u_1\frac{\partial u_2}{\partial n}-u_2\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)ds,$$

到区域 B_1，迴道 l 是它的內边界，以某一定点为中心，适当大的半徑的圓周 S_r 是它的外边界，并置 $u_1=v$，$u_2=\bar{v}$，于此 $\bar{v}$ 是 v 的共軛复数。假設 v 直到 l 連續且有正常法綫导数。由于(252)二重积分会等于零，由于边值条件，沿 l 的积分也要等于零。所余下来的只有沿 S_r 的积分，而在这一迴道上，方向 n 重合于方向 r。条件(257)使我們可以置

$$\frac{\partial v}{\partial r}=-ikv+o(r^{-\frac{1}{2}});\quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial r}=ik\bar{v}+o(r^{-\frac{1}{2}}),$$

因而我們引出等式：

$$2ik\int_{S_r}|v|^2ds+\int_{S_r}v\cdot o(r^{-\frac{1}{2}})\,ds+\int_{S_r}\bar{v}\cdot o(r^{-\frac{1}{2}})\,ds=0。$$

因为 $\sqrt{r}\,v$ 与 $\sqrt{r}\,\bar{v}$ 当 $r\to\infty$ 时都有界，所以最后兩項趋向

于零，而在圓周 S_r 上引进極坐标的輻角 φ，我們有：

$$\int_0^{2\pi} |\sqrt{r}\, v|^2 d\varphi \to 0。\tag{264}$$

現把格林公式用到解 v 及 (262) 的第一个解。二重积分仍旧可以消去，而余下沿 l 与沿 S_r 的积分，因而沿 S_r 的积分与 r 無关。所取的兩組解都滿足輻射原理，并且解 (262) 如同解 $H_0^{(2)}(kr)$ 一样，以較强的形式滿足条件 (257)。如前，我們利用条件 (257)，就会得到沿 S_r 的积分趋向于零，而因为它的数值与 r 無关，所以它就單純地等于零，此即：

$$H_m^{(2)}(kr)\int_{S_r}\frac{\partial v}{\partial r}\cos m\varphi\, d\varphi - \frac{dH_m^{(2)}(kr)}{dr}\int_{S_r} v\cos m\varphi\, d\varphi = 0。$$

如果置

$$f_m(r) = \int_{S_r} v\cos m\varphi\, d\varphi,$$

那末这就給出：

$$H_m^{(2)}(kr) f_m'(r) = \frac{dH_m^{(2)}(kr)}{dr} f_m(r),$$

从此 $f_m(r) = c_m H_m^{(2)}(kr)$，于此 c_m 是常数。

完全类似地对

$$g_m(r) = \int_{S_r} v\sin m\varphi\, d\varphi$$

可以得出表达式 $g_m(r) = d_m H_m^{(2)}(kr)$，于此 d_m 也是常数。封閉性方程 [3] 及公式 (264) 指出，当 m 固定而 $r\to\infty$ 时，

$$c_m\sqrt{r}\, H_m^{(2)}(kr) \text{ 与 } d_m\sqrt{r}\, H_m^{(2)}(kr) \to 0。$$

但由 $H_m^{(2)}(kr)$ 的漸近表示推出 $\sqrt{r}\, H_m^{(2)}(kr)$ 的模当 r 很大时，保持大于某一正常数，从此就推出 $c_m = d_m = 0$，即 $f_m(r) = g_m(r) = 0$，从此得出，由于封閉性方程，在圓周 S_r 上 v 等于零。

如果 l 为圓周，那末只要取 S_r 为与 l 同心的圓，我們就得到 v 在 l 之外恒等于零，这就是所要証明的。在一般的迴道的情形，

上面的論述指出，在無穷远点的鄰域中 v 化为零。在后文中 [231] 我們要証明，$v(x, y)$ 应該与拉普拉斯方程的解一样，为解析函数。而根据解析延拓的原理，由于 v 在無穷远点的鄰域为零，就推出在 l 之外 v 处处为零。在三維空間的唯一性定理，也可以用完全相类似的方法来証明。

230. 極限振幅原理 以前所表述的輻射原理与如下的事实紧密地相联系：考察方程 (252) 的区域包含了無穷远点为內点。在 A. H. 吉洪諾夫 (Тихонов) 与 A. A. 薩馬尔斯基 (Самарский) 的論文"論輻射原理"("О принципе излучения" Журнал экспериментальной и теоретической физики, вып. 2, 1948) 表述了一般的輻射原理，它可以应用到各种类型的無界区域。所提到的一般的輻射原理归結为：方程

$$\Delta v + k^2 v = -F(P)$$

的解应当为乘积 $u(P; t)e^{-i\omega t}$ 当 $t\to\infty$ 时的極限，于此 $u(P, t)$ 为方程

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -F(P) e^{i\omega t} \quad \left(k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}\right)$$

的滿足齐次初始条件

$$u|_{t=0} = 0; \quad u_t|_{t=0} = 0$$

的解。在以上提到的那篇論文中指出，在無界的空間的情形，所表述的輻射原理——它可以称为極限振幅原理——可与[228] 中所表述的原理引导到方程 (252) 的同样的解，这就是由公式

$$v(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{e^{-ikr}}{r} F(Q) d\tau \quad (r = |PQ|)$$

所确定的解。并且假設，在有限区域 D 之外，$F(Q)$ 等于零。

在 A. Г. 斯維什尼可夫 (Свешников) 的著作"輻射原理"("Принцип излучения" Доклады Академии Наук СССР, 1950, т. 73, № 5)。考察在三維空間中由平面 $z=0$ 与 $z=l$ 所圍成的区域中的对函数 $u(P; t)$ 的方程，其初始条件与边值条件为齐次的，而証明極限 $v(P) = \lim\limits_{t\to\infty} u(P; t) e^{-i\omega t}$ 是存在的，且 $v(P)$ 滿足方程 (252)。

其次，确立了如下的事实，如果 $v(P)$ 滿足条件：

$$v_m = O(\rho^{-\frac{1}{2}})$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial \rho} + ik_m v_m = o(\rho^{-\frac{1}{2}}),$$

于此

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \quad 及 \quad k_m=k\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{lk}\right)^2 m^2}。$$

那末在当 $z=0$ 与 $z=l$ 时，$v=0$ 的条件之下方程(252)只有零解。在以上指出的条件中数 m 取值从 $m=1$ 到 $\frac{lk}{\pi}$ 的整数部分。利用極限振幅原理所区分出来的解满足所示的輻射原理。在所引用的 A. Г. 斯維什尼可夫的論文中也考察所謂極限吸收原理，依据它要求出方程

$$\Delta v+k_1^2 v=0$$

的解在 $\varepsilon\to 0$ 时的極限，于此 $k_1^2=k^2+\varepsilon i \ (\varepsilon>0)$。

231. 赫姆荷茲方程的边值問題　方程 (252) 的解 (258) 在 $r=0$ 时有極性 $\frac{1}{r}$，这就給出对方程 (252) 来作势函数理論的可能性，这理論完全类似于对拉普拉斯方程的牛頓势函数理論。用 r 来記曲面 S 上的变点 N 与点 P 的距离，在三維的情形我們有如下的單層势函数与双層势函数的类似：

$$\text{(265)} \quad \begin{cases} v(P)=\iint\limits_S \mu(N)\dfrac{e^{-ikr}}{r}dS \\ w(P)=\iint\limits_S \mu(N)\dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{e^{-ikr}}{r}\right)dS, \end{cases}$$

式中 n 是 S 在变点 N 的外法綫方向。如果在核中取出極性的項 $\frac{1}{r}$，我們就得到普通的势函数，当 P 趋向于曲面时，它們的極限情况由 [193] 与 [195] 的公式所表明。在所余下的积分的核中，在 $r=0$ 时已經沒有奇异性，就可以在积分号下取極限。因而，我們得到与[193]与[195]中的公式完全类似的公式：

$$\text{(266)} \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial v(N_0)}{\partial n_0}\right)_i &= 2\pi\mu(N_0)+\iint\limits_S \mu(N)\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right)dS \\ & \qquad\qquad (r_0=|NN_0|) \\ \left(\frac{\partial v(N_0)}{\partial n_0}\right)_e &= -2\pi\mu(N_0)+\iint\limits_S \mu(N)\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right)dS \end{aligned}$$

与

$$(267)\quad \begin{aligned} w_i(N_0) &= 2\pi\mu(N_0) + \iint_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right) dS \\ w_e(N_0) &= -2\pi\mu(N_0) + \iint_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right) dS, \end{aligned}$$

于此在 (266) 中积分的核乃是沿在点 N_0 的法綫方向 n_0 的导数值，在 (267) 中积分中的核是沿当点 P 合于 N_0 时点 N 的法綫方向 n。

在平面的情形，我們有單層势函数与双層势函数：

$$(268)\quad \begin{aligned} v(P) &= \int_l \mu(N) \frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(kr)\, ds \\ w(P) &= \int_l \mu(N) \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(kr)\right] ds, \end{aligned}$$

对于它們也成立完全与公式(266)，(267)相类似的一些公式，并且右边的因子 2π 必須改为 π。所写出的势函数满足方程(252)，而由于核的特殊选定，所写出的积分的每个元素滿足輻射原理，因而也就是这些积分本身都滿足輻射原理。

引入核

$$K(N_0, N; k) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right) = -\frac{e^{-ikr_0}(ikr_0+1)}{2\pi r_0^2}\cos\varphi,$$

式中 φ 为方向 n 与方向 $\overline{N_0N}$ 的交角。它的轉置核为：

$$K(N, N_0; k) = \frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right) = \frac{e^{-ikr_0}(ikr_0+1)}{2\pi r_0}\cos\psi,$$

式中 ψ 为点 N_0 的法綫方向 n_0 与方向 $\overline{N_0N}$ 的交角。完全如同对待拉普拉斯方程一样，可以提出狄义赫利問題与諾伊曼問題。

狄义赫利内部問題是在于寻求在迴道 l 内的方程(252)的解，它在 S 上滿足边值条件：

$$u|_S = f(N_0)。$$

外部問題也可以作类似的表述，并且在無穷远处应满足輻射原理。在諾伊曼問題的情形，我們有边値条件：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=f(N_0)。$$

从唯一性定理 [**229**] 推出，外部問題只値有一个解。对內部問題，并非对所有的 k 都成立唯一性。

如果在 l 內存在方程(252)的解(非平凡的——譯者)，在 l 上满足齐次条件：$u|_S=0$，那末称数 k^2 为狄义赫利內部問題的特征値。对諾伊曼內部問題，也可同样地定义特征値。

如果我們用双層势函数的方式来求狄义赫利外部問題的解，以單層势函数的方式来求諾伊曼內部問題的解，那末我們引导到联系的积分方程：

$$\mu(N_0)+\iint_S \mu(N)K(N_0,\ N;\ k)dS=-\frac{1}{2\pi}f(N_0) \tag{269}$$

$$\mu(N_0)+\iint_S \mu(N)K(N,\ N_0;\ k)dS=-\frac{1}{2\pi}f(N_0), \tag{270}$$

式中 N_0 是 S 的变点。設 k^2 不是諾伊曼內部問題的特征値，我們証明，这时，齐次方程 (269) 仅有零解。我們用反証法来証明。設它有非零解，这时齐次方程 (270) 应該有不等于零的解 $\mu_0(N)$。作起以 $\mu_0(N)$ 为密度的單層势函数，我們就得到具有齐次边値条件 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_l=0$ 的方程 (252) 的解。但因为 k^2 并非諾伊曼內部問題的特征値，所以这个解应当在 l 之內等于零。由于連續性，所說的單層势函数应在 l 上等于零，因而，据唯一性定理，它应当在 l 外也等于零。 值时，由于与(54)相类似的公式，$\mu_0(N)$ 应当恒等于零。所得到的矛盾証明了，如果 k^2 并非諾伊曼內部問題的特征値，那末齐次方程 (269) 只有零解，因而对任意的 $f(N_0)$，非齐次方程是可解的，即，对任意的 $f(N_0)$，狄义赫利外部問題有具双層

势函数形式的解。完全类似地，如果 k^2 并非狄义赫利内部問題的特征值，那末諾伊曼外部問題有具單層势函数形式的解。

在不久以前出版的 В. Д. 科布拉齐 (Купрадзе) 的書"振动理論的边值問題与积分方程"("Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения") 中，詳細地叙述了作者在电动力学，彈性理論的駐波体系方面的研究，特別是繞射方面的研究，我們在下一段要講到它。在所提到的这本書中，也考察 k^2 是狄义赫利内部問題或諾伊曼内部問題的特征值的情形，并指出，如何在这些情形下作外部問題的解。

現証明，方程 (252) 的每个在某一区域 D 内具連續二阶导数的解 $v(P)$ 是坐标的解析函数。为此，只要証明 $v(P)$ 在以 D 内任意点 P_0 为中心的某一球 S_0 内为解析就可以了。

要設法把 S_0 内的 $v(P)$ 表示为双層势函数(265)的形式。为求这一势函数的密度，我們引来积分方程：

$$\mu(N_0)=\frac{1}{2\pi}f(N_0)-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_0}\mu(N)\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right)dS, \tag{271}$$

这里 $f(N)$ 是 $v(P)$ 在球 S_0 上的数值。这个球可以取得充分小使得方程

$$\mu(N_0)=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_0}\mu(N)\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right)dS \tag{272}$$

只有零解。現証明这一点。設 λ_1 是方程 $\Delta u+\lambda u=0$ 在边值条件 $u|_{S_0}=0$ 下的第一个特征值，这里的 S_0 是以 1 为半徑的球。施行相似变换，不难置信，对以 R 为半徑的球，它的第一个特征值等于 $\frac{\lambda_1}{R}$，而数 R 可以取得相当小，使得 $\frac{\lambda_1}{R}$ 大于数 k^2。这时方程 $\Delta u+$ $+k^2u=0$ 的狄义赫利内部問題的具齐次边值条件的解仅是零解。积分方程(272)是对双層势函数密度的方程，它給出我們剛才所說的齐次狄义赫利内部問題的解。注意到这个問題仅有零解，进行

与 [207] 中完全相同的論述，我們就会得到，对以 R 为半徑的球，方程 (272) 只有零解。在 R 的这样的选擇下，我們可以断言方程 (271) 的解的存在性，且有

$$v(P)=\iint_{S_0}\mu(N)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dS \quad (P \text{ 在 } S_0 \text{ 内}; \ r=|PN|)$$

或 [II; 197]

$$(273) \quad v(P)=-\iint_{S_0}\mu(N)\frac{e^{-ikr}(ikr+1)}{r^2}\cdot\frac{R^2+r^2-\rho^2}{2Rr}dS,$$

式中 R 为 S_0 的半徑，$\rho=|P_0P|$。被积函数是在 S_0 内部的点 P 的坐标 (x, y, z) 的解析函数，而从 (273) 就推出 $v(P)$ 是 (x, y, z) 的解析函数[見 159]。在平面的情形，借助于对应的奇解（我們在下面要討論它）可以类似地进行証明。

如同对拉普拉斯方程的作法完全一样，我們可以对方程 (252) 作格林函数。在三維的情形，这个方程的基本奇解可以写为 $\frac{\cos kr}{r}$ 的形狀。对应于条件

$$(274) \qquad v|_S=0$$

的格林函数可以求为如下的形式：

$$(275) \quad G_1(P, Q; k^2)=\frac{\cos kr}{4\pi r}+g_1(P, Q; k^2) \quad (r=|PQ|).$$

式中 $g_1(P, Q; k^2)$ 在 D 内满足方程 (252)，在 S 上满足边值条件

$$(276) \qquad g_1(P, Q; k^2)\Big|_S=-\frac{\cos kr}{4\pi r}\Big|_S.$$

如果 k^2 并非方程 (252) 在边值条件 (274) 下的特征值，那末我們就可以作出这样的函数。

在平面的情形，方程 (252) 的只与距离 $r=|PQ|$ 有关的解具有形狀 $Z_0(kr)$，于此 $Z_0(z)$ 是零阶的貝塞尔方程的任意的解

$$(277) \qquad Z_0''(z)+\frac{1}{z}Z_0'(z)+Z_0(z)=0.$$

我們取諾伊曼函数 [III; 214]

$$N_0(z)=\frac{2}{\pi}J_0(z)\left(\lg\frac{z}{2}+C\right)-\\-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\cdots+1\right) \tag{278}$$

作为这方程的一解。

在 Q 点有極性 $\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{r}$ 的基本奇解就是

$$-\frac{1}{4}N_0(kr)。 \tag{279}$$

从(278)推出,除去帶有極性的項外,在函数(279)的表达式中还有包含 $\lg r$ 的形狀为 $r^{2n}\lg r\,(n=1,\,2,\,\cdots)$ 的項。当 $r\to 0$ 时这些項趋向于零。由直接微分,不难置信,它們的关于坐标的一阶导数也趋向于零,而函数(279)在点 Q 有一阶連續导数。設 k 并非方程(252)在边値条件(274)下的特征値。对于这样的 k 就不难作起方程(252)的格林函数 $G_1(P,\,Q;\,k^2)$。

要求出具下述形狀的格林函数

$$G_1(P,\,Q;\,k^2)=-\frac{1}{4}N_0(kr)+g_1(P,\,Q;\,k^2)。 \tag{280}$$

因为右边第一項滿足方程,且有所要求的極性。問題化到决定項 $g_1(P,\,Q;\,k^2)$,使得它沒有極性,而滿足方程(252),在迴道 l 上滿足如下的非齐次边値条件:

$$g_1|_l=\frac{1}{4}N_0(kr)。$$

我們注意到 k 并非特征値,我們就得到滿足这些条件的函数 g_1 的唯一的确定。

重新回到三維的情形,还指出一个与方程(252)相联系的公式。設 $v_0(r)$ 是这一方程的任一奇解,有極性 $\frac{1}{r}$,并設 $v(P)$ 是在 D_i 中直到 S 有連續到二阶的导数的任一函数。进行与[II;193]中

相同的論述，就得到公式：

$$v(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[v_0(r)\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial v_0(r)}{\partial n}\right]dS-\frac{1}{4\pi}\iiint_{D_\epsilon}\frac{\Delta v+k^2v}{r}d\tau,$$

这里 P 在 D 内而 r 是 P 到积分变点的距离。如果 v 满足方程(252)，則三重积分等于零。应用所得公式于 S 为以 R 为半徑的球，P 为它的中心的情形，选擇 $v_0(r)$ 使得 $v_0(R)=0$：

$$v_0(r)=\frac{\cos kr}{r}-\operatorname{cotg}kR\frac{\sin kr}{r}。$$

結果我們得到：

$$\frac{\sin kR}{kR}v(P)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S vdS,$$

在右边是 v 沿 S 的平均。这一公式推广了調和函数的平均性質。

232．电磁波的繞射 在具介电常数 ε 与导电常数 σ 的物体中进行的正弦型的电磁波的繞射現象归結为更复杂的問題。我們考慮平面的情形。設 l 为物体的迴道，这就是說在 l 之外就是眞空。用 B_i 与 B_e 記平面在 l 之内与在 l 之外的部分。問題可以数学地归結为求函数 $E(x, y)$，使満足方程

(281) $\qquad \Delta E+k_i^2E=0$ （在 B_i 内）； $\Delta E+k_e^2E=0$ （在 B_e 内），

于此 $\qquad k_i^2=\frac{\omega^2\varepsilon-\omega\sigma i}{c}; \qquad k_e^2=\frac{\omega^2}{c};$

ω 是波进行的頻率，c 是光在眞空中的速度。在 B_i 中函数 E 乃是由于进行着的扰动 $A(x, y)e^{i\omega t}$ 而产生的电場强度向量在 Z 軸方向的分量，在 B_e 中，E 是进行着的波 A 与从迴道的繞射結果所得到的波的和，这就是說，差式 $(E-A)$ 应満足輻射原理。已給的函数 A 应当在全平面満足方程：

(282) $$\Delta A+k_e^2A=0。$$

边値条件为 E 与 $\frac{\partial E}{\partial n}$ 越过迴道时的連續性。

对区域 B_i 及函数 $E(Q)$ 与

(283) $$G(P; Q)=\frac{\pi}{2i}H_0^{(2)}(k_e r) \quad (r=|PQ|)$$

应用格林公式，而假設 P 在 B_i 内部。这时我們用一小圓 γ 把 P 划出，把所余下来的区域記为 B_i'：

$$\iint\limits_{B_i}(E\Delta G-G\Delta E)dS=\int_l\left(E\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial E}{\partial n}\right)ds+\int_\gamma\left(E\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial E}{\partial n}\right)ds$$

(281)中的第一个方程及对函数(283)的类似方程給出：

$$E\Delta G-G\Delta E=(k_e^2-k_i^2)G(P;Q)E(Q)。$$

注意到，$G(P;Q)$ 在 $r=0$ 时有一極性 $\lg\frac{1}{r}$，并且無限地压縮圓周 γ，我們就得到[見 II; 186]：

$$(284_1)\quad 2\pi E(P)=(k_i^2-k_e^2)\iint\limits_{B_i}G(P;Q)E(Q)dS+\int_l\left(E\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial E}{\partial n}\right)ds。$$

設 S_ρ 为以原点为中心、充分大的 ρ 为半徑的圓周，B_e' 为 B_e 在 S_ρ 中的部分。对 B_e' 应用格林公式并假設 P 在 B_i 內部，我們就得到：

$$(284_2)\qquad 0=\int_{S_\rho}\left(E\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial E}{\partial n}\right)ds+\int_l\left(E\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial E}{\partial n}\right)ds。$$

現設 P 在 B_e 中而对 B_i 应用格林公式，就得到：

$$(284_3)\quad 0=(k_i^2-k_e^2)\iint\limits_{B_i}G(P;Q)E(Q)dS+\int_l\left(E\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial E}{\partial n}\right)ds。$$

最后，設 P 在 B_e 中而对 B_e' 应用格林公式，就得到：

$$(284_4)\quad 2\pi E(P)=\int_l\left(E\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial E}{\partial n}\right)ds+\int_{S_\rho}\left(E\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial E}{\partial n}\right)ds。$$

在公式(284_1)与(284_2)中迴道 l 的外法綫方向是相反的。在公式(284_3)与(284_4)中也成立同样的事实。把(284_1)与(284_2)相加，也把(284_3)与(284_4)相加，我們注意到 E 与 $\frac{\partial E}{\partial n}$ 越过迴道 l 时的連續性，我們得到当 P 在 B_i 中或在 B_e 中时的統一的方程

$$(285)\quad 2\pi E(P)=(k_i^2-k_e^2)\iint\limits_{B_i}G(P;Q)E(Q)dS+\int_{S_\rho}\left(E\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial E}{\partial n}\right)ds$$

而所余下来的就是令 $\rho\to\infty$ 时的極限的过程。对由圓周 S_ρ 所圍成的圓，对函数 A 与 G 应用格林公式，并設 P 在 S_ρ 內，我們就得到：

$$2\pi A(P)=\int_{S_\rho}\left(A\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial A}{\partial n}\right)ds,$$

而因此，在公式(285)中的曲綫積分就等于如下的表达式：

$$(286)\qquad 2\pi A(P)+\int_{S_\rho}\left\{[E(Q)-A(Q)]\frac{\partial G(P;Q)}{\partial n}-\right.$$
$$\left.-G(P;Q)\frac{\partial}{\partial n}[E(Q)-A(Q)]\right\}ds。$$

利用差式$(E-A)$应当满足輻射原理这一事实，我們在下一段的末尾將証明，所写的积分趋向于零，而公式(285)給出：

$$E(P)=\frac{k_i^2-k_e^2}{2\pi}\iint\limits_{B_i}G(P;Q)E(Q)dS+A(P)。 \tag{287}$$

如果假設 P 在 B_i 內，那末所写出的方程就是普通的积分方程。从其中决定 $E(P)$，此时 P 在 B_i 內，把所得到的解代到(287)的右边，就得到当 P 屬于 B_e 时，$E(P)$ 的显式表示。我們在問題存在解的假設下得到方程(287)。严格地說，必須对方程(287)进行研究，并且証明，当 P 在 B_i 时它有解，而这个解就是所提出的繞射問題的解。这些是在下一节末尾所指出的論文中完成的。还指出，方程(287)中的积分并非沿 l 所作而是沿整个区域 B_i 所作。

233. 磁場强度向量　为了决定磁場强度向量 $H(x, y)$，我們有同样的方程与同样的条件，而只有一点变动。我們应当以 $\frac{1}{k}\frac{\partial H}{\partial n}$ 的連續性代替 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 的連續性，这里在 B_i 中 $k=k_i$，在 B_e 中 $k=k_e$。此外，差式$(H-B)$，应当满足輻射原理，于此 $B(x, y)$ 是满足方程(282)的已給函数。我們仍然有方程(284)。由于注意到 $\frac{1}{k}\frac{\partial H}{\partial n}$ 的連續性的要求，把(284_1)乘以 $\frac{1}{k_i^2}$，把(284_2)乘以 $\frac{1}{k_e^2}$ 相加。对(284_3)与(284_4)也进行同样的手續。然后，如前地过渡到極限，就有：

$$\frac{H(P)}{k_i^2}=\frac{k_i^2-k_e^2}{2\pi k_i^2}\iint\limits_{B_i}G(P;Q)H(Q)dS+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{k_i^2}-\frac{1}{k_e^2}\right)\int_l H(Q)\frac{\partial G(P;Q)}{\partial n}ds+\frac{B(P)}{k_e^2}\quad (P\text{ 在 }B_i)$$

$$\frac{H(P)}{k_e^2}=\frac{k_i^2-k_e^2}{2\pi k_i^2}\iint\limits_{B_i}G(P;Q)H(Q)dS+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{k_i^2}-\frac{1}{k_e^2}\right)\int_l H(Q)\frac{\partial G(P;Q)}{\partial n}ds+\frac{B(P)}{k_e^2}\quad (P\text{ 在 }B_e)。$$

由于函数 $G(P;Q)$ 当 P 重合于 Q 时有極性，当 P 趋向于迴道时，所写出的曲綫积分的性态与双層势函数相同，因而当 P 在迴道上，我們就得到：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_i^2}+\frac{1}{k_e^2}\right)H(P)=\cdots,$$

此时，右边是与前面的方程一样的。我們可以把前面的三个方程写成一个公式的形式：

$$\frac{1}{k^2}H(P)=\frac{k_i^2-k_e^2}{2\pi k_i^2}\iint G(P;Q)H(Q)dS+ \tag{288}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{k_i^2}-\frac{1}{k_e^2}\right)\int_l H(Q)\frac{\partial G(P;Q)}{\partial n}ds+\frac{B(P)}{k_e^2},$$

式中当 P 在 B_i 內时 $k^2=k_i^2$；当 P 在 B_e 內时 $k^2=k_e^2$；而当 P 在 l 上时 $\frac{1}{k^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_i^2}+\frac{1}{k_e^2}\right)$。

如果 P 在閉区域 B_i 中，那末(288)是一个帶权的积分方程[49]，对于它普通的弗列德和霍定理都是适用的。可以証明它有一个确定的解并且这解給出所提的繞射問題的解。我們指出，如果我們已經解出上面所說的积分方程，这就是已經知道在閉区域 B_i 中的 $H(Q)$，那末公式(288)給出在 B_e 中的 $H(P)$。

現在証明在表示式(286)中的积分当 $\rho\to\infty$ 时趋向于零。由于 $H_0^{(2)}(z)$ 与$H_1^{(2)}(z)$的漸近表示式，我們有

$$\frac{\partial G(P;Q)}{\partial r}=-ik_eG(P;Q)+O(r^{-\frac{3}{2}})\quad(r=|PQ|)。$$

在下面，我們假設 P 为固定而 Q 在 S_ρ 上。我們有：

$$\frac{\partial G(P;Q)}{\partial\rho}=\frac{\partial G}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial\rho}=\frac{\partial G}{\partial r}\cos\gamma$$

这里对 $\cos\gamma$ 我們有表达式(259)。

其次，成立明显的等式：

$$O(r^a)=O(\rho^a),$$

而因此

$$\frac{\partial G(P;Q)}{\partial\rho}=-ik_eG(P;Q)+O(\rho^{-\frac{3}{2}})。$$

在表示式(286)中的积分可以表示为形式：

$$J=\int_{S_\rho}\{(E-A)[-ik_eG+O(\rho^{-\frac{3}{2}})]-G[-ik_e(E-A)+o(r^{-\frac{1}{2}})]\}ds,$$

或

$$J=\int_{S_\rho}[(E-A)\cdot O(\rho^{-\frac{3}{2}})+G\cdot o(\rho^{-\frac{1}{2}})]ds=\int_{S_\rho}[o(r^{-1})+o(r^{-1})]ds,$$

从此就直接推出 $J\to 0$。可以在下列論文中找到关于繞射問題的研究。

1. В. Д. 科布拉齐，振动理論的边值問題与积分方程。

2. 斯端堡(Sternberg)，积分方程在光的电磁理論中的应用(Anwendung der Integralgleichungen in der elektromagnetishen Lichttheorie, Compositio Matematica; vol. 3, f. 2, 1936)。

3. 福洛依邓太(Freudental)，論光的电磁理論中的繞射(Uber Beu-

gungsprobleme der elektromagnetischen Lichttheorie, Compositio Matematica, vol. 6, f. 2, 1938)。

234. 椭圓型方程狄义赫利問題解的唯一性 考察兩个自变量的綫性椭圓型方程

$$(289)\qquad L(u)=\sum_{i,k=1}^{2}a_{ik}(x_1,x_2)u_{x_ix_k}+a_1(x_1,x_2)u_{x_1}+$$

$$+a_2(x_1,x_2)u_{x_2}+b(x_1,x_2)u=f(x_1,x_2)\quad (a_{ik}=a_{ki})。$$

所有的系数都假設为在 (x_1, x_2) 平面的閉区域 $\overline{B}$ 为連續，由于方程是椭圓型的，变量 ξ_1, ξ_2 的二次形式

$$(290)\qquad \sum_{i,k=1}^{2}a_{ik}(x_1,x_2)\xi_i\xi_k$$

在整个区域 $\overline{B}$ 应是定号的。可以假定它是正定的。对方程(289)的狄义赫利問題是：求該方程的一解，使它在 B 中有到二阶的連續导数，在閉区域 $\overline{B}$ 中連續，在区域 B 的迴道 l 上取已給的数值。这个問題的解的唯一性的証明归結为証明如下事实：齐次方程

$$(291)\qquad L(u)=0$$

的具齐次边值条件

$$(292)\qquad u|_l=0$$

的解在 B 中恒等于零。在証明这一論断时，系数 $b(x_1, x_2)$ 的符号起重大的作用。不难举出例子，方程(291)与边值条件(292)有非零解。可以举出一个初等的这样的例子：在正方形 $0\leqslant x_1\leqslant\pi$；$0\leqslant x_2\leqslant\pi$ 中的方程

$$(291_1)\qquad u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+2k^2u=0。$$

不难証明，如果 k 为非零整数，那末齐次問題(291)，(292)有解：

$$u=\sin kx_1\sin kx_2。$$

还应提醒，在条件(292)下，方程(291_1)有無限个特征值。在唯一性的証明中我們假設系数 $b(x_1, x_2)$ 在 B 內不取正值。首先假設，在 B 中

$$b(x_1, x_2)<0。\tag{293}$$

如果問題(291)(292)有非零解，那末这个解在 B 内或者有正的最大值，或者有負的最小值，或者二者兼而有之。如果必要的話，我們改变解的符号，就可假設，这个解达到正的最大值，因而在 B 内某点 P_0 为極大。在这点应有：$u_{x_1}(P_0)=u_{x_2}(P_0)=0$，而方程(289)在这点給出：

$$\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(P_0)u_{x_ix_k}(P_0)+b(P_0)u(P_0)=0。\tag{294}$$

函数在点 P_0 为有極大的条件給出：

$$u_{x_1x_1}\leqslant 0;\quad u_{x_2x_2}\leqslant 0;\quad u_{x_1x_1}u_{x_2x_2}-u^2_{x_1x_2}\geqslant 0,\tag{295}$$

这里，我們未写出变点 P_0。

这一条件等价于二次型

$$\sum_{i,k=1}^{2} u_{x_ix_k}(P_0)\xi_i\xi_k\tag{296}$$

不采取正值。在方程(294)左边的和式可以写为

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\sum_{k=1}^{2} a_{ik}(P_0)u_{x_ix_k}(P_0)\right]\tag{297}$$

的形狀，从此可見，这个和式是矩陣 $a_{ik}(P_0)$ 与 $u_{x_ix_k}(P_0)$ 的乘积的迹。它不因为轉变为相似矩陣而改变[**III**$_1$; **27**]。利用相似变換，使得矩陣 $a_{ik}(P_0)$ 与 $u_{x_ix_k}(P_0)$ 同时化为平方和[**III**$_2$; **37**]：

$$k_1\xi_1^2+k_2\xi_2^2;\quad l_1\xi_1^2+l_2\xi_2^2,$$

并且 $k_1>0$, $k_2>0$, $l_1\leqslant 0$, $l_2\leqslant 0$。和式(297)將有形式 $k_1l_1+k_2l_2$，从此显見

$$\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(P_0)u_{x_ix_k}(P_0)\leqslant 0。$$

注意到(294)，我們有 $b(P_0)u(P_0)\geqslant 0$，由于(293)及条件 $u(P_0)>0$，这是不可能的。因而齐次問題(291)，(292)只有零解。

現証，可以用条件在 B 内 $b(x_1, x_2)\leqslant 0$ 以代替条件(293)。引入新的函数 $v(P)$：

(298) $$u(P)=(\alpha-e^{-\beta x_1})v(P)$$

以代替 $u(P)$，这里 α, β 都是常数。对 $v(P)$，我們得到如下形狀的方程：

(299) $$\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}v_{x_ix_k}+c_1v_{x_1}+c_2v_{x_2}+dv=0,$$

式中

$$d=b+\beta e^{-\beta x_1}\cdot\frac{a_1-a_{11}\beta}{\alpha-e^{-\beta x_1}}\quad(a_{11}>0),$$

而可以选擇适当大的正数 α 与 β，使得 $\alpha-e^{-\beta x_1}>A$，于此 A 为正数而 $d<0$。

条件(292)等价于

(300) $$v|_l=0。$$

对 v 齐次問題(299)和(300)都只有零解，而由于(298)，就可斷言，問題(291)和(292)也都只有零解。因而，在条件 $b(x_1, x_2)\leqslant 0$ 下，在 B 内的問題(291)和(292)只有零解。

这个結果可以直接地推到任意个自变量的情形：

(301) $$L(u)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{x_ix_k}+\sum_{i=1}^{n} a_iu_{x_i}+bu=0$$

(302) $$u|_S=0,$$

这里 S 是空間$(x_1, \cdots, x_n)$的区域 D 的边界。二次型

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k$$

为正定，而在函数 u 的極大点，二次型

$$\sum_{i,k=1}^{n} u_{x_ix_k}\xi_i\xi_k$$

不能取正値[見 I;165]。如前，从此就推出：在所提到的極大点

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{x_ix_k}\leqslant 0$$

而証明就可以完全如前一样地进行。

235. 方程 $\Delta v-\lambda v=0$ 考察方程

(303) $$\Delta v-\lambda v=0,$$

于此 λ 是一正数，我們提出狄义赫利內部問題，其边值条件为

(304) $$v|_S=f(N)。$$

在区域 D_i 內，方程(303)的解不能有正的極大，也不能有負的極小[233]，从此就推出所示的狄义赫利問題解的唯一性。

如果函数 $f(N)$ 滿足不等式 $-a\leqslant f(N)\leqslant b$，于此 a, b 是某些正数，那末狄义赫利問題的解在 D_i 內也应滿足同一不等式。

首先考察非齐次方程

(305) $$\Delta v-\lambda v=-\varphi(P) \quad (在\ D_i\ 內)$$

具齐次边值条件：

(306) $$v|_S=0$$

的情形。我們假設 $\varphi(P)$ 在閉区域 $\overline{D}_i$ 連續，在 D_i 內有連續的导数。問題(305)，(306)等价于积分方程[見 **224**]：

(307) $$v(P)=-\lambda\iiint\limits_{D_i}G(P;Q)v(Q)d\tau+$$
$$+\iiint\limits_{D_i}G(P;Q)\varphi(Q)d\tau,$$

式中，$G(P;Q)$ 是拉普拉斯方程以(306)为边値条件的格林函数。因为 $(-\lambda)$ 是一負数，但核 $G(P;Q)$ 的所有特征值均为正，所以方程(307)对于任意的自由項有一个确定的解，它也就是問題(305)，(306)的解。

現轉到狄义赫利問題(303)与(304)。設 $w(P)$ 为拉普拉斯方程以(304)为边值条件的狄义赫利問題的解。函数

(308) $$u(P)=v(P)-w(P)$$

应当滿足方程

$$\Delta u-\lambda u=\lambda w$$

与边值条件 $$u|_S=0。$$
我們剛才証过这問題的解的存在性。知道了 $u(P)$，就可依据公式(308)求出狄义赫利問題的解 $v(P)$。

方程(303)的基本奇解是解

$$v_0(P)=\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{r}, \tag{309}$$

于此 r 是点 P 到某一定点 Q 的距离。以这个奇解为基础，也可以完全如同以前的作法一样[231]，建立勢函数理論，我們不討論这一方面而轉向于定义格林函数。

方程(303)在边值条件(306)下的格林函数 $G_1(P, Q; \lambda)$ 是在区域 D_i 內除点 Q 外直到 S 的点 P 的連續函数，在 D_i 內除点 Q 外有到二阶的連續的导数，在 D_i 內满足方程(303)，在 S 上满足边值条件(306)，并可写作

$$G_1(P, Q; \lambda)=\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{4\pi r}+g_1(P, Q; \lambda) \tag{310}$$

的形狀，这里 $g_1(P, Q; \lambda)$ 在 D_i 內到处有到二阶的連續导数。函数 $g_1(P, Q; \lambda)$ 是方程(303)以

$$g_1(P, Q; \lambda)|_S=-\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{4\pi r}\bigg|_S \tag{311}$$

为边值条件的狄义赫利問題的解。完全同[220]中的情况一样，可以証明 $g_1(P, Q; \lambda)$ 是点对 P, Q 的連續函数，而在 D_i 內成立不等式:

$$0<G_1(P, Q; \lambda)<\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{4\pi r} \quad (\text{在 } D_i \text{ 內}; \ r=|PQ|)。 \tag{312}$$

其次，也完全同[221]中一样，可以証明 $G_1(P, Q; \lambda)$的对称性。

在条件(306)下，方程(305)的解可用公式

$$v(P)=\iiint\limits_{D_i} G_1(P, Q; \lambda)\varphi(Q)d\tau \tag{313}$$

来表示。它的証明也与[224]中相同。积分

$$\iiint\limits_{D_i} g_1(P, Q; \lambda)\varphi(Q)d\tau$$

在 D_i 中满足齐次方程(303) [224]。含有奇性部分的积分可表示为形式：

$$\iiint\limits_{D_i}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{4\pi r}\varphi(Q)d\tau_Q=\iiint\limits_{D_i}\frac{\varphi(Q)}{4\pi r}d\tau+$$

$$+\iiint\limits_{D_i}\left(\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{4\pi r}-\frac{1}{4\pi r}\right)\varphi(Q)d\tau。$$

对第一项应用普阿松公式，而在第二项中因已把極性分出而能在积分号下兩次求导数。从此直接得出，应用算子 $(\Delta-\lambda)$ 到 (313) 会給出 $[-\varphi(P)]$。对函数(313)的边值条件(306)可以如在[224]中一样来驗証。

可从另一方法来引向格林函数的概念，这就是我們在 [172] 中的作法的类似。考察非齐次方程(305)，并假設，除掉以 Q 为中心和很小的半徑 ε 的球 D_ε 外，$\varphi(P)$ 处处化为零，并且

(314) $$\iiint\limits_{D_\varepsilon}\varphi(P)d\tau=1。$$

转向积分方程(307)，我們可以把它的解写为形式[8]：

(315) $$v(P)=\iiint\limits_{D_i} R(P, Q'; \lambda)\varphi(Q')d\tau_{Q'},$$

式中 $R(P, Q; \lambda)$ 是方程(307)的解核。考虑到 $\varphi(Q')$ 的定义，可以期望，当 ε 趋向于零时，(315)的左边趋向于 $R(P, Q; \lambda)$，所以

$$G_1(P, Q; \lambda)=R(P, Q; \lambda)$$

这就是，格林函数 $G_1(P, Q; \lambda)$ 是积分方程(307)的解核。

自然地，这就会引出下述关系：

(316) $$G_1(P, Q; \lambda)=G(P; Q)-\lambda\iiint\limits_{D_i} G(P; Q')G_1(Q', Q; \lambda)d\tau_Q,$$

它不难可在下述基础上証实：差式 $H(P, Q)=G_1(P, Q; \lambda)-G(P; Q)$ 满足方程 $\Delta H(P, Q)=\lambda G_1(P, Q; \lambda)$、边值条件(306)以及在点 Q 保持为連續。但我

們已有关于把解核依核的特征函数展开的級数表示形式 [30]，在所論情形下，它給出

$$G_1(P, Q;\lambda)=G(P;Q)-\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(P)v_k(Q)}{\lambda_k(\lambda_k+\lambda)},$$

式中 λ_k 与 $v_k(P)$ 是核 $G(P;Q)$ 的特征值与特征函数，卽方程(231)在条件(232)下的特征值与特征函数。与(316)相比較，就得出：

$$\iiint_{D_i} G(P;Q')G_1(Q', Q;\lambda)d\tau_{Q'}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(P)v_k(Q)}{\lambda_k(\lambda_k+\lambda)}。\tag{317}$$

上面所說的事实幷不是有严格的基础的。現在我們要进行对(317)式的証明，我們在后文中需要它。

首先讓我們記起，如 λ_k 为核 $G(P;Q)$ 的特征值，級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\tag{318}$$

收斂。

我們决定函数 $G_1(Q', Q;\lambda)$ 关于核 $G(P;Q)$ 的特征函数的富里埃系数：

$$h_k=\iiint_{D_i} G_1(Q', Q;\lambda)v_k(Q')d\tau_{Q'}。$$

用 $v_k(Q')=-\dfrac{\Delta v_k(Q')}{\lambda_k}$ 来代入，我們得到

$$\lambda_k h_k=-\iiint_{D_i} G_1(Q', Q;\lambda)\Delta v_k(Q')d\tau_{Q'}。$$

从最后兩个公式推出：

$$(\lambda_k+\lambda)h_k=-\iiint_{D_i} G_1(Q', Q;\lambda)[\Delta v_k(Q')-\lambda v_k(Q')]d\tau_{Q'}。\tag{319}$$

注意到格林函数的对称性及公式(313)給出方程(305)的满足条件(306)的解的事实，我們就可断言，公式(319)的右端等于 $v_k(Q)$。在現在情形下，

$$-[\Delta v_k(Q')-\lambda v_k(Q')]=(\lambda+\lambda_k)v_k(Q')$$

起公式(313)中的 $\varphi(Q)$ 的作用。这一函数在 D_i 内有連續的导数，

而且，如果把它取作方程(305)的右端，那末这一方程的满足条件(306)的解(这样的解是唯一的)就是 $v(P)=v_k(P)$。公式(319)給出：

$$h_k=\frac{v_k(Q)}{\lambda_k+\lambda}。\tag{320}$$

因而，公式(317)的右边是左边的富里埃級数，并且后者乃是可以用核来表示的函数。在(317)右边的級数对任何固定的 Q 关于 P 正则收斂。这是从估值

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k^2(P)}{\lambda_k^2}=\iiint_{D_t}G^2(P;Q)\,d\tau\leqslant C;$$

$$\sum_{k=m}^{m+p}h_k^2\leqslant\varepsilon$$

所推出，这完全如同在[22]中一样。所写公式的第一个表示函数 $G(P;Q)$ 的封閉性方程[225]。我們还指出，(317)的左边在閉区域 $\overline{D}_t$ 为点 P 及 Q 的連續函数。这可以完全类似于我們証明質体势函数及其一阶导数的連續性一样地得到証实[II; 200]。我們指出，在公式(317)的左边的被积函数中，有最大的極性的項是

$$\frac{e^{-\sqrt{\chi}r}}{rr'},$$

式中 r 与 r' 是 Q' 到 P 与 Q 的距离。

从上面所說的事实推出公式(317)的有效性。当 P 与 Q 重合时我們得到公式：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k^2(P)}{\lambda_k(\lambda_k+\lambda)}=\iiint_{D_t}G(P;Q')G_1(Q',P;\lambda)\,d\tau_{Q'},\tag{321}$$

并且，因为由以前所述，在右边是 P 的連續函数[23]，所以級数在閉区域 $\overline{D}_t$ 上一致收斂。沿 D_t 积分(321)，我們得到：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k(\lambda_k+\lambda)}=\iiint_{D_t}\psi(P,\lambda)\,d\tau,\tag{322}$$

于此

$$(323)\qquad \psi(P,\lambda)=\iiint\limits_{D_i} G(P;Q)G_1(Q,P;\lambda)d\tau_Q。$$

公式(322)我們要用来研究特征值 λ_k。

236. 特征值的漸近表示　預先闡明函数 $\psi(P,\lambda)$ 的若干性質。注意到对 G 与 G_1 的估值，我們有：

$$(324)\qquad |\psi(P,\lambda)|\leqslant\iiint\limits_{D_i}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{16\pi^2r^2}d\tau_Q\quad(r=|PQ|)。$$

沿全空間积分，引入以 P 为中心的球面坐标，就得到：

$$(325)\qquad |\psi(P,\lambda)|\leqslant\frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}e^{-\sqrt{\lambda}r}\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda}}。$$

現証对任何在 D_i 之內的閉区域 D' 中，当 $\lambda\to+\infty$ 时乘积 $\sqrt{\lambda}\psi(P,\lambda)$ 一致地趋向于 $\frac{1}{4\pi}$，即：

$$(326)\qquad \sqrt{\lambda}\psi(P,\lambda)\to\frac{1}{4\pi}\quad 在\ D'\ 中一致地成立。$$

考虑到函数 $g(P;Q)$ 与 $g_1(P,Q;\lambda)$ 在 S 上的極限值，我們得到估值：

$$0\geqslant g(P;Q)\geqslant-\frac{1}{4r'};\ 0\geqslant g_1(P,Q;\lambda)\geqslant-\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r'}}{4\pi r'}\quad(P\ 在\ D'\ 中),$$

于此 r' 是 D' 的边界到 S 的距離。我們有：

$$\sqrt{\lambda}\psi(P,\lambda)=\sqrt{\lambda}\iiint\limits_{D_i}\Big[\frac{1}{4\pi r}+$$

$$+g(P;Q)\Big]\Big[\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{4\pi r}+g_1(P,Q;\lambda)\Big]d\tau_Q。$$

打开括弧，并把积分分为四項：

$$\left|\sqrt{\lambda}\iiint\limits_{D_i}g(P;Q)g_1(P,Q;\lambda)\,d\tau_Q\right|\leqslant\sqrt{\lambda}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r'}}{16\pi r'^2}\cdot D_i\ 的体积,$$

从此可見，只要 P 屬于 D'，左边的积分当 $\lambda\to\infty$ 时就一致地趋向于零。其次，我們有

$$\left|\sqrt{\lambda}\iiint\limits_{D_l}\frac{1}{4\pi r}g_1(P,Q;\lambda)d\tau_Q\right|\leqslant\sqrt{\lambda}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r'}}{16\pi^2r'}\iiint\limits_{D_l}\frac{d\tau_Q}{r},$$

而右边的积分，当 P 在 D_l 中取任何位置时都不超过某一常数，从此推出，在左边的积分一致趋向于零。可以完全类似地考察积分：

$$\sqrt{\lambda}\iiint\limits_{D_l}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{4\pi r}g(P;Q)d\tau_Q。$$

剩下来还要考察积分：

$$\sqrt{\lambda}\iiint\limits_{D_l}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{16\pi^2r^2}d\tau_Q, \tag{327}$$

幷証明，如果 P 屬于 D'，它一致地趋向 $\frac{1}{4\pi}$。設 D_0 与 D_1 都是以 P 为中心的球，它們的半徑分別是 r' 以及区域 D_l 的直徑 d。我們有：

$$\sqrt{\lambda}\iiint\limits_{D_0}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{16\pi^2r^2}d\tau_Q\leqslant\sqrt{\lambda}\iiint\limits_{D_l}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{16\pi^2r^2}d\tau_Q\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\lambda}\iiint\limits_{D_1}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{16\pi^2r^2}d\tau_Q。$$

我們把沿 D_0 与沿 D_1 的积分用以 P 为中心的球面坐标表示，又引入新的变量 $\rho=\sqrt{\lambda}r$。因而就引导到不等式：

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\sqrt{\lambda}r'}e^{-\rho}d\rho\leqslant\sqrt{\lambda}\iiint\limits_{D_l}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r}}{16\pi^2r^2}d\tau\leqslant\frac{1}{4\pi}\int_0^{\sqrt{\lambda}d}e^{-\rho}d\rho。$$

当 $\lambda\to\infty$ 时兩端的項均趋向于 $\frac{1}{4\pi}$，且它們与点 P 在 D' 中的位置無关。从此也直接推出，积分 (327) 在 D' 中一致趋向于 $\frac{1}{4\pi}$，因而証好了論断(326)。注意到(325)，我們就可以取 D' 与 D_l 充分接近，使得 $\sqrt{\lambda}\psi(P,\lambda)$ 沿 (D_l-D') 的积分小于 $\frac{\varepsilon}{2}$，于此 ε 是一

个預先指定的正数。从另一面，由于(326)，对充分大的 λ，有

$$\left|\iiint_{D'}\sqrt{\lambda}\,\psi(P,\lambda)\,d\tau-\frac{v'}{4\pi}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

式中 v' 为 D' 的体积，从此

$$\left|\iiint_{D_i}\sqrt{\lambda}\,\psi(P,\lambda)\,d\tau-\frac{v}{4\pi}\right|\leqslant\frac{1}{4\pi}(v-v')+\varepsilon,$$

式中 v 为 D_i 的体积。从此推出：

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\iiint_{D_i}\sqrt{\lambda}\,\psi(P,\lambda)\,d\tau=\frac{v}{4\pi},$$

而由于(322)得：

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k(\lambda_k+\lambda)}=\frac{v}{4\pi}。\tag{328}$$

利用这些公式来推出 λ_k 的漸近表示式的基础是在于如下的定理：

定理 如果級数

$$s(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda_k+\lambda}\qquad(c_k>0;\ \lambda_k>0),\tag{329}$$

在 $\lambda>0$ 时收斂，式中 $0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$，$\lambda_n\to\infty$，且

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\,s(\lambda)=H,\tag{330}$$

那末

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda}c_k=\frac{2H}{\pi},\tag{331}$$

于此，在最后的和式中，是对那些使 $\lambda_k\leqslant\lambda$ 的值 k 作和的。

把这定理应用到級数(328)，在这情形下 $c_k=\frac{1}{\lambda_k}$，且 $H=\frac{v}{4\pi}$，而我們得到：

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda}\frac{1}{\lambda_k}=\frac{v}{2\pi^2}$$

或者，同样的

$$\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda}\frac{1}{\lambda_k}=\frac{v}{2\pi^2}\sqrt{\lambda}+\varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda},\tag{332}$$

于此当 $\lambda\to+\infty$ 时 $\varepsilon(\lambda)\to 0$，如果取 $\lambda=\lambda_n$，那末得到：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}=\frac{v}{2\pi^2}\sqrt{\lambda_n}+\varepsilon_n\sqrt{\lambda_n}\qquad(\varepsilon_n\to 0)。\tag{333}$$

我們記
$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k},$$

而把(332)的左边記作 $\varphi(\lambda)$。这是 λ 的不减的函数：

(334) $\varphi(\lambda)=0$ 当 $\lambda<\lambda_1$； $\varphi(\lambda)=\sigma_m$ 当 $\lambda_m\leqslant\lambda<\lambda_{m+1}$ 时。

現要导出 n 充分大时 λ_n 的漸近表示式。我們有

$$n=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot\frac{1}{\lambda_k}=\sigma_1(\lambda_1-\lambda_2)+\tag{335}$$
$$+\sigma_2(\lambda_2-\lambda_3)+\cdots+\sigma_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)+\sigma_n\lambda_n。$$

不减函数

$$\varphi(\lambda)=\frac{v}{2\pi^2}\sqrt{\lambda}+\varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\tag{336}$$

沿任何有限区間都可积，因而，右边第二項也是可积函数。由于(332)与(334)，我們有

$$\int_0^{\lambda_n}\varphi(\lambda)d\lambda=\sigma_1(\lambda_2-\lambda_1)+\sigma_2(\lambda_3-\lambda_2)+\cdots+\tag{337}$$
$$+\sigma_{n-1}(\lambda_n-\lambda_{n-1})=\frac{v}{3\pi^2}\lambda_n^{3/2}+\int_0^{\lambda_n}\varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\,d\lambda。$$

不难証明，当 $n\to\infty$ 时

$$\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\int_0^{\lambda_n}\varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\,d\lambda\to 0。\tag{338}$$

設 δ 为已給正数。固定充分大的 p，使得 $\lambda\geqslant\lambda_p$ 时 $|\varepsilon(\lambda)|\leqslant\delta$。我們有：

$$\left|\int_0^{\lambda_n}\varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\,d\lambda\right|\leqslant\int_0^{\lambda_p}|\varepsilon(\lambda)|\sqrt{\lambda}\,d\lambda+2\delta\frac{(\lambda_n^{3/2}-\lambda_p^{3/2})}{3}\qquad(n>p),$$

从此推出：

$$\left|\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\int_0^{\lambda_n}\varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\,d\lambda\right|\leqslant\frac{2}{3}\delta+\left[\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\int_0^{\lambda_p}|\varepsilon(\lambda)|\sqrt{\lambda}\,d\lambda-\frac{2\delta\lambda_p^{3/2}}{3\lambda_n^{3/2}}\right]。$$

对充分大的 n，方括弧的絕对值会 $\leqslant\frac{1}{3}\delta$，即对大的 n

$$\left|\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\int_0^{\lambda_n}\varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\,d\lambda\right|\leqslant\delta,$$

从此也就推出(338)。因而，依(337)，就得到：

$$\sigma_1(\lambda_2-\lambda_1)+\sigma_2(\lambda_3-\lambda_2)+\cdots+\sigma_{n-1}(\lambda_n-\lambda_{n-1})=$$

$$=\frac{v}{3\pi^2}\lambda_n^{3/2}+\varepsilon_n'\lambda_n^{3/2},$$

于此当 $n\to\infty$ 时 $\varepsilon_n'\to0$。把这式子代入(335)，并利用(333)，我們得到：

(339) $$n=\frac{v}{6\pi^2}\lambda_n^{3/2}+\varepsilon_n''\lambda_n^{3/2},$$

于此 $\varepsilon_n''\to0$。从此

$$\lambda_n=\left(\frac{6\pi^2 n}{v}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1+\frac{6\pi^2}{v}\varepsilon_n''\right)^{-\frac{2}{3}},$$

而最后有

(340) $$\lambda_n=\left(\frac{6\pi^2 n}{v}\right)^{\frac{2}{3}}+\varepsilon_n'''n^{\frac{2}{3}}\qquad(\varepsilon_n'''\to0)。$$

在平面的情形，相应的結果取形式：

(341) $$\lambda_n=\frac{4\pi n}{S}+\varepsilon_n'''n$$

于此，S 是区域的面积。

因而，一切都归結到有关級数(329)的定理的証明。

借助于上述的方法，卡勒曼(Carleman)在他的論文“論偏微分方程特征值的渐近分布”(“Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen” Berichte der Sächsisch. Akad. der Wiss. zu Leipzig, Math. Phys. Klasse, Bd. LXXXVIII; 1936)中也还考察过非常一般形式的方程的特征值。

举出他所得的結果。設有一表示式：

$$L(u)=\sum_{p,q=1}^{3}a_{pq}\frac{\partial^2u}{\partial x_p\partial x_q}+\sum_{p=1}^{3}a_p\frac{\partial u}{\partial x_p}+au\qquad(a_{pq}=a_{qp}),$$

式中 a_{pq}, a_p 与 a 都是在空間(x_1, x_2, x_3)的閉区域 D 中的实連續函数。其次設，只要点(x_1, x_2, x_3)在閉区域 D 中，变量 ξ_k 的二次型

$$\sum_{p,q=1}^{3} a_{pq}\xi_p\xi_q$$

是正定的。考察方程

$$L(u)+\lambda u=0$$

在边值条件(302)下的边值問題。它有無限个特征值，这些特征值有可能为复数的。在平面的任何有界部分只有有限个特征值，如果把它們按模的不減的次序排列起来，那末就成立如下的公式：

$$\lim \frac{u}{\lambda_n^{3/2}}=\frac{1}{6\pi^2}\iiint\limits_D \frac{dv}{\sqrt{\Delta}},$$

式中 Δ 是以 a_{pq} 为元素所構成的行列式。我們指出，由于二次型的正定的性質，$\Delta>0$，而最后的公式的右端是实的。

在柯朗与希尔伯特的書"数学物理方法"(Методы математической физики)卷 I 中，前面所得到的关于方程 $\Delta u+\lambda u=0$ 的特征值 λ_n 对大的 n 的漸近表示式是借助于特征值的極值性質而建立的。对單变量的情形我們在[188]中已經叙述过这个方法。把这个方法应用到方程 $\Delta u+\lambda u=0$ 时，其过程变得复杂得多。

237. 輔助定理的証明 在轉到証明上段中所表述的定理之先，我們要建立起若干輔助公式，証明一系列引理。

引入如下的記号

$$\varphi(\lambda)=\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda} c_k; \tag{342}$$

$$\sigma_n=\varphi(\lambda_n)=\sum_{k=1}^{n} c_k。 \tag{343}$$

在公式(342)中和式是按那些使 $\lambda_k\leqslant\lambda$ 的 k 而作的。函数 $\varphi(\lambda)$ 是 λ 的不減的函数，其值不小于零：

(344) $\varphi(\lambda)=0$ 当 $\lambda<\lambda_1$ 时； $\varphi(\lambda)=\sigma_m$，当 $\lambda_m\leqslant\lambda<\lambda_{m+1}$ 时。

注意到当 $\lambda_k\leqslant\lambda$ 时，$\lambda_k+\lambda\leqslant 2\lambda$，我們能写出：

$$\varphi(\lambda)\leqslant 2\lambda\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda}\frac{c_k}{\lambda_k+\lambda}$$

而由于注意到(330)，就会得出：

(345) $$\varphi(\lambda)=O(\sqrt{\lambda}),$$

就是說，当 $\lambda\to\infty$ 时比值 $\frac{\varphi(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}$ 保持有界。其次我們有：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{\lambda_k+\lambda}=\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k\left(\frac{1}{\lambda_k+\lambda}-\frac{1}{\lambda_{k+1}+\lambda}\right)+\frac{\sigma_n}{\lambda_n+\lambda},$$

而 $$\frac{1}{\lambda_k+\lambda}-\frac{1}{\lambda_{k+1}+\lambda}=\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\frac{dx}{(x+\lambda)^2},$$

并且注意到公式(334)，就可写出：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{\lambda_k+\lambda}=\int_0^{\lambda_n}\frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^2}\,dx+\frac{\sigma_n}{\lambda_n+\lambda}。$$

但 $\sigma_n=\varphi(\lambda_n)$，又从(345)就推出，当 $n\to\infty$ 时 $\frac{\sigma_n}{\lambda_n+\lambda}\to 0$。因此，最后的式子給出：

(346) $$s(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda_k+\lambda}=\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^2}\,dx。$$

从(345)直接推出，当 $x\to\infty$ 时被积函数的阶次为 $\frac{1}{x^{3/2}}$。为写法簡潔計，引入一个記号。如果 $\psi(\lambda)=a\lambda^b+\varepsilon(\lambda)\lambda^b$，式中当 $\lambda\to\infty$ 时 $\varepsilon(\lambda)\to 0$，那末我們就記作：$\psi(\lambda)\sim a\lambda^b$[見 III₂; **106**]。我們要証明兩个引理：

引理 1. 如果对任一充分大的 λ，函数 $f(\lambda)$ 有連續的导数，当 λ 增加时 $\lambda f'(\lambda)$ 不減少，且 $f(\lambda)\sim a\lambda^q$ $(q>0)$，那末 $f'(\lambda)\sim aq\lambda^{q-1}$。

首先在 $a=1$，$q=1$ 时証明这个引理。我們有 $f(\lambda)\sim\lambda$ 而要証 $f'(\lambda)\sim 1$。即要証明 $\lambda\to\infty$ 时 $f'(\lambda)\to 1$。

我們用反証法来証明。如果 $f'(\lambda)$ 不趋向于1，那末就存在序列 λ_n，使得 $\lambda_n\to\infty$ 以及 $f'(\lambda_n)\to h$，于此数 h 不同于1。例如說，$h>1$。設 γ 是某一正常数。注意到 $\lambda f'(\lambda)$ 是不減函数，可以写出：

$$\frac{f(\lambda_n+\gamma\lambda_n)-f(\lambda_n)}{\gamma\lambda_n}=\frac{1}{\gamma\lambda_n}\int_{\lambda_n}^{\lambda_n+\gamma\lambda_n}f'(\lambda)d\lambda\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\lambda_n f'(\lambda_n)}{\gamma\lambda_n}\int_{\lambda_n}^{\lambda_n+\gamma\lambda_n}\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{f'(\lambda_n)}{\gamma}\lg(1+\gamma)。$$

右边趋向于数 $\frac{h}{\gamma}\lg(1+\gamma)$，如果取 γ 充分接近于零，它大于 1。但从 $f(\lambda)\sim\lambda$ 可直接推出，我們应有：

$$\frac{f(\lambda_n+\gamma\lambda_n)-f(\lambda_n)}{\gamma\lambda_n}\to 1。$$

由这个矛盾，因而就在 $a=q=1$ 时証明了引理。現轉入一般的情形，置 $\mu=\lambda^q$，引入新的函数 $f_1(\mu)=\frac{1}{a}f(\mu^{\frac{1}{q}})$ 以代替 $f(\lambda)$。我們有：

$$f_1(\mu)\sim\mu\,(\mu\to\infty);\ \mu f_1'(\mu)=\frac{1}{aq}\mu^{\frac{1}{q}}f'(\mu^{\frac{1}{q}})=\frac{1}{aq}\lambda f'(\lambda)。$$

因此，$\mu f_1'(\mu)$ 是不减函数，我們可以对 $f_1(\mu)$ 应用 $a=q=1$ 时的这个引理，从此就得

$$f_1'(\mu)\sim 1,\ 即\ \frac{1}{aq}\mu^{\frac{1}{q}-1}f'(\mu^{\frac{1}{q}})\sim 1,$$

由此推出 $f'(\lambda)\sim aq\lambda^{q-1}$，这就証明了引理。在 $h=\infty$ 时証明的叙述仍有效。

考察积分

$$K_p=\int_0^\infty\frac{u^{p+\frac{1}{2}}}{(u+1)^{2p+2}}du\quad(p=1,2,\cdots)。\tag{847}$$

作变量变换 $u=x/(1-x)$，把这积分变为如下形狀[III₂; 72]：

$$K_p=\int_0^1 x^{p+\frac{1}{2}}(1-x)^{p-\frac{1}{2}}dx=\frac{\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2p+2)}。\tag{848}$$

引理 2. 設

$$K_{p,1}=\int_0^{1-\alpha}\frac{u^{p+\frac{1}{2}}}{(u+1)^{2p+2}}du;\quad K_{p,2}=\int_{1-\alpha}^{1+\alpha}\frac{u^{p+\frac{1}{2}}}{(u+1)^{2p+2}}du,$$

$$K_{p,3}=\int_{1+\alpha}^{\infty}\frac{u^{p+\frac{1}{2}}}{(u+1)^{2p+2}}\,du,$$

于此 $0<\alpha<1$。这时

(349) $\quad K_{p,1}\leqslant\delta'_pK_p;\ K_{p,2}\geqslant(1-\delta''_p)K_p;\ K_{p,3}\leqslant\delta'''_pK_p,$

式中 δ'_p, δ''_p 与 δ'''_p 均与 α 有关,当 $p\to\infty$ 时它們都趋向于零。

我們有斯特林公式[**III**$_2$; **75**]:

$$\Gamma(z)=\sqrt{2\pi}\,z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}[1+\varepsilon(z)]\qquad(z\to\infty\text{ 时 }\varepsilon(z)\to0)。$$

把它用到(348)的右边,就得到

$$K_p=\sqrt{2\pi}\,2^{-\frac{3}{2}}2^{-2p}\frac{\left(p+\frac{3}{2}\right)^{p+1}\left(p+\frac{1}{2}\right)^p}{(p+1)^{2p+\frac{3}{2}}}(1+\varepsilon_p),$$

于此,$p\to\infty$ 时 $\varepsilon_p\to0$。如把式中所写的分式部分乘以$\sqrt{p}$,在$p\to\to\infty$ 时,它就趋向于 1, 而我們可以写出:

(350) $$K_p=Ap^{-\frac{1}{2}}2^{-2p}(1+\varepsilon'_p)\qquad(\varepsilon'_p\to0),$$

式中 $A=\sqrt{2\pi}\,2^{-\frac{3}{2}}$。函数 $u/(u+1)^2$ 在 $u=1$ 时有極大值 $\frac{1}{4}$,从此得出:

$$K_{p,1}\leqslant k^p\int_0^{1-\alpha}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{(u+1)^3}\,du<k^p\int_0^{\infty}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{(u+1)^2}\,du,$$

于此 $0<k<\frac{1}{4}$ 且 k 与 α 的选择有关。因而得到

(351) $$K_{p,1}\leqslant A_1k^p,$$

式中 $A_1=\frac{\pi}{2}$,完全类似地

(352) $$K_{p,3}\leqslant A_1k^p。$$

我們有 $k^p=\left(\frac{1}{4}+\delta\right)^p$,于此 $\delta>0$ 而与 α 的选择有关。从所說的事实推出,当 $p\to\infty$ 时 $k^p\cdot2^{2p}p^{1/2}=(1-\delta)^pp^{1/2}\to0$,且注意到(350)、(351)与(352),我們就得出对 $K_{p,1}$ 与 $K_{p,3}$ 的不等式(349)。接着

我們还有：

$$K_{p,2}=K_p-K_{p,1}-K_{p,3}\geqslant K_p-(\delta_p'+\delta_p''')K_p,$$

从此也就推出关于 $K_{p,2}$ 的不等式(349)，而引理証畢。

轉到对[**236**]中所表述的定理的証明。据这一定理的条件：

$$s(\lambda)=\int_0^\infty\frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^2}dx\sim H\lambda^{-\frac{1}{2}}。\tag{353}$$

考察函数 $\lambda^2 s(\lambda)$ 并証明它的导数为正，又在 λ 增加时并不减少：

$$\frac{d}{d\lambda}[\lambda^2 s(\lambda)]=2\int_0^\infty\frac{\lambda x\varphi(x)}{(x+\lambda)^3}dx=2\int_0^\infty\frac{u\varphi(\lambda u)}{(u+1)^3}du。$$

从最后一表示式及函数 $\varphi(x)$ 的不减性可直接推出，在公式左边的导数为正且不减少。因此，我們可以对函数 $\lambda^2 s(\lambda)$ 应用引理 1，又由于注意到(353)，我們得出：

$$\frac{d}{d\lambda}[\lambda^2 s(\lambda)]\sim\frac{3}{2}H\lambda^{\frac{1}{2}},$$

从此得

$$-s'(\lambda)=2\int_0^\infty\frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^3}dx\sim\frac{1}{2}H\lambda^{-\frac{3}{2}}。\tag{354}$$

接着，我們得到：

$$-\lambda^3 s'(\lambda)\sim\frac{1}{2}H\lambda^{3/2}$$

$$-\frac{d}{d\lambda}[\lambda^3 s'(\lambda)]=2\cdot3\int_0^\infty\frac{u\varphi(\lambda u)}{(u+1)^4}du,$$

而可以再一次地应用引理 1 到函数$[-\lambda^3 s'(\lambda)]$，成立：

$$-\frac{d}{d\lambda}[\lambda^3 s'(\lambda)]\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}H\lambda^{\frac{1}{2}},$$

由此，进行微分并利用(354)，我們得出：

$$s''(\lambda)=3!\int_0^\infty\frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^4}dx\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}H\lambda^{-\frac{5}{2}}。\tag{355}$$

这样地繼續进行下去，就导出公式

$$(-1)^m s^{m}(\lambda)=(m+1)!\int_0^\infty\frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^{m+2}}dx\sim\tag{356}$$

$$\sim \frac{1\cdot 3\cdots(2m-1)}{2^m} H\lambda^{-\frac{2m+1}{2}}。$$

現研究积分

$$(357) \qquad J_p(\lambda)=\int_0^\infty \frac{x^p\varphi(x)}{(x+\lambda)^{2p+2}}dx \quad (p\geqslant 1)$$

当 λ 很大时的漸近性态。我們有

$$\frac{x^p}{(x+\lambda)^{2p+2}}=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{x+\lambda}\right)^p}{(x+\lambda)^{p+2}}=\sum_{s=0}^{p}\binom{s}{p}\frac{(-\lambda)^s}{(x+\lambda)^{p+2+s}},$$

于此

$$\binom{s}{p}=\frac{p(p-1)\cdots(p-s+1)}{s!}; \qquad \binom{0}{p}=1,$$

因而，

$$J_p(\lambda)=\sum_{s=0}^{p}\binom{s}{p}(-\lambda)^s\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{(x+\lambda)^{p+2+s}}dx。$$

注意到(356)式，就得出：

$$(358) \qquad \begin{gathered} J_p(\lambda)\sim H\lambda^{-p-\frac{1}{2}}\sum_{s=0}^{p}(-1)^s\binom{s}{p}\frac{1\cdot 3\cdots(2p+2s+1)}{(p+s+1)!\,2^{p+s}};\\ J_0(\lambda)=s(\lambda)\sim H\lambda^{-\frac{1}{2}}。\end{gathered}$$

这两公式中的第一个可写成如下的形状：

$$(359) \quad J_p(\lambda)\sim H\lambda^{-p-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{p}(-1)^s\binom{s}{p}\frac{\Gamma\left(p+s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+s+2)}。$$

現証公式：

$$(360) \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{p}(-1)^s\binom{s}{p}\frac{\Gamma\left(p+s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+s+2)}=\frac{2}{\pi}K_p。$$

为此，考察积分

$$(361) \qquad L_p=\int_0^\infty \frac{x^{p+\frac{1}{2}}}{(x+\lambda)^{2p+2}}dx,$$

利用代換 $x=\lambda u$，它可以化为形狀：

$$L_p=\frac{1}{\lambda^{p+\frac{1}{2}}}\int_0^\infty\frac{u^{p+\frac{1}{2}}}{(u+1)^{2p+2}}\,du=\frac{1}{\lambda^{p+\frac{1}{2}}}K_p。\tag{362}$$

我們有：

$$\left(\frac{x}{x+\lambda}\right)^p=\sum_{s=0}^{p}(-1)^s\binom{s}{p}\frac{\lambda^s}{(x+\lambda)^s},$$

而积分(361)可表示为形狀：

$$L_p=\sum_{s=0}^{p}(-1)^s\binom{s}{p}\lambda^s\int_0^\infty\frac{x^{\frac{1}{2}}}{(x+\lambda)^{p+s+2}}\,dx=\tag{363}$$

$$=\frac{1}{\lambda^{p+\frac{1}{2}}}\sum_{s=0}^{\lambda}(-1)^s\binom{s}{p}\int_0^\infty\frac{u^{\frac{1}{2}}}{(u+1)^{p+s+2}}\,du。$$

进行代换 $u=x/(1-x)$，就得到：

$$\int_0^\infty\frac{u^{\frac{1}{2}}}{(u+1)^{p+s+2}}\,du=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{p+s-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(p+s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+s+2)},$$

把它代入公式(363)，有

$$L_p=\frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda^{p+\frac{1}{2}}}\sum_{s=0}^{p}(-1)^s\binom{s}{p}\frac{\Gamma\left(p+s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+s+2)}。$$

把它与(362)相比較，我們得到(360)，而公式(359)采取形式：

$$J_p(\lambda)\sim\frac{2H}{\pi}\lambda^{-p-\frac{1}{2}}K_p\tag{364}$$

或

$$J_p(\lambda)=\frac{2H}{\pi}\lambda^{-p-\frac{1}{2}}K_p(1+\eta_\lambda),\tag{365}$$

于此 η_λ 与 p 及 λ 有关，且当 p 固定 $\lambda\to\infty$ 时，$\eta_\lambda\to 0$。

把积分 $J_p(\lambda)$ 表示为四項之和：

$$J_p(\lambda)=\int_0^1\frac{x^p\varphi(x)}{(x+\lambda)^{2p+2}}\,dx+\int_1^{(1-\alpha)\lambda}+\int_{(1-\alpha)\lambda}^{(1+\alpha)\lambda}+\tag{366}$$

$$+\int_{(1+\alpha)\lambda}^{\infty}=J_{p,0}+J_{p,1}+J_{p,2}+J_{p,3},$$

于此 $0<\alpha<1$。从(345)推出：

$$0 \leqslant \varphi(\lambda) \leqslant A\sqrt{\lambda},$$

式中 A 是常数，而因此，

$$J_{p,1} \leqslant A \int_0^{(1-\alpha)\lambda} \frac{x^{p+\frac{1}{2}}}{(x+\lambda)^{2p+2}}\, dx = A\lambda^{-p-\frac{1}{2}} K_{p,1},$$

从此，由于引理 2：

$$J_{p,1} = \frac{2H}{\pi} \lambda^{-p-\frac{1}{2}} K_p \eta_p,$$

于此 η_p 与 p 及 α 有关，且当 α 固定 $p\to\infty$ 时 $\eta_p \to 0$。完全同样地可得到：

$$J_{p,3} = \frac{2H}{\pi} \lambda^{-p-\frac{1}{2}} K_p \eta_p',$$

于此 η_p' 类似于 η_p。現估計 $J_{p,0}$：

$$J_{p,0} \leqslant B \int_0^1 \frac{dx}{(x+\lambda)^{2p+2}} = \frac{B}{2p+1}\left[\frac{1}{\lambda^{2p+1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(1+\lambda)^{2p+1}}\right] \leqslant \frac{B_1}{p\lambda^{2p+1}},$$

式中 B 与 B_1 是常数(它們与 p 及 λ 無关)。由此推出：

$$J_{p,0} = \frac{2H}{\pi} \lambda^{-p-\frac{1}{2}} K_p \eta_\lambda',$$

且我們有

$$0 < \eta_\lambda' \leqslant \frac{C}{pK_p} \lambda^{-p-\frac{1}{2}},$$

式中 C 是常数。从以上的这些公式推出：

$$J_{p,2} = \frac{2H}{\pi} \lambda^{-p-\frac{1}{2}} K_p (1+\eta_\lambda - \eta_\lambda' - \eta_p - \eta_p')。 \tag{367}$$

注意到 $J_{p,2}$ 的定义及 x 增加时 $\varphi(x)$ 不減少这一事实，我們得到：

$$J_{p,2} \leqslant \frac{\varphi(\lambda+\alpha\lambda)}{(\lambda-\alpha\lambda)^{1/2}} \int_{\lambda-\alpha\lambda}^{\lambda+\alpha\lambda} \frac{x^{p+\frac{1}{2}}}{(x+\lambda)^{2p+2}}\, dx = \tag{368}$$

$$= \frac{\varphi(\lambda+\alpha\lambda)}{(\lambda+\alpha\lambda)^{1/2}} \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \lambda^{-p-\frac{1}{2}} K_{p,2},$$

从此

$$\frac{\varphi(\lambda+\alpha\lambda)}{(\lambda+\alpha\lambda)^{1/2}}\geqslant\lambda^{p+\frac{1}{2}}\frac{J_{p,2}}{K_{p,2}}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\lambda^{p+\frac{1}{2}}\frac{J_{p,2}}{K_{p}}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}。$$

注意到(367)，就得到：

$$\frac{\varphi(\lambda+\alpha\lambda)}{(\lambda+\alpha\lambda)^{1/2}}\geqslant\frac{2H}{\pi}(1+\eta_\lambda-\eta'_\lambda-\eta_p-\eta'_p)\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}。\tag{369}$$

类似于(368)，我們有：

$$J_{p,2}\geqslant\frac{\varphi(\lambda-\alpha\lambda)}{(\lambda+\alpha\lambda)^{1/2}}\int_{\lambda-\alpha\lambda}^{\lambda+\alpha\lambda}\frac{x^{p+\frac{1}{2}}}{(x+\lambda)^{2p+2}}\,dx=$$

$$=\frac{\varphi(\lambda-\alpha\lambda)}{(\lambda-\alpha\lambda)^{1/2}}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{1/2}\lambda^{-p-\frac{1}{2}}K_{p,2},$$

从此

$$\frac{\varphi(\lambda-\alpha\lambda)}{(\lambda-\alpha\lambda)^{1/2}}\leqslant\lambda^{p+\frac{1}{2}}\frac{J_{p,2}}{K_{p,2}}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{1/2},$$

而注意到引理 2 及公式(367)，我們得到

$$\frac{\varphi(\lambda-\alpha\lambda)}{(\lambda-\alpha\lambda)^{1/2}}\leqslant\frac{2H}{\pi}(1+\eta_\lambda-\eta'_\lambda-\eta_p-\eta'_p)\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{1/2}(1-\delta''_p)^{-1}。\tag{370}$$

現証，当 $\lambda\to\infty$ 时比值 $\varphi(\lambda)/\lambda^{\frac{1}{2}}$ 趋向于 $\frac{2H}{\pi}$，即：

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{1/2}}=\frac{2H}{\pi}。\tag{371}$$

一般地說，如果对每一正数 ε 与 M，可以找到值 λ'，使得 $|A-\varphi(\lambda')/\sqrt{\lambda'}|\leqslant\varepsilon$，及 $\lambda'\geqslant M$，那末就称 A 为 $\lambda\to\infty$ 时 $\frac{\varphi(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}$ 的一个可能的極限值。类似地，如果对任意已給正数 M 与 N，可找到如此的 λ'，使得 $\varphi(\lambda')/\sqrt{\lambda'}\geqslant N$ 及 $\lambda'\geqslant M$，那末称 $A=+\infty$ 为 $\frac{\varphi(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}$ 的一个可能的極限值。这时，我們理解可能的極限值为如此的数值 A，对于它存在一个 λ 的無限增加的序列 λ_n，使得 $\frac{\varphi(\lambda_n)}{\sqrt{\lambda_n}}\to A$。我們必須証明，只存在一个可能的極限值，而且它等于 $\frac{2H}{\pi}$。

回到不等式(369)与(370)。并注意到它們的左端与出現在不等式右端的 p 無关。首先以任何方式固定 p 与 α，而令 $\lambda\to\infty$，使得(369)与(370)的左边趋向于同一的可能的極限值 A。这时，注意到 η_p 和 η'_p 都与 λ 無关，就得出：

$$A\geqslant\frac{2H}{\pi}(1-\eta_p-\eta'_p)\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{1/2}$$

$$A\leqslant\frac{2H}{\pi}(1-\eta_p-\eta'_p)\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{1/2}。$$

左边(即 A)既不依賴 p 也不依賴 α，假設 p 固定了相当大，而 α 充分地与零接近，我們就得到 A 的唯一可能的数值为 $\frac{2H}{\pi}$，即成立(371)。因而[236]中的定理的論断已被証实。上述証明屬于哈代与立篤武特。在所提到的作者們的論文中建立了一定程度上更广泛的定理，上面所証的定理是它的特殊情形。

238. 更一般形式的綫性方程 考察形狀为

$$(372)\qquad L(u)=\sum_{i=1}^{3}u_{x_ix_i}+b(x_1,\ x_2,\ x_3)u=-f(x_1,\ x_2,\ x_3)$$

的方程。坐标为 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 或 $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ 的空間的点以后將簡單地記为 (x) 或 (ξ)。

讓我們来求方程(372)的解，使滿足齐次的边值条件：

$$(373)\qquad u|_S=0。$$

已給的函数 $b(x)$ 与 $f(x)$ 設为在閉区域 $\overline{D}_i$ 連續，且在 D_i 內有第一阶的連續的导数：

完全与我們在[235]中所作的相类似，將要求所示問題的具如下形狀的解：

$$(374)\qquad u(x)=\iiint\limits_{D_i}G(x;\ \xi)\mu(\xi)d\tau_\xi,$$

式中 $G(x;\ \xi)$ 是具边值条件(373)的拉普拉斯算子的格林函数。对任意选擇的連續函数 $\mu(\xi)$，依(374)所定义的函数 $u(x)$ 滿足

这边值条件，还必須决定这个函数 $\mu(\xi)$，使得在 D_i 内，$u(x)$ 滿足方程 (372)。如果假設 $\mu(\xi)$ 有連續的导数，我們就可得到对 $\mu(\xi)$ 的积分方程：

$$\mu(x)=f(x)+\iiint_{D_i} K(x;\xi)\mu(\xi)d\tau_\xi, \tag{375}$$

其核为

$$K(x;\xi)=b(x)G(x;\xi)。 \tag{376}$$

考察其对应的齐次方程：

$$\mu(x)=\iiint_{D_i} K(x;\xi)\mu(\xi)d\tau_\xi。 \tag{377}$$

必須弄清楚，它是否有非零解。設在 $\overline{D}_i$ 中 $b(x)\leqslant 0$，又設 $\mu_0(x)$ 为方程(377)的一个解。当 $\mu(\xi)=\mu_0(\xi)$ 时，方程 (374) 給出方程 $L(u)=0$ 的一个滿足条件(373)的解。但这样的解恒等于零 [**234**]，即

$$\iiint_{D_i} G(x;\xi)\mu_0(\xi)d\tau_\xi=0。 \tag{378}$$

在 $\mu(x)=\mu_0(x)$ 时的公式(377)直接推出，$\mu_0(\xi)$ 应当在 D_i 中有連續的导数[**224**]，而对公式(378)的兩側运用拉普拉斯算子，就得到 $\mu_0(x)\equiv 0$。这就是方程 (377) 在 $b(x)\leqslant 0$ 时只有零解，因而方程 (375) 对任何的自由項均为可解的。因为按条件 $f(x)$ 在 D_i 内有連續的第一阶导数。可以断言，$\mu(x)$ 也有导数，从此推出公式(374)給出所提出的問題的解。可以証明，当区域 D_i 相当小时，齐次方程(377)不論 $b(x)$ 的符号如何都只有零解。所有上述事实对平面情形都可应用。又如果把上述方法运用到方程

$$\sum_{i=1}^{3} u_{x_ix_i}+\sum_{i=1}^{3} a_i(x)u_{x_i}+b(x)u=-f(x), \tag{379}$$

那末我們就会引出一个积分方程，其核为

(380) $$K(x;\xi)=\sum_{i=1}^{3}a_i(x)G_{x_i}(x;\xi)+b(x)G(x;\xi)。$$

如果对格林函数的导数成立估計式

(381) $$|G_{x_i}(x;\xi)|\leqslant\frac{C}{r^2},$$

那末对所說的积分方程，通常的那些定理都适用。但是还要証明，方程(375)的解 $\mu(x)$ 在 D_i 內有連續的导数。

239. 二阶綫性椭圓型方程 現在我們考察具有形狀

(382) $$L(u)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=0\qquad(a_{ik}=a_{ki})$$

的二阶椭圓型方程，式中 a_{ik} 是三維空間中由曲面 S 所包圍的閉区域 $\overline{D}_i$ 中 (x) 的三阶連續可微的函数。

由于椭圓型的条件，变量 η_s 的二次型

$$\sum_{i,k=1}^{3}a_{ik}\eta_i\eta_k$$

在 $\overline{D}_i$ 的所有点都是正定的。因而由元素 a_{ik} 所組成的行列式也是正的。用 B_{ik} 来記元素 a_{ik} 的代数余子式 A_{ik} 除以 Δ 的結果。不难看出，二次型

(383) $$\sum_{i,k=1}^{3}B_{ik}\eta_i\eta_k$$

也是正定的。为了証实它，只要在二次型(383)中按公式

$$\eta_i=a_{i1}\eta_1'+a_{i2}\eta_2'+a_{i3}\eta_3'$$

引入新的变量 η_s'，且这个变換的行列式 Δ 为正。以 η_s' 为变量的变后的二次型的系数矩陣 C 为 $C=ABA$[III$_1$; 32]，式中 A 是元素 a_{ik} 所成的矩陣，B 是元素 B_{ik} 所成的矩陣。但乘积 BA 是單位矩陣，因而以 η_s' 为变量时，二次型(383)取形式：

$$\sum_{i,k=1}^{3}a_{ik}\eta_i'\eta_k',$$

从此也推出，这个二次形式在 $\overline{D}_i$ 为正定。定义点对(x)与(ξ)的函数：

(384) $$\sigma(x;\xi)=\sum_{i,k=1}^{3}B_{ik}(x)(x_i-\xi_i)(x_k-\xi_k)。$$

由于上述結果，知 $\sigma(x;\xi)\geqslant0$，而等号只有在(x)与(ξ)重合时成立。此外，还成立不等式

(385) $$ar\leqslant\sigma^{\frac{1}{2}}\leqslant br,$$

式中 a, b 是正常数，$r=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}$。数 a 与 b 是矩陣 B 在 $\bar{D}_i$ 中最小特征值与最大特征值。設

(386)
$$\psi(x;\xi)=\frac{1}{[\sigma(x;\xi)]^{1/2}}。$$

作起函数：

(387)
$$\Gamma(x;\xi)=\psi(x;\xi)+\iiint\limits_{D_i}\psi(x;t)f(t;\xi)d\tau_t,$$

这里 $f(t;\xi)=f(t_1, t_2, t_3;\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 是从下述条件决定的，它要使作为 x 的函数的 $\Gamma(x;\xi)$ 是方程(382)的解。可以証明，这时 $f(x;\xi)$ 由第二类弗列德和蒙方程来决定的，并且如果 (x) 与 (ξ) 不重合，它就是这两点的連續函数，当这两点重合时，它們的極性的阶不高于 $\frac{1}{r}$。

公式(387)右端第二項当 (x) 与 (ξ) 不同时也是連續的，并且当这两点重合时这一項的極性的阶不高于 $\lg\frac{1}{r}$。因而在解 $\Gamma(x;\xi)$ 中極性的主要部分是 $\psi(x;\xi)$。方程(382)的这一奇解的詳細作法在 E. E. 列維(Леви)的下面的著作中找到："論綫性的橢圓型偏微分方程"("О линейных эллиптических уравнениях в частных производных" Успехи Математических Наук, т. VIII, 1941)。如果对 $\Gamma(x;\xi)$ 乘以一个單是 ξ 的函数，又添加上方程(382)的一个無奇性的解，那末就会重新得到这一方程的奇解。現写出对方程(382)的格林公式[147]：

(388)
$$\iiint\limits_{D_i}[uL(v)-vL(u)]d\tau=\iint\limits_{S}[uP(v)-vP(u)]dS,$$

式中
$$P(u)=\sum_{i,k=1}^{3}a_{ik}u_{x_k}\cos(n, x_i)$$

而 n 是 S 上点的外法綫方向。这时还假設 u, v 都有相应的連續导数。应用公式(388)到方程(382)的解 $u(x)$ 及奇解 $\Gamma(x;\xi)$。这时我們必須用一以 ξ 为中心、以小的数 ε 为半徑的球 C_ε 划出点 ξ。經过 $\varepsilon\to 0$ 的極限过程后，就給出：

(389)
$$E(\xi)u(\xi)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\{\Gamma(x;\xi)P(u)-uP[\Gamma(x;\xi)]\}dS_x,$$

式中

(390)
$$E(\xi)=E(\xi_1, \xi_2, \xi_3)=\frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{C_\varepsilon}P[\Gamma(x;\xi)]dS_x.$$

函数 $E(\xi)$ 为正的，且有到二阶的連續导数。引入新的奇解：

$$K(x;\xi)=\frac{\Gamma(x;\xi)}{E(\xi)} \tag{391}$$

并証明如下的公式[見 **193**]：

$$\iint_S P[K(x;\xi)]dS_x=\begin{cases}4\pi & 如果(\xi)在 S 内\\ 0 & 如果(\xi)在 S 外\\ 2\pi & 如果(\xi)在 S 上,\end{cases} \tag{392}$$

这里，积分号下的算子 P 是对点 (x) 而取的。

我們假設，方程(382)的系数 a_{ik} 可以拓广到全空間，使得到三阶为止的导数在全空間为連續，并且在某一球 D_1 之外方程(382)为拉普拉斯方程，即在 D_1 外 $L(u)=\Delta u$。如果 (x) 在 D_1 之外，那末，对 (ξ) 的任意位置 $\sigma(x;\xi)=r^2$，且 $E(x)=1$。此外对于在 D_1 之外的 (x) 在公式(387)中的 $f(x;\xi)$ 等于零，对于点 (x) 和 (ξ) 的任何位置，它可从积分方程

$$L[\psi(x;\xi)]-4\pi E(x)f(x;\xi)+\iiint_{D_1} L[\psi(x;t)]f(t;\xi)d\tau_t=0$$

来决定。因而函数 $\Gamma(x;\xi)$ 与 $K(x;\xi)$ 在全空間可以决定，并且可以証明 $K(x;\xi)$ 是一个对称的函数。它类似于拉普拉斯方程的解 $\frac{1}{r}$，在拉普拉斯方程的情形，算子 $P(u)$ 就化为沿法綫方向的导数：$\frac{\partial u}{\partial n}$。

利用 $K(x;\xi)$ 可以作起質体勢函数，單層勢函数与双層勢函数的类似

$$u(x)=\iiint_D \mu(\xi)K(x;\xi)d\tau \tag{393}$$

$$v(x)=\iint_S \mu(\xi)K(x;\xi)dS \tag{394}$$

$$w(x)=\iint_S \mu(\xi)P[K(x;\xi)]dS, \tag{395}$$

并且在最后一个式子中，算子 P 中是对点 (ξ) 进行微分。

曲面是設为相当光滑的，而密度 $\mu(\xi)$ 为連續函数。

如果在公式(393)中 $\mu(\xi)$ 在 D 内有連續导数，那末就可得到普阿松公式的如下的类似

$$L(u)=-4\pi\mu(x) \quad (在 D 内), \tag{396}$$

而在 D 外，$u(x)$ 滿足方程(382)。勢函数(394)与(395)在 S 内与 S 外都滿足方程(382)。当点 (x) 从曲面 S 内部或外部逼近 S 上的点 $(\xi^{(0)})$ 时，勢函数

(395)有連續的極限値

$$w_i(\xi^{(0)}) = w(\xi^{(0)}) + 2\pi\mu(\xi^{(0)}),$$

(397)

$$w_e(\xi^{(0)}) = w(\xi^{(0)}) - 2\pi\mu(\xi^{(0)}),$$

式中 $w(\xi^{(0)})$ 是积分(395)在曲面 S 上的点$(\xi^{(0)})$的数値[見 **192**]。完全类似地也有[見 **194**]:

$$P_i[v(\xi^{(0)})] = \iint_S \mu(\xi) P[K(\xi^{(0)};\xi)]dS + 2\pi\mu(\xi^{(0)})$$

(398)

$$P_e[v(\xi^{(0)})] = \iint_S \mu(\xi) P[K(\xi^{(0)};\xi)]dS - 2\pi\mu(\xi^{(0)}),$$

在算子 P 中 $K(x;\xi)$的微分是关于点(x)来进行，然后必須用$x=\xi^{(0)}$代入。利用所指出的公式可以把方程(382)的边値問題化到积分方程去。所以例如对在边値条件

$$u|_S = f(\xi)$$

下的方程(382)的狄义赫利內部問題，我們求形狀为(395)的解，由于(397)的第一个式子我們得到对密度 $\mu(\xi)$ 的积分方程:

$$2\pi\mu(\xi^{(0)}) - \iint_S \mu(\xi) P[K(\xi^{(0)};\xi)]dS = f(\xi^{(0)}), \tag{399}$$

式中，算子 P 中的微分是关于点 ξ 来进行。可以証明，对应的齐次方程只有零解，因而方程(399)对任意的連續函数 $f(\xi)$ 均可解。与[**220**]中完全相类似，可以作起方程(382)的格林函数 $G(x;\xi)$，而利用它来解方程⊖

$$L(u) = \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + bu = -f(x) \tag{400}$$

在条件

$$u|_S = 0$$

下的边値問題。一般的綫性的橢圓型方程

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + bu = -f(x) \tag{401}$$

可以写成形狀:

$$L(u) + \sum_{i=1}^{3}\left[b_i - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_k}\right]\frac{\partial u}{\partial x_i} + bu = -f(x)。 \tag{402}$$

本段中敍述的对一般的綫性橢圓型方程的广义的势函数理論是屬于斯 埔 壁

⊖ (400)式似应改为 $L(u) = \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + bu = -f(x)$——譯者注。

(Sternberg) 的 (Math. Zeitschr. Bd. 21; 1924)。具有任意个自变量的綫性椭圓型偏微分方程理論的一般叙述联系于制作一个以系数 a_{ik} 为基础的特殊的量度空間，它見于菲勒尔(Феллер)的著作"論二阶綫性椭圓型偏微分方程的解"("О решениях линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа", Успехи Математических Наук, т. VIII, 1941)。

在畢勁雪尔(Püschel)的著作"空間的一般的自共軛椭圓型二阶綫性微分方程在任意区域的第一边值問題"("Die erste Randwertaufgabe der allgemeinen selbstadjungierten elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung im Raum für beliebige Gebiete")中，对形狀为(382)的方程引进了狄义赫利問題广义解的制作与研究，它的制作是利用在区域 D 内部的区域序列 D_n 到区域 D 的逼近以及考察在 D 内的連續的極限值的拓广为基础的。对拉普拉斯方程，我們已在[217]中描述了这一方法。在畢勁雪尔的論文中，除了其他的一切結果外，还进行了对边界点的正則性的研究。

240. 格林張量 設 $L(\boldsymbol{u})$是作用于依賴(x, y, z)的向量 $\boldsymbol{u}(u_1, u_2, u_3)$的某一綫性算子，它把向量变为向量。考察方程

$$L(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{f}, \tag{403}$$

于此 $\boldsymbol{f}$ 为一已給的依賴于(x, y, z)的向量。把左右兩边依支量分解，我們就得到对向量 $\boldsymbol{u}$ 的支量 u_1, u_2, u_3 的由三个方程構成的方程組。此外，我們設在区域 D 的表面 S 上，成立齐次的边值条件，例如条件：

$$\boldsymbol{u}|_S = 0。 \tag{404}$$

$L(\boldsymbol{u})$的以(404)为边值条件的格林張量是理解为如下的矩陣：

$$G(P; Q) = G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \begin{Vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{Vmatrix},$$

它使得，以(404)为边值条件的微分方程(403)等价于公式：

$$\boldsymbol{u}(P) = \iiint\limits_D G(P; Q)\boldsymbol{f}(Q)\,dv, \tag{405}$$

这里，积分号下的表示式是把作为算子的矩陣 $G(P; Q)$ 应用到向量 f 結果，就是說，这个积分号下的表示式乃是以

$$G_{i1}f_1+G_{i2}f_2+G_{i3}f_3 \quad (i=1, 2, 3)$$

为支量的向量。張量的每一列給出某一向量 $g_k(k=1, 2, 3)$ 的支量，它們除在 Q 点外有連續的导数，滿足齐次方程(403)及边值条件(404)。在点 Q 的極性的性态容易从問題的物理意义推出。如前，利用了格林張量，就可以把在边值条件(404)下，关于方程

$$L(\boldsymbol{u})+\lambda\boldsymbol{u}=0$$

的特征值与特征向量的問題化为积分方程組。

写出彈性理論中对形变向量[94]的基本方程：

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}=G\left(\Delta\boldsymbol{u}+\frac{m}{m-2}\text{grad div}\,\boldsymbol{u}\right)。$$

利用公式[II; 112]

$$\text{rot rot}\,\boldsymbol{u}=\text{grad div}\,\boldsymbol{u}-\Delta\boldsymbol{u},$$

对静力学情形，我們就可把方程写成

$$\Delta^*\boldsymbol{u}=a\,\text{grad div}\,\boldsymbol{u}-b\,\text{rot rot}\,\boldsymbol{u}=0, \tag{406}$$

式中

$$a=\frac{G(2m-2)}{m-2};\quad b=G,$$

或者，由于引入拉米的常数 λ, μ: $a=\lambda+2\mu$; $b=\mu$。

在無界的空間，平行于 Z 軸作用于点 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ 的一个單位力，就会引起形变，其支量为①：

$$u_1=A\frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{r^3};\quad u_2=A\frac{(y-\eta)(z-\zeta)}{r^3};$$

$$u_3=A\left[\frac{(z-\zeta)^2}{r^3}+\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{1}{r}\right],$$

于此

$$A=\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)},\quad \text{而}\quad r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}。$$

对于平行于 X 軸与 Y 軸的力，我們也有类似的关于形变的表示式。在这一情形，格林張量具有形狀：

---

① 略夫：彈性的数学理論，195 頁(俄文本)。

$$G=\frac{1}{8\pi a}P_a+\frac{1}{8\pi b}P_b, \tag{407}$$

于此

$$P_a=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{r}-\frac{(x-\xi)^2}{r^3}, & -\frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r^3}, & -\frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{r^3}\\ -\frac{(y-\eta)(x-\xi)}{r^3}, & \frac{1}{r}-\frac{(y-\eta)^2}{r^3}, & -\frac{(y-\eta)(z-\zeta)}{r^3}\\ -\frac{(z-\zeta)(x-\xi)}{r^3}, & -\frac{(z-\zeta)(y-\eta)}{r^3}, & \frac{1}{r}-\frac{(z-\zeta)^2}{r^3}\end{matrix}\right\|$$

及

$$P_b=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{r}+\frac{(x-\xi)^2}{r^3}, & \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r^3}, & \frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{r^3}\\ \frac{(y-\eta)(x-\xi)}{r^3}, & \frac{1}{r}+\frac{(y-\eta)^2}{r^3}, & \frac{(y-\eta)(z-\zeta)}{r^3}\\ \frac{(z-\zeta)(x-\xi)}{r^3}, & \frac{(z-\zeta)(y-\eta)}{r^3}, & \frac{1}{r}+\frac{(z-\zeta)^2}{r^3}\end{matrix}\right\|。$$

在这一情形下，我們有在无穷远点形变为零这一条件以代替边値条件(404)。在这情形下，方程

$$\Delta^* u=-f$$

有解(406)。通常，在彈性理論中把張量(407)称为沙密里阿那(Somigliana)張量。它可以写为形状：

$$G=\frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\left[\frac{\lambda+3\mu}{r}E+(\lambda+\mu)\frac{r\times r}{r^3}\right],$$

于此 E 为单位矩陣而 $r\times r$ 为張量

$$r\times r=\left\|\begin{matrix}(x-\xi)^2, & (x-\xi)(y-\eta), & (x-\xi)(z-\zeta)\\ (y-\eta)(x-\xi), & (y-\eta)^2, & (y-\eta)(z-\zeta)\\ (z-\zeta)(x-\xi), & (z-\zeta)(y-\eta), & (z-\zeta)^2\end{matrix}\right\|。$$

在外尔(Weyl)① 的著作中对方程(406)指出格林公式的各种类似，引出对有界区域的格林張量的作法，而利用这个張量来研究方程

$$\Delta^* u+\lambda u=0$$

的特征值。

241. 彈性理論的平面靜力学問題 在平面情形，某些边値問題可从应用柯西积分而得到解决。例如，它牵涉到調和或两重調和方程的狄义赫利問

① Circolo Math. di Parlemo, 1915。

題,把單連通区域保角变换到圓的問題,或者把多連通区域保角变换到一定类型的区域的問題(В. И. 克雷洛夫, Математический сборник, т. 4 (46): 1; 1938)。利用柯西积分可以把这些問題归結到积分方程去。我們要叙述这一方法对彈性平面靜力学問題的解法的应用[Н. И. 穆斯海里什維利(Мусхелишвили), 彈性理論的某些問題]。如果在区域 B 的週道上我們有已給的形变作为边值条件,那末靜力学的問題的解法归結到求兩个函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$,它們在 B 中为正則,并在区域的週道上滿足边值条件:

$$-k\overline{\varphi(z')}+\bar{z}'\varphi'(z')+\psi(z')=f(z') \quad (z' \text{ 在 } l \text{ 上}), \tag{408}$$

于此 k 是某一实常数,而 $f(z')$ 为在週道 l 上已給的函数。把(408)的兩边乘上 $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z'-z}$,于此 z 在 l 外,而沿 l 积分,我們得到:

$$-\frac{k}{2\pi i}\int_l \frac{\overline{\varphi(z')}}{z'-z}dz'+\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\bar{z}'\varphi'(z')}{z'-z}dz'=F(z),$$

于此

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{z'-z}dz' \quad (z \text{ 在 } l \text{ 外})$$

为在 l 外的已知函数。把 z 趋向于 l,我們得到:

$$\frac{k}{2}\overline{\varphi(t)}-\frac{k}{2\pi i}\int_l \frac{\overline{\varphi(z')}}{z'-t}dz'-\frac{1}{2}\bar{t}\varphi'(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\bar{z}'\varphi'(z')}{z'-t}dz'=F_e(t), \tag{409}$$

于此积分应理解为其主值。为了要得到包含普通积分的方程,我們写出:

$$\frac{k}{2}\overline{\varphi(t)}+\frac{k}{2\pi i}\int_l \frac{\overline{\varphi(z')}\,\overline{dz'}}{\bar{z}'-\bar{t}}=0;\quad \frac{1}{2}\varphi'(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi'(z')dz'}{z'-t}=0。$$

把所写出的第二个方程乘以 $\bar{t}$,把兩个方程与方程(409)逐項相加,就得到:

$$k\overline{\varphi(t)}+\frac{k}{2\pi i}\int_l \overline{\varphi(z')}\,d\lg\frac{\bar{z}'-\bar{t}}{z'-t}+\frac{1}{2\pi i}\int_l \varphi'(z')\frac{\bar{z}'-\bar{t}}{z'-t}dz'=F_e(t)。$$

最后,把包含 $\varphi'(z')$ 的积分进行分部积分,我們得到:

$$k\overline{\varphi(t)}+\frac{k}{2\pi i}\int_l \overline{\varphi(z')}\,d\lg\frac{\bar{z}'-\bar{t}}{z'-t}-\frac{1}{2\pi i}\int_l \varphi(z')\,d\frac{\bar{z}'-\bar{t}}{z'-t}=F_e(t)。\tag{410}$$

如果置 $z'-t=re^{i\vartheta}$,那末前一方程可以改写为形狀:

$$k\overline{\varphi(t)}+\frac{1}{\pi}\int_l [e^{-2i\vartheta}\varphi(z')-k\overline{\varphi(z')}]d\vartheta=F_e(t)。\tag{411}$$

分开实部与虚部,我們得到在 l 上对函数 $\varphi(z')$ 的实部与虚部的由兩个积分方程所成的方程組。解这些方程,我們就有在 l 上的 $\varphi(z')$,而按柯西公式就得到在 l 內的 $\varphi(z)$。为了求出函数 $\psi(z)$,把(408)的兩边乘以 $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z'-z}$

(于此 z 在 l 内)，而沿 l 积分：

$$\psi(z)=\frac{k}{2\pi i}\int_l \frac{\overline{\varphi(z')}}{z'-z}\,dz'-\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\bar{z}'\varphi'(z')}{z'-z}\,dz'+\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z')}{z'-z}\,dz'。$$

所述的把边值問題(408)化为积分方程的方法是屬于 Н. И. 穆斯海利什維利的 (Доклады Академии Наук СССР, т. III, № 1, 1934)。 在組成方程(410)时，我們已經假設問題是有解的。 利用方程(410)，不仅对我們以上所假設的單連通区域的情形，而且也对多連通区域的情形，可以建立起所提出的彈性理論靜力学的問題的存在性定理①。

把彈性理論的平面靜力学引导到积分方程是在 В. А. 福克(Фок)的著作中給出过(Comptes Rendus, t. 182, 1926，第 264 頁)。

在方程(411)中 θ 是从迴道 l 上的定点 t 出發到同一迴道上的变点的向徑所成的角。考慮到这一点，不难見到，齐次方程(411)有异于零的解 $\varphi(z')=$ = 常数，对于方程(410)也可以說同样的話。 我們常可假設 $z=0$ 在 l 内部。从边值条件(408)的形狀就推出，我們可以从 $\varphi(z)$ 中移一常数項到 $\psi(z)$ 去，而可假設 $\varphi(0)=0$。从此推出：

$$\int_l \frac{\varphi(z')}{z'}\,dz'=0;$$

从(410)中减去这一方程，我們就会得到一个新的方程，它已是沒有特征函数的了。

在解边值問題(408)时，也可以应用另一方法②。 我們要找出具如下形狀的 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$：

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\omega(z')}{z'-z}\,dz' \qquad (z\text{ 在 }l\text{ 内})$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\overline{\omega(z')}}{z'-z}\,dz'-\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\bar{z}'\omega(z')}{z'-z}\,dz'+\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\omega(z')}{z'-z}\,\overline{dz'},$$

式中 $\omega(z')$ 是被决定的 l 上的函数。代入(403)并利用柯西型积分的性質，我們就得到对 $\omega(z')$ 的积分方程：

$$k\omega(t)-\frac{k}{2\pi i}\int_l \omega(z')\,d\lg\frac{\bar{z}'-\bar{t}}{z'-t}-\frac{1}{2\pi i}\int_l \omega(z')\,d\,\frac{\bar{z}'-\bar{t}}{z'-t}=-f(t)。$$

在上述的 Д. И. 息尔曼的著作中，考察了多連通区域的情形，也进行了对所得积分方程的分析。

① Д. И. 息尔曼(Шерман)，Доклады Академии Наук СССР, т. IV, № 3 (1935)。

② Д. И. 息尔曼，Доклады Академии Наук СССР, т. XXVII, № 9 (1940)。

§3. 抛物型与双曲型方程

242. 热傳导方程的解对初始条件、边值条件与自由項的相关性　我們从前已經建立起热傳导方程解的唯一性，其証明是基于一个定理，它断言，齐次热傳导方程的解的最大值与最小值，或者在 $t=0$ 时达到，或者在区域的边界上达到。

这个定理的証明是在一維的情形下进行的。在多維的情形下，也可完全类似地引出其证明。

現考察在平面 (x, y) 区域 B 中的非齐次热傳导方程：

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + f(x, y, t), \tag{1}$$

其初始条件与边值条件为

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y) \quad (\text{在区域 } B); \quad u|_l = \psi(x, y, t), \tag{2}$$

这里 l 是 B 的迴道。我們假設 f 是 $t\geqslant 0$ 时 $\overline{B}$ 中的連續函数。类似地，φ 假設在 $\overline{B}$ 連續，ψ 假設在 l 上 $t\geqslant 0$ 时为連續。在空間 (x, y, t) 中，設想一个柱体 D，其底面为在平面 (x, y) 的区域 B，其母綫平行于 t 軸。設 D_1 为这个柱体由平面 $t=0$ 所下界与平面 $t=T\,(T>0)$ 所上界的部分。用 S' 記 D_1 的下底 $t=0$ 及它的侧面。利用我們在[II; 209]中用来証明上面所提到的定理的那些論述的完全的类似，容易証明：

定理 1.　如果 u 在 D_1 內滿足方程(1)，直到 S' 为連續，又如在 D_1 中 $f\geqslant 0$，那末 u 在 D_1 的最小值在 S' 上达到，即或者在 $t=0$ 时达到，或者在 D_1 的側面，即在区域 B 的边界上达到。如果在 D_1 中 $f\leqslant 0$，那末 u 的最大值在 S' 上达到。

举出这定理的簡單的証明，它完全与[II; 209]中的証明相类似。只考察 $f\leqslant 0$ 的情形，并用反証法。設 u 的最大值不在 S' 上达到，而在某一点 (x', y', t') 达到，其值等于 M。引入新的函数：

$$(3) \qquad v = u - k(t - T),$$

于此 k 是正数，我們馬上就要确定它。在 $\overline{D}_1$ 中，我們有：

$$u \leqslant v \leqslant u + kT,$$

也可以固定 k 使与零充分接近，使得 v 在 S' 上的最大值，与 u 一样，小于 u 在点 (x', y', t') 的数值。因而对这样选擇的 k，函数 v 或者在 D_1 内部，或者在上底 $t=T$ 的内部达到最大值。这兩种情形皆引向矛盾。

設 v 在 D_1 内某点 $C(x, y, t)$ 达到最大值。在这一点 v 有極大，因而在 C 点

$$v_t = 0, \quad v_{xx} \leqslant 0, \quad v_{yy} \leqslant 0$$

从此推得 $v_t - v_{xx} - v_{yy} \geqslant 0$，或者，由（3）式，在 C 点 $u_t - u_{xx} - u_{yy} - k \geqslant 0$，这与方程 $u_t - u_{xx} - u_{yy} - f = 0$ 在 C 点应当滿足以及 $f \leqslant 0$ 的事实相矛盾。現設，v 在位于上底 $t=T$ 的一点 C 达到最大值。在这一点应有 $v_t \geqslant 0$，又考察 v 沿上界的变化，我們得 $v_{xx} \leqslant 0$，$v_{yy} \leqslant 0$ 在点 C 成立。完全与以前一样，这就給我們引出矛盾，定理証畢。利用所証定理，还容易建立起如下的定理：

定理 2. 如果 φ、ψ 与 f 滿足条件：在 D_1 的下底 $|\varphi| \leqslant a$，在 D_1 的側面 $|\psi| \leqslant a$，而在 $\overline{D}_1$ 中 $|f| \leqslant \frac{a}{T}$，那末在 D_1 内 $|u| \leqslant 2a$。

考察函数

$$(4) \qquad v = u + \frac{a(T-t)}{T},$$

它滿足方程：

$$v_t = v_{xx} + v_{yy} + \left(f - \frac{a}{T}\right)$$

及如下的条件：

$$v|_{t=0} = \varphi + a; \quad v|_l = \psi + \frac{a(T-t)}{T}。$$

注意到定理的条件及事实：在 D_1 的側面上 $0 \leqslant t \leqslant T$，我們就

可断言，

$$\text{在 } D_1 \text{ 中 } f-\frac{a}{T}\leqslant 0; \quad \text{在底 } t=0 \text{ 上 } |\varphi+a|\leqslant 2a$$

$$\text{在 } D_1 \text{ 的側面} \left|\psi+\frac{a(T-t)}{T}\right|\leqslant 2a。$$

这时，从定理 1 就推出 v 的最大值在 S' 上达到，因而，在 $\overline{D}_1$ 中，$v\leqslant 2a$。注意到公式（4）中右端的第二項不小于零，就可以断言 $u\leqslant 2a$。完全类似地，引入函数

$$v=u-\frac{a(T-t)}{T},$$

我們就能証明 $u\geqslant -2a$，从此也就推出 $|u|\leqslant 2a$。定理 2 給出方程（1）的解的估計，这估計是用对自由項 f 及出現在初始条件与边值条件中的函数的估計来表达的。

在三維空間中定理也可完全类似地証明。

243. 一維情形中的热傳导方程的势函数 我們現在闡明，对热傳导方程也可以建立一种理論，它类似于拉普拉斯方程的势函数理論，这样，就可以把热傳导方程的边值問題归結到积分方程。

考察齐次的热傳导方程

$$u_t=a^2u_{xx} \tag{5}$$

并設，对区間 $0\leqslant x\leqslant l$ 已提出具边值条件

$$u|_{x=0}=\omega_1(t); \quad u|_{x=l}=\omega_2(t) \tag{6}$$

与初始条件

$$u|_{t=0}=f(x) \quad (0\leqslant x\leqslant l) \tag{7}$$

的边值問題。把在区間$[0, l]$中所給定的函数 $f(x)$ 拓广到整个 x 軸去，使得它的連續，在某一有限区間外化为零。又作起方程（5）的解[II; 204]：

$$u_0(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi \quad (t>0), \tag{8}$$

它满足初始条件：

(9) $$u_0|_{t=0}=f(x) \quad (-\infty<x<+\infty)。$$

引入新的函数 $w(x, t)=u(x, t)-u_0(x, t)$ 以代替 $u(x, t)$，我們得到对 w 的方程(5)，其初始条件为齐次的：

$$w|_{t=0}=0 \quad (0\leqslant x\leqslant l),$$

在 $x=0$ 与 $x=l$ 应满足某些条件，其右边等于差式 $\omega_1(t)-w(0, t)$ 与 $\omega_2(t)-w(l, t)$。因而我們在后文中就將求方程(5)的解，使有边値条件(6)与齐次的初始条件：

(10) $$u|_{t=0}=0 \quad (0\leqslant x\leqslant l)。$$

对应于在点 $x=\xi$ 与 时間 $t=\tau$ 的热源的基本奇解为解[II; 204]：

(11) $$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}。$$

关于 ξ 微分，并添上常数因子 $2a^2$，就得到对应于偶極子的奇解：

(12) $$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}(x-\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}。$$

把最后一項乘以某一函数 $\varphi(\tau)$，而关于 τ 作从 $\tau=0$ 到 $\tau=t$ 的积分，就得到解：

(13) $$u(x, t)=\int_0^t\frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}(x-\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau,$$

对应于在点 $x=\xi$，从时間 $\tau=0$ 开始作用着的，具有强度 $\varphi(\tau)$ 的偶極子。当 $x\neq\xi$ 时函数(13)满足方程(5)这一事实直接地只利用微分就可以驗証，这时关于上限的微分的結果是零，这是因为当 $x\neq\xi$ 时被积函数当 $\tau\to t$ 时的極限为零。現証，如果 x 从左边或从右边趋向于 ξ，函数(13)会满足如下的关系式：

(14) $$u(\xi+0, t)=\varphi(t); \quad u(\xi-0, t)=-\varphi(t)。$$

設 $x\neq\xi$，引入新的积分变量

$$\alpha=\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}$$

以代替 τ。如果 $x>\xi$，則当 $\tau\to t$ 时 $\alpha\to+\infty$，如果 $x<\xi$，則当 $\tau\to t$ 时 $\alpha\to-\infty$。在新的变量之下，我們得到：

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\varphi\left[t-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2\alpha^2}\right]e^{-\alpha^2}d\alpha\quad(x>\xi),\tag{15}$$

而当 $x\to\xi+0$ 时，取極限，我們就得：

$$u(\xi+0,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(t)e^{-\alpha^2}d\alpha=\varphi(t)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=\varphi(t)。$$

(14)中的第二式可以类似地予以証明。此外，解(13)显然满足齐次边值条件

$$u\big|_{t=0}=0。\tag{16}$$

我們并不更詳細地来論述公式(15)中的取極限的过程。这过程在 $\varphi(\tau)$ 的連續性的假設下是容易作的。

假設我們已有上述的具边值条件(6)与初始条件(10)的定解問題。我們要求具有兩个偶極子之和的形式的解，它們分别地位于点 $x=0$ 及点 $x=l$。把所要求的函数順次記为 $\varphi(\tau)$ 与 $\psi(\tau)$：

$$u(x,t)=\int_0^t\frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}xe^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+\tag{17}$$

$$+\int_0^t\frac{\psi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}(x-l)e^{-\frac{(l-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau。$$

由于(14)，边值条件(6)可写成形狀：

$$\begin{aligned}&\varphi(t)-l\int_0^t\frac{\psi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau=\omega_1(t)\\&-\psi(t)+l\int_0^t\frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau=\omega_2(t)。\end{aligned}\tag{18}$$

这些方程乃是对 $\varphi(\tau)$ 与 $\psi(\tau)$ 的伏尔特拉型的积分方程組，它們的核只与 $(t-\tau)$ 有关，因而，可以依照在[46]中所描述的方法，把拉普拉斯变换应用到所写出的方程組来。又比如說，如果在一个端点所已給的并非函数 u 本身，而是它的导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$，那末在这

一端点所必須安放的并非偶極子，而是單純的热源，它的作用由公式(11)所給出。比方說，我們假設边值条件为形式：

$$u\Big|_{x=0}=\omega_1(t);\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=\omega_2(t),\tag{19}$$

而初始条件則和以前一样有形式(16)。

为了使后文的公式簡單起見，我們把解(11)乘以 $2a^2$，而来尋求形狀为

$$u(x,t)=\int_0^t\frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}xe^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+\\+\int_0^t\frac{a\psi(\tau)}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(l-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau\tag{20}$$

的解。条件(19)的前一式給出：

$$\varphi(t)+\int_0^t\frac{ae^{-\frac{l^2}{2a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}}\psi(\tau)d\tau=\omega_1(t)。$$

把方程(20)关于 x 微分，并令 x 趋向 l，由(14)式及条件(19)中第二式，得到

$$\psi(t)+\int_0^t\frac{e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\varphi(\tau)d\tau-\\-l^2\int_0^t\frac{e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}}{4a^3(t-\tau)^{5/2}}\varphi(\tau)d\tau=\omega_2(t),$$

而我們再一次得到对 $\varphi(\tau)$ 与 $\psi(\tau)$ 的积分方程組，其核依賴于差式 $(t-\tau)$。

244. 多維情形的热源　势函数的思想也可以应用到多維的热傳导問題。我們限于指出与前面相类似的結果。在多維情形下，势函数的性質的証明比一維的情形要出現大得多的困难。我們將考察平面的情形，即考察方程：

$$u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy})。\tag{21}$$

設在平面(x, y)上有区域 B，其迴道为 l。对应于在点(ξ,η)，从时刻 τ 开始作用的热源的奇解具有形狀：

$$u=\frac{1}{2\pi(t-\tau)}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\quad(r^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2)。$$

如下的公式給出單層势函数的类似：

(22) $$u(x, y, t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\int_l \frac{a(\sigma, \tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma,$$

这里 σ 是迴道 l 的弧長，它是从某一固定点量起的，而 $a(\sigma, \tau)$ 是迴道上变点 σ 与参数 τ 的函数。用 r 記点 (x, y) 到迴道 l 上的变点 σ 的距离。公式

(23) $$v(x, y, t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\int_l \frac{b(\sigma, \tau)}{t-\tau}\frac{\partial}{\partial n} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma$$

代表热的双層势函数，式中 n 是在积分变点的外法綫方向，或者

(23_1) $$v(x, y, t)=\int_0^t d\tau\int_l \frac{b(\sigma, \tau)}{4\pi a^2(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r\cos(r, n)d\sigma,$$

式中方向 r 假定是从点 σ 到点 (x, y) 的。如果引入从点 (x, y) 望綫素 $d\sigma$ 的角度 $d\varphi$，那末前一公式就可改写成形狀：

(23_2) $$v(x, y, t)=-\int_l d\varphi\int_0^t \frac{b(\sigma, \tau)}{4\pi a^2(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r^2 d\tau。$$

双層势函数在迴道上的点 $\sigma_0(x_0, y_0)$ 的極限値是由下面的公式所定义：

(24) $$\begin{gathered} v_i(x_0, y_0, t)=-b(\sigma_0, t)+ \\ +\int_0^t d\tau\int_l \frac{b(\sigma, \tau)}{4\pi a^2(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_0^2}{4a^2(t-\tau)}} r_0\cos(r_0, n)d\sigma \\ v_e(x_0, y_0, t)=b(\sigma_0, t)+\cdots, \end{gathered}$$

式中 r_0 是积分变点到点 $\sigma_0(x_0, y_0)$ 的距离。在穿过迴道 l 时，單層势函数 (22) 是連續的，它沿在点 σ_0 的 l 的法綫 n_0 的导数在这一点有依如下公式所定义的極限値：

(25) $$\begin{gathered} \left(\frac{\partial u(x_0, y_0, t)}{\partial n_0}\right)_i= \\ =a(\sigma_0, t)-\int_0^t d\tau\int_l \frac{a(\sigma, \tau)}{4\pi a^2(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_0^2}{4a^2(t-\tau)}} r_0\cos(r_0, n_0)d\sigma \\ \left(\frac{\partial u(x_0, y_0, t)}{\partial n_0}\right)_e=-a(\sigma_0, t)-\cdots。 \end{gathered}$$

利用所指出的公式，可以把边値問題的解法归結到积分方程。例如，我們要求 B 内滿足方程 (21) 的函数 $v(x, y, t)$，它在迴道 l 上有已給的边値：

(26) $$v|_l=\omega(s, t),$$

于此，s 是迴道上点的坐标，它是从某一点算起的弧長 s 所确定。我們假設初始資料等于零。我們要求具双層势函数 (23) 形狀的解，由于 (24) 中前一个等式，我們就得到对函数 $b(\sigma, \tau)$ 的积分方程：

$$(27)\qquad -b(s, t)+\int_0^t d\tau\int_l \frac{b(\sigma, \tau)}{4\pi a^2(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r\cos(r, n)d\sigma = \omega(s, t),$$

式中 r 是迴道 l 上点 s 与 σ 的距离，方向 r 設为从 σ 到 s。在所写的积分方程中，关于 σ 的积分是在定区間 $(0, L)$ 中进行，这里 L 是迴道 l 的長，而关于 τ 积分时，上限是变的。換言之，所写的积分方程关于变量 σ 具有弗列德和霍方程的性格，关于变量 τ 具有伏尔特拉方程的性格。虽然方程(27)具有这样的混合的性格，但是对伏尔特拉方程所叙述过的那种普遍的逐次逼近法，在方程(27)的情形却也是适合的。这个方法对于由几个迴道所界成的区域也适用。它容易推广到三維的情形，也可应用到外部問題。利用对于全平面或全空間的問題的解，把初始条件化为零这一事实也可以与一維情形一样来进行。在三維空間的情形解的公式已在[II; 204]中給出过。在二維的情形，这公式具形狀：

$$u(x, y, t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} f(\xi, \eta)d\xi d\eta。$$

热势函数的性質以及它們在边值問題上的应用的研究在以下的著作中有的：

(1)列維(E. Levi), Annali di Matematica, 1908; (2)乔甫来(Gevrey) Journ. de Mathem. pure et appl. t. 9, 1913; (3)苗茲(Мюнц), Math. Zeitschr. Bd. 38; Heft 3, 1934; (4)苗茲，积分方程(Интегральные уравнения)，列宁格勒 1934; (5)A. H. 吉洪諾夫，Бюлл. Московского Университета, 1938。

245. 热傳导方程的格林函数。 完全与对拉普拉斯方程一样，对热傳导方程，也可以引入格林函数。为后文的記法方便起見，用 $u_0(x-\xi, t-\tau)$ 来記基本奇解(11)。在齐次边值条件

$$(28)\qquad u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$$

下，对閉区間 $0\leqslant x\leqslant l$ 的格林函数可定义如下：

$$(29)\qquad G(x, t;\xi, \tau)=\begin{cases} u_0(x-\xi, t-\tau)-u(x, t;\xi, \tau) & t\geqslant\tau \\ 0 & t\leqslant\tau, \end{cases}$$

式中 $u(x, t;\xi, \tau)$ 在 $0<x<l$, $t>\tau$ 时滿足热傳导方程，并滿足在 $t=\tau$ 时的齐次初始条件：

$$(30)\qquad u(x, \tau;\xi, \tau)=0$$

及边值条件：$x=0$ 及 $x=l$ 时，$t>\tau$

$$(30_1)\qquad u(x, t;\xi, \tau)=u_0(x-\xi, t-\tau)。$$

在所写公式中，ξ 与 τ 为固定的。并且 $0<\xi<l$。从所引入的定义中直接推出，$u(x, t;\xi, \tau)$ 及格林函数只与差式 $\alpha=t-\tau$ 有关，而可以把 $u(x, t;\xi, \tau)$ 写成 $u(x,\xi,\alpha)$，可以把 $G(x, t;\xi, \tau)$ 写成 $G(x, \xi, \alpha)$。条件(30)与(30_1)給出函数 $u(x, \xi, \alpha)$ 在由半直綫 $x=0$ 与 $x=l$ $(t\geqslant\tau)$ 及直綫 $t=\tau$ 上由 $0\leqslant x\leqslant l$ 所决定的綫段所圍成的半帶域的迴道上的極限值。在这一半帶域的頂点上，这些極限值为連續。这直接可从如下事实推出，当 x 固定而不等于 ξ 且 t 趋向于 $(\tau+0)$ 时，解(11)趋向于零。注意到所指出的边值都不小于零，我們可断言，$u(x, t, \alpha)\geqslant 0$，因而，由于(29)，就有：$G(x, \xi, \alpha)\leqslant u_0$。格林函数在 $t=$ $=\tau+0$ 及 $x=\xi$ 时有奇性，它的奇性是由 u_0 的奇性所表明的。我們有 $u_0\geqslant 0$，并由于(30)，当 $\alpha\to 0$ 时 $u(x, \xi, \alpha)\to 0$，从此直接推出对于格林函数的第二个不等式：$G(x, \xi, \alpha)\geqslant 0$。可以証明格林函数关于 x 及 ξ 的对称性。

利用格林函数，可以作非齐次热傳导方程的解，但它満足齐次的边值条件，这就是，如果 $\pi(x, t)$ 是在区間 $(0, l)$ 的連續函数，在 $t>0$ 有一阶的連續导数，那末函数

$$w(x, t)=\int_0^t d\tau\int_0^l G(x, \xi, \alpha)\pi(\xi, \tau)d\xi \tag{31}$$

満足方程：
$$\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\pi(x, t)$$

及零边值条件与零初始条件。

所述的事实的全部也可以在多維空間內导出。叙述过的那些論斷的証明可以在上面提到过的 A. H. 吉洪諾夫的著作中找到。

246. 拉普拉斯变换的应用 如同我們所已提到过，在解积分方程組(18)时，可以应用拉普拉斯变换。这一变换可以直接地应用到微分方程(5)本身。在这情形下，我們將应用單側变换

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt=L_1(F)。\tag{32}$$

設我們有边值条件(6)及齐次的初始条件(10)。我們引入 $u(x, t)$ 的拉普拉斯变换：

$$\varphi(x, s)=\int_0^\infty e^{-st}u(x, t)dt \tag{33}$$

代替 $u(x, t)$ 来作为未知函数。施用分部积分，并假設 $e^{-st}u(x, t)$ 的导数在 $t=\infty$ 时化为零。注意到齐次的初始条件(16)，我們得到：

$$\varphi(x, s)=-\frac{1}{s}\int_0^\infty u(x, t)de^{-st}=\frac{1}{s}\int_0^\infty\frac{\partial u}{\partial t}e^{-st}dt。$$

只要变更 t 或 x 的單位，就可以在方程(5)中假設 $a=1$。对方程的兩边应用拉普拉斯变换，并假設，在公式(33)中可以对 x 在积分号下求导数，我們就得到对 $\varphi(x, s)$ 的方程：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=s\varphi, \tag{34}$$

在其中只有关于 x 的导数出現。

对方程(6)应用拉普拉斯变换，我們得到对 φ 的边值条件：

$$\varphi|_{x=0}=\alpha_1(s);\quad \varphi|_{x=l}=\alpha_2(s), \tag{35}$$

于此

$$\alpha_k(s)=\int_0^\infty e^{-st}\omega_k(t)\,dt\quad (k=1,\ 2)。 \tag{36}$$

在边值条件(35)之下，解方程(34)，就不难求出解的显式：

$$\varphi(x,\ s)=\alpha_1(s)\varphi_1(x,\ s)+\alpha_2(s)\varphi_2(x,\ s), \tag{37}$$

式中

$$\varphi_1(x,\ s)=\frac{\sin(l-x)\sqrt{-s}}{\sin l\sqrt{-s}};\quad \varphi_2(x,\ s)=\frac{\sin x\sqrt{-s}}{\sin l\sqrt{-s}}。 \tag{38}$$

对函数(37)应用(32)的逆变换，我們就得到要求的函数 $u(x, t)$。这个函数是可以直接由在边值条件中出現的函数 $\omega_1(t)$ 与 $\omega_2(t)$ 以及雅可比函数 $\theta_3(v)$ [III$_2$; 176]所表示，并且在作出最后一函数时，我們取 $h=e^{-\pi t}$。我們用 $\theta_3(v, t)$ 来記这一雅可比函数：

$$\theta_3(v,\ t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{2ni\pi v-n^2\pi^2 t}。 \tag{39}$$

如下的公式是进一步的計算的基础：

$$L_1[\theta_3(v,\ t)]=-\frac{\cos(2v-1)\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\,\sin\sqrt{-s}}=\psi(v,\ s)\quad (0\leqslant v\leqslant 1), \tag{40}$$

为記法簡單計，这里我們用 $\psi(v, s)$ 来記所写的分式。公式(33)可以改写成为形状：

$$\begin{cases}\varphi_1(x,\ s)=-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial\psi(v,\ l^2s)}{\partial v}\right]_{v=\frac{x}{2l}} & (0\leqslant x\leqslant 2l)\\[2ex] \varphi_2(x,\ s)=-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial\psi(v,\ l^2s)}{\partial v}\right]_{v=\frac{l-x}{2l}} & (-l\leqslant x\leqslant l)。\end{cases} \tag{41}$$

此外，我們显然还有：

$$f(l^2s)=\int_0^\infty e^{-l^2st}F(t)\,dt=\frac{1}{l^2}\int_0^\infty e^{-st}F\left(\frac{t}{l^2}\right)dt,$$

这就是，在变换(32)中，把 $f(s)$ 改为 $f(l^2s)$ 就等价于把 $F(t)$ 改为 $\frac{1}{l^2}F\left(\frac{t}{l^2}\right)$。注意到这一情况以及公式(40)与(41)，且在积分号下关于 v 进行微分，我們就得到：

$$L_1^{-1}\{\varphi_1(x,\ s)\}=-\frac{1}{2l^2}\left[\frac{\partial\vartheta_3\left(v,\frac{t}{l^2}\right)}{\partial v}\right]_{v=\frac{x}{2l}}=$$

$$=-\frac{1}{l}\frac{\partial\vartheta_3\left(\frac{x}{2l},\frac{t}{l^2}\right)}{\partial x}\quad(0\leqslant x\leqslant 2l)$$

$$L_1^{-1}\{\varphi_2(x,\ s)\}=-\frac{1}{2l^2}\left[\frac{\partial\vartheta_3\left(v,\frac{t}{l^2}\right)}{\partial v}\right]_{v=\frac{l-x}{2l}}=$$

$$=\frac{1}{l}\frac{\partial\vartheta_3\left(\frac{l-x}{2l},\frac{t}{l^2}\right)}{\partial x}\quad(-l\leqslant x\leqslant l)。$$

现对函数(37)应用变换 L_1^{-1} 并注意到公式(36)及卷积定理，我們最后得到：

$$u(x,\ t)=-\frac{1}{l}\,\omega_1(t)*\frac{\partial\vartheta_3\left(\frac{x}{2l},\frac{t}{l^2}\right)}{\partial x}+\tag{42}$$

$$+\frac{1}{l}\,\omega_2(t)*\frac{\partial\vartheta_3\left(\frac{l-x}{2l},\frac{t}{l^2}\right)}{\partial x}\quad(0<x<l),$$

于此我們引入如下的記号：

$$F_1(t)*F_2(t)=\int_0^t F_1(\tau)F_2(t-\tau)d\tau。$$

可以用函数 $\vartheta_3(v,\ t)$ 来表示我們在前段討論过的格林函数。首先注意到公式(40)只对区間 $0\leqslant v\leqslant 1$ 成立。如果 $-1\leqslant v\leqslant 0$，那末 $0\leqslant v+1\leqslant 1$，又注意到 $\vartheta_3(v,\ t)$ 的周期性，我們就可以写出：

$$L_1[\vartheta_3(v,\ t)]=L_1[\vartheta_3(v+1,\ t)]=-\frac{\cos[2(v+1)-1]\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin\sqrt{-s}}$$

$$(0\leqslant v+1\leqslant 1),$$

即

$$L_1[\vartheta_3(v,\ t)]=-\frac{\cos(2v+1)\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin\sqrt{-s}}\quad(-1\leqslant v\leqslant 0)。\tag{43}$$

现取非齐次方程

(44) $$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\pi(x, t),$$

具有齐次的初始条件与齐次的边値条件。引入函数

(45) $$\sigma(x, s)=L_1[\pi(x, t)]=\int_0^\infty e^{-st}\pi(x, t)dt,$$

幷对方程(44)应用拉普拉斯变換，我們得到：

(46) $$\frac{\partial^2\varphi(x, s)}{\partial x^2}-s\varphi(x, s)=-\sigma(x, s)$$

及边値条件：

(47) $$\varphi(0, s)=\varphi(l, s)=0。$$

不难驗証，在这些边値条件下，方程(46)的左边的算子的格林函数就是：

(48) $$\gamma(x, \xi; s)=\begin{cases}\dfrac{\sin(l-\xi)\sqrt{-s}\cdot\sin x\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin l\sqrt{-s}} & (x\leqslant\xi)\\[2ex] \dfrac{\sin(l-x)\sqrt{-s}\cdot\sin\xi\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin l\sqrt{-s}} & (x\geqslant\xi),\end{cases}$$

幷用这个格林函数，可以把方程(46)的滿足边値条件(47)的解表达为如下的形状：

(49) $$\varphi(x, s)=\int_0^l\gamma(x, \xi; s)\sigma(\xi; s)d\xi。$$

为了施行变換 L_1^{-1}，把函数(48)表示为形式：

(50) $$\gamma(x, \xi; s)=\begin{cases}-\dfrac{\cos(x-\xi+l)\sqrt{-s}}{2\sqrt{-s}\sin l\sqrt{-s}}+\dfrac{\cos(x+\xi-l)\sqrt{-s}}{2\sqrt{-s}\sin l\sqrt{-s}} & (x\leqslant\xi)\\[2ex] -\dfrac{\cos(x-\xi-l)\sqrt{-s}}{2\sqrt{-s}\sin l\sqrt{-s}}+\dfrac{\cos(x+\xi-l)\sqrt{-s}}{2\sqrt{-s}\sin l\sqrt{-s}} & (x\geqslant\xi)。\end{cases}$$

我們注意到，如果 $0\leqslant x\leqslant\xi\leqslant l$，則 $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{x-\xi}{2l}\leqslant 0$ 而 $0\leqslant\frac{x+\xi}{2l}\leqslant 1$，但如果 $0\leqslant\xi\leqslant x\leqslant l$，則 $0\leqslant\frac{x-\xi}{2l}\leqslant\frac{1}{2}$ 而 $0\leqslant\frac{x+\xi}{2l}\leqslant 1$，又利用公式(40)与(43)，就得出：

(51) $$L_1^{-1}[\gamma(x, \xi; s)]=G(x, \xi; t)=\frac{1}{2l}\left[\vartheta_3\left(\frac{x-\xi}{2l}, \frac{t}{l^2}\right)-\vartheta_3\left(\frac{x+\xi}{2l}, \frac{t}{l^2}\right)\right]。$$

从卷积定理推出：

$$L_1^{-1}[\gamma(x, \xi; s)\sigma(\xi; s)]=\int_0^t\pi(\xi, \tau)G(x, \xi; t-\tau)d\tau,$$

因而，依据公式(49)，就有：

(52) $$u(x, t)=\int_0^l d\xi\int_0^t\pi(\xi, \tau)G(x, \xi; t-\tau)d\tau。$$

把这公式与公式(31)相比較，我們看到，依据(51)借助函数 $\vartheta_3(v, t)$ 所定义的函数 $G(x, \xi; t-\tau)$ 是我們在前段中已經討論过的热傳导方程的格林函数。

現指出公式(40)的証明，这个公式是上述計算的基础。我們已有公式

$$\cos zx = \frac{2z\sin \pi z}{\pi}\left(\frac{1}{2z^2}+\frac{\cos x}{1^2-z^2}+\frac{\cos 2x}{2^2-z^2}+\cdots\right),$$

它在区間 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 有效[II; 145]。在其中置 $x=2\pi v-\pi$, $z=\frac{\sqrt{-s}}{\pi}$,我們得到：

$$-\frac{\cos(2v-1)\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\,\sin\sqrt{-s}}=\frac{1}{s}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi v}{s+n^2\pi^2},$$

上面所写的对 x 的不等式給出 $0\leqslant v\leqslant 1$。另一面，我們有 $\vartheta_3(v, t)$的富里埃級数的展开式[III$_2$; 176]：

$$\vartheta_3(v, t)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi^2 t}\cos 2n\pi v。$$

所写的級数在原点右边的任何有限区間 $0<\varepsilon\leqslant t\leqslant T$ 內关于 t 都一致收斂。假設 s 的实部为正，并分部积分，我們得到：

$$\int_\varepsilon^T e^{-st}\vartheta_3(v, t)dt=\frac{e^{-s\varepsilon}-e^{-sT}}{s}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi v}{s+n^2\pi^2}\left[e^{-(s+n^2\pi^2)\varepsilon}-e^{-(s+n^2\pi^2)T}\right]。$$

分母中有 n^2，这便給出了这一級数关于 ε 及 T 的一致收斂性。在 $\varepsilon\to 0$ 与 $T\to\infty$ 时取極限，我們得到：

$$\int_0^\infty e^{-st}\vartheta_3(v, t)dt=\frac{1}{s}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi v}{s+n^2\pi^2},$$

这就給出公式(40)。

把拉普拉斯方程应用到热傳导問題的詳細叙述可以在段栾(Doetsch)的著作中找到：Math. Zeitschrift Bd. 22, 25, 26, 28与他的書“拉普拉斯变换及其应用”(Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation)。

247. 有限差分的应用 考察非齐次热傳导方程：

$$u_t=a^2u_{xx}+\pi(x, t), \tag{53}$$

其初始条件为

$$u|_{t=0}=f(x) \quad (0\leqslant x\leqslant l), \tag{54}$$

而边值条件为齐次的：

$$u|_{x=0}=0;\quad u|_{x=l}=0, \tag{55}$$

并且，在以后的式子中我們設 $a=1$ 与 $l=1$。这常可以由改变 t 与 x 的單位而达到。取 t 变化的某一区間 $[0, T]$，用点 $t_k=kh(k=0, 1, \cdots, n)$ 把它分为 n 等分，于此 $h=\frac{T}{n}$。在方程(53)中置 $t=t_{k+1}$，把关于 t 的导数改为函数的改变量与自变量的改变量 h 之比。这样改变的結果就使我們得到对函数 $u_k(x)$ 的一組常微分方程，这里 $u_k(x)$ 是 $u(x, t_{k+1})$ 的近似值，因为我們已把关于 t 的导数改为上面所提到的比值。显然，关于 $u_k(x)$ 的微分方程組的形狀是

$$\frac{d^2u_{k+1}(x)}{dx^2}=\frac{u_{k+1}(x)-u_k(x)}{h}-\pi(x, t_{k+1}) \tag{56}$$

$$(k=0, 1, \cdots, n-1)。$$

注意到(54)，我們置 $u_0(x)=f(x)$，而对其余的 $u_{k+1}(x)$ 我們要使它們滿足边值条件(55)：

$$u_{k+1}(0)=u_{k+1}(1)=0 \quad (k=0, 1, \cdots, n-1)。 \tag{57}$$

計算的过程归結为如下的方式。在方程(56)中置 $k=0$，用 $u_0(x)=f(x)$ 代入，我們得到对 $u_1(x)$ 的二阶微分方程，我們应当在边值条件(57)下来积分它。这样求出了 $u_1(x)$ 之后，在方程(56)中置 $k=1$，我們就得到对 $u_2(x)$ 的方程，我們应当在边值条件(57)下来积分它，余依此类推。我們必須进一步地研究形狀为

$$\frac{d^2y}{dx^2}-m^2y=-\pi(x) \tag{58}$$

的方程在边值条件

$$y(0)=y(1)=0 \tag{59}$$

下的情形，于此，我們記 $m^2=1:h$。要引入方程(58)的左边的算子在边值条件(59)下的格林函数。不难驗証，它具有形狀[172]：

$$G(x, \xi)= \tag{60}$$

$$=\begin{cases} -(e^{mx}-e^{-mx})[e^{m(\xi-1)}-e^{-m(\xi-1)}]/2m(e^m-e^{-m}) & (x\leqslant\xi) \\ -[e^{m(x-1)}-e^{-m(x-1)}](e^{m\xi}-e^{-m\xi})/2m(e^m-e^{-m}) & (x\geqslant\xi), \end{cases}$$

而方程(58)的满足边值条件(59)的解可由公式

(61) $$y(x)=\int_0^1 G(x,\xi)\pi(\xi)d\xi$$

来表示。

現証引理:对方程(58)的满足边值条件(59)的解,成立估計式

(62) $$|y(x)|\leqslant\frac{1}{m^2}\max_{0<x<1}|\pi(x)|。$$

首先考察在区間[0,1]上 $\pi(x)\geqslant 0$ 的情形。現証,在这时 $y(x)\geqslant 0$。事实上,如果不是这样,那末在区間中 $y(x)$ 应有負的極小值,因而在相应的点就会有 $y''\geqslant 0$ 及 $m^2y<0$,这与 $\pi(x)\geqslant 0$ 的(58)式相矛盾。不等式 $y(x)\geqslant 0$ 也可从(61)推出。

因而,$y(x)$的所有值是非負的,在区間[0,1]内的某点,这函数取正的最大值。在这一点应有 $y''(x)\leqslant 0$,并由方程(58)直接推出 $-m^2y(x)\geqslant-\pi(x)$,从此就推出估計(62)。如果 $\pi(x)$取負值,那末利用公式(61),并注意到格林函数不采取負值,我們得到估計式:

(63) $$|y(x)|\leqslant\int_0^1 G(x,\xi)|\pi(\xi)|d\xi。$$

所写的不等式的右边是方程

$$\frac{d^2z}{dx^2}-m^2z=-|\pi(x)|$$

的解,而且满足边值条件(59)。对这个解,如我們剛才所証,成立估計:

$$z(x)\leqslant\frac{1}{m^2}\max_{0<x<1}|\pi(x)|$$

由于(63),估計(62)因而也更能成立。

現进入考察以 $u_{k+1}(x)$来代替 $u(x,t_{k+1})$所得到的誤差 $\gamma_{k+1}(x)$ 及以改变量之比来代替函数的导数所得到的誤差 $\eta_{k+1}(x)$:

$$\gamma_{k+1}(x)=u(x,\ t_{k+1})-u_{k+1}(x)$$

(64)

$$\eta_{k+1}(x)=\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}\bigg|_{t=t_{k+1}}-\frac{u(x,\ t_{k+1})-u(x,\ t_k)}{h},$$

于此显然有 $\gamma_0(x)\equiv 0$。在方程(53)中令 $t=t_{k+1}$，把所得方程与(56)相加，我們就有方程：

$$\frac{d^2\gamma_{k+1}(x)}{dx^2}=\frac{\gamma_{k+1}(x)-\gamma_k(x)}{h}+\eta_{k+1}(x)$$

或

$$\frac{d^2\gamma_{k+1}(x)}{dx^2}-m^2\gamma_{k+1}(x)=-m^2\gamma_k(x)+\eta_{k+1}(x)。\tag{65}$$

如果假設 $u(x,\ t)$ 有直到 $t=0$ 为連續的关于 t 的导数，那末从 $\eta_{k+1}(x)$ 的表示式(64)，利用有限改变量公式，就能断言，对函数 $\eta_{k+1}(x)$，成立估計式：$|\eta_{k+1}(x)|\leqslant\tau$. 这里 τ 与 k 及 x 無关，并且随同 h 趋向于零。用 δ_k 記 $|\gamma_k(x)|$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的極大。对方程(65)应用上面所証的引理，我們得到：$\delta_{k+1}\leqslant\delta_k+h\tau$。把这个不等式从 $k=0$ 到 $k=n-1$ 作和，并注意到 $\delta_0=0$，我們得到 $\delta_n\leqslant nh\tau=$ $=T\tau$。如果从 $k=0$ 到某一 $k=m\leqslant n-1$ 作和，这一不等式当更能成立，即

$$|u(x,\ t_m)-u_m(x)|\leqslant T\tau\quad(m=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)。\tag{66}$$

因而我們見到，誤差 $\gamma_m(x)$ 随同 h 趋向于零。在証明这个事实时，我們作了假設，問題的解 $u(x,\ t)$ 是存在的，并且有直到 $t=0$ 为連續的关于 t 的导数。

所指出的有限差分法的应用是屬于罗台 (Rothe) 的，叙述于他的著作"二維抛物型方程的边値問題作为一維边値問題的極限情形的处理"(Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben. Math. Annalen. Bd. 102, Heft 4/5; 1929)。在这一著作中考察更一般形式的方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+\pi(x,t,u),$$

且所敍述的方法还利用来証明解的存在性。

如果我們有非齐次的边值条件：

$$u|_{x=0}=\omega_1(t);\quad u|_{x=l}=\omega_2(t),$$

那末按如下公式引入新的未知函数 v

$$v=u-(1-x)\omega_1(t)-x\omega_2(t)$$

以代替 u，我們就能引导到齐次的边值条件。所示的函数的代换改变了自由項 $\pi(x,t)$，它并不起十分重要的作用。

248．富里埃方法 在以前，我們常用富里埃方法来解边值問題。我們利用积分方程理論来导引这个方法的基础。在三个自变量的情况，我們在具迴道 l 的区域 B 中来考察齐次方程

$$u_t=u_{xx}+u_{yy}, \tag{67}$$

其初始条件及边值条件为

$$u|_{t=0}=f(P)\quad (P\text{ 在 }\overline{B}\text{ 中}); \tag{68}$$

$$u_l|=0。 \tag{69}$$

富里埃方法給出这个問題的如下形式的解：

$$u(P;t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-\lambda_k t}v_k(P), \tag{70}$$

式中 λ_k, $v_k(P)$ 是方程

$$\Delta v+\lambda v=0,$$

在边值条件

$$v|_l=0 \tag{71}$$

下的特征值与特征函数，而 a_k 是函数 $f(P)$ 的富里埃系数：

$$a_k=\iint_B f(P)v_k(P)\,dS。 \tag{72}$$

我們設函数 $f(P)$ 本身为連續，在閉区域 $\overline{B}$ 中有到二阶的連續导数，函数本身在 l 上等于零。这时[22]

$$f(P)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k v_k(P) \tag{73}$$

而所写的級数在 $\bar{B}$ 上正則收斂，即級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k v_k(P)| \tag{74}$$

在 $\bar{B}$ 上一致收斂。

注意到 $t\geqslant 0$ 时 $0\leqslant e^{-\lambda_k t}\leqslant 1$，我們可以断言，如果 P 屬于 $\bar{B}$ 而 $t\geqslant 0$，那末級数(70)正則收斂。因而其和 $u(P;t)$ 是 P 与 t 的連續函数，只要 P 屬于 $\bar{B}$ 而 $t\geqslant 0$。从此推出：

$$\lim_{t\to+0}u(P;t)=u(P;0)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k v_k(P)=f(P),$$

即由公式(70)所定义的函数 $u(P;t)$ 满足初始条件(68)。其次，每一函数 $v_k(P)$ 滿足边值条件(69)，因而在 $t\geqslant 0$ 时函数 $u(P;t)$ 也滿足这一条件。余下来还要証明函数 $u(P;t)$ 在 B 内及 $t>0$ 时有关于 t 的連續导数以及連續导数 u_{xx}, u_{yy}，且滿足方程(67)。

对級数(70)关于 t 逐項微分：

$$-\sum_{k=1}^{\infty}a_k\lambda_k e^{-\lambda_k t}v_k(P), \tag{75}$$

且設 α 是任意选擇的正数。我們注意到，对所有充分大的 k，会有 $0<\lambda_k e^{-\lambda_k\alpha}<1$ 又級数(74)是一致收斂的，因此就能断定只要 P 屬于 $\bar{B}$ 且 $t\geqslant\alpha$ 級数(75)就正則收斂。完全类似地可以証明由級数(75)关于 t 逐項微分后所得的級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\lambda_k^2 e^{-\lambda_k t}v_k(P)$$

在上述条件下也正則收斂。从此推出，$u(P;t)$ 关于 t 在 $t>0$ 及 P 屬于 $\bar{B}$ 时有連續的第一阶与第二阶导数，并且对这些导数，我們有：

$$u_t(P;t)=-\sum_{k=1}^{\infty}a_k\lambda_k e^{-\lambda_k t}v_k(P); \tag{76$_1$}$$

$$(76_2)\qquad u_{tt}(P;t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\lambda_k^2e^{-\lambda_k t}v_k(P)。$$

对关于 t 的任一阶的导数，类似的論述也适用。

但我們有

$$v_k(P)=\lambda_k\iint_B G(P;Q)v_k(Q)dS,$$

式中 $G(P;Q)$ 是在边值条件 (71) 下的拉普拉斯算子的格林函数。又公式 (76_1) 可以改写为

$$u_t(P;t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\iint_B a_k\lambda_k^2e^{-\lambda_k t}G(P;Q)v_k(Q)dS$$

的形狀。注意到級数 (76_2) 当 $t>0$ 时在 $\overline{B}$ 中的一致收斂性，我們就可以交换作和与积分，而得到

$$(77)\qquad u_t(P;t)=-\iint_B G(P;Q)u_{tt}(Q;t)dS,$$

而完全类似地，也有

$$(78)\qquad u(P;t)=-\iint_B G(P;Q)u_t(Q;t)dS。$$

函数 $u_{tt}(Q;t)$ 当 $t>0$ 时在 $\overline{B}$ 連續，且从 (77) 推出，在 B 內，当 $t>0$ 时，$u_t(P;t)$ 有关于点 P 的坐标 (x, y) 的第一阶的連續导数。因此，公式 (78) 指明，$u(P;t)$ 当 $t>0$ 时在 B 內有到二阶的連續导数，且滿足方程

$$\Delta u(P;t)=u_t(P;t),$$

这就是我們所要証明的。

249. 非齐次方程 現考察非齐次方程：

$$(79)\qquad u_t=u_{xx}+u_{yy}+\pi(x, y, t),$$

具有齐次的初始条件与边值条件的情形

$$(80)\qquad \lim_{t\to+0}u=0;$$

$$(81)\qquad u|_l=0。$$

我們引入自由項的富里埃系数：

$$b_k(t)=\iint\limits_B \pi(P;t)v_k(P)dS \tag{82}$$

并求具形狀

$$u(P;t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(t)v_k(P) \tag{83}$$

的問題的解。代入方程(79)，并注意到 $\Delta v_k=-\lambda_k v_k$，我們得到对系数 $c_k(t)$ 的微分方程：

$$c_k'(t)=-\lambda_k c_k(t)+b_k(t),$$

从此，我們并注意到(80)，卽 $c_k(0)=0$，就得出：

$$c_k(t)=\int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)}b_k(t')dt',$$

而代入(83)中，就有

$$u(P;t)=\sum_{k=0}^{\infty}v_k(P)\int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)}b_k(t')dt'。 \tag{84}$$

我們在对自由項作如下的假設下来驗証这个解的有效性：对任何 $t\geqslant 0$ 在 B 内 $\pi(P;t)$ 关于点 P 的坐标有第一阶的連續导数，而当 P 屬于闭区域 $\bar{B}$，t 屬于任一有限閉区間 $[0,T]$ 时，級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k(t)v_k(P);\quad \sum_{k=1}^{\infty}b_k(t)\lambda_k v_k(P);\quad \sum_{k=1}^{\infty}b_k(t)\lambda_k^2 v_k(P) \tag{85}$$

正則收斂。由于注意到(85)中第一个級数的正則收斂性及如下事实：当 $0\leqslant t'\leqslant t$ 时，$0\leqslant e^{\lambda_k(t-t')}\leqslant 1$，我們就能断言，在公式(84)右边的級数，在对 P 与 t 的所示的条件下，为一致收斂的。它的和 $u(P;t)$ 是 P 与 t 在这些条件下的連續函数。从(84)右边的形狀直接推出 $u(P;t)$ 滿足条件(80)与(81)。

余下来还要驗証，公式(84)所确定的函数 $u(P;t)$ 在 B 内当 $t>0$ 时有相应的連續导数，且滿足方程(79)。关于 t 逐項微分在公式(84)中的级數，得出：

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) v_k(P) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k v_k(P) \int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)} b_k(t') dt'。$$

注意到(85)中第二个級数的正则收斂性，我們可以断言，在所写的差式中作为减数的那个級数，在 P 与 t 的前述条件下，为一致收斂。作为被减数的級数之和等于 $\pi(P; t)$，这是因为，按条件，这一級数在[22]正則收斂。因而我們有。

$$(86) \qquad u_t(P; t) = \pi(P; t) - \sum_{k=1}^{\infty} v_k(P) \lambda_k \int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)} b_k(t') dt',$$

并且在对 P 与 t 的所述条件下，$u_t(P; t)$ 是連續的。

把这一公式中的 P 改为 Q，兩端乘以 $G(P;Q)$，又在 B 中积分，注意到 $v_k(P)$ 的积分方程，我們就得出：

$$\iint_B G(P; Q) u_t(Q; t) dS = \iint_B G(P; Q) \pi(Q; t) dS -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} v_k(P) \int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)} b_k(t') dt',$$

并且最后一級数的和等于 $u(P; t)$。因而

$$(87) \qquad u(P; t) = -\iint_B G(P; Q) u_t(Q; t) dS +$$

$$+ \iint_B G(P; Q) \pi(Q; t) dS。$$

因为 $\pi(Q; t)$ 在 B 中有連續的导数，我們可以断言，最后这个积分在 B 內关于 P 点的坐标有到二阶的連續导数，而这一积分的拉普拉斯算子等于$[-\pi(Q; t)]$。

現利用(85)中第三个級数的正則收斂性来証明 $u(P; t)$ 在 B 內有到二阶的連續导数且滿足方程(79)。

記：

$$w(Q; t) = -u_t(P; t) + \pi(P; t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} v_k(P) \lambda_k \int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)} b_k(t') dt'。$$

注意到(85)中第三个級数的正則收斂性，我們可以把所写出的一致收斂的級数关于 t 逐項微分，由此得到：

$$w_t(P;t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k b_k(t)\,v_k(P)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}v_k(P)\lambda_k^2\int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)}b_k(t')\,dt',$$

并且所写出的級数是一致收斂的。把后一公式中的 P 改为 Q，在兩边乘以 $G(P;Q)$，求积分并注意到 $v_k(P)$ 的积分方程，我們就得到：

$$\iint_B G(P;Q)\,w_t(Q;t)\,dS=\sum_{k=1}^{\infty}b_k(t)\,v_k(P)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}v_k(P)\,\lambda_k\int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)}b_k(t')\,dt',$$

因此，注意到(86)式，我們得出：

$$u_t(P;t)=\iint_B G(P;Q)\,w_t(Q;t)\,dS,$$

从此推出，在 B 内 $u_t(P;t)$ 有第一阶的連續导数。然后，公式(87)指明，$u(P;t)$ 在 B 内有到二阶的連續导数，又滿足方程

$$\Delta u(P;t)=u_t(P;t)-\pi(P;t),$$

因而，公式(84)完全証实。

如果只討論方程(79)的广义解，那末也可以在对自由項的較少的假設下来驗証公式。讓我們来提醒一下方程(79)的广义解的定义。如果 D 是在[242]中說过的柱体，D_1 是它用平面 $t=T$ 来作为上底的部分。如果对每一在 D_1 内有到二阶連續导数的函数 $\sigma(P;t)$，它并且在与边界充分接近的点等于零，函数 $u(P;t)$ 能使公式

$$(88)\qquad \iiint_{D_1}u(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_t)\,dx\,dy\,dt=-\iiint_{D_1}\pi\sigma\,dx\,dy\,dt$$

成立，那末我們就称 $u(P;t)$ 是方程的广义解。現設当 P 屬于 $\bar{B}$

而 t 屬于有限区間 $[0, T]$ 时，級数(85)正則收斂。这时所提到的級数的和等于 $\pi(P; t)$，且如我們从前所見，級数(84)一致收斂。

用 $\pi_n(P; t)$ 来記(85)中的第一个級数的部分和

$$\pi_n(P; t) = \sum_{k=1}^{n} b_k(t) v_k(P),$$

而用 $u_n(P; t)$ 表示級数(84)的部分和：

$$u_n(P; t) = \sum_{k=1}^{n} v_k(P) \int_0^t e^{\lambda_k(t'-t)} b_k(t')\, dt'.$$

函数 $u_n(P; t)$ 满足方程(79)，但其自由項为 $\pi_n(P; t)$。因而，我們可以写出：

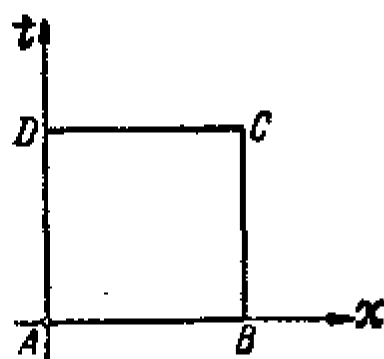
$$\iiint_{D_1} u_n(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_t)\, dx\, dy\, dt = -\iiint_{D_1} \pi_n \sigma\, dx\, dy\, dt.$$

在 $n \to \infty$ 时取極限，并注意到 $\pi_n(P; t) \to \pi(P; t)$，$u_n(P; t) \to$ $\to u(P; t)$ 在 $\overline{D}_1$ 中一致地成立，就会得到(88)，即公式(84)所确定的 $u(P; t)$ 是方程(79)的广义解。此外，直接可見这一和式满足条件(80)与(81)。

如果利用齐次热傳导方程的广义解是这个方程的眞正解这一事实[160]，并利用热傳导方程边值問題解的唯一性定理，那末就可以完全依照对普阿松方程的情形一样地証明到，在所給的初始条件与边值条件下，非齐次方程(79)的广义解是唯一的[224]。

250. 热傳导方程解的性質 考察方程：

$$u_t - u_{xx} = 0. \tag{89}$$



(圖十九)

設有这方程的一解 $u(x, t)$，它在某一点 M 及其鄰域中有連續的导数 u_x 与 u_t。从方程(89)推出，这时导数 u_{xx} 也連續。

环繞 M 作一充分小的矩形 $ABCD$，其边平行于軸(圖 19)，并使得，在这一矩形中上述的解 $u(x, t)$ 是存在的。把坐标的

原点选在 A 点，又設 l 为 AB 的長度。用 $\omega_1(t)$ 与 $\omega_2(t)$ 来記解 $u(x, t)$ 在边 AD 与 BC 的値，用 $f(x)$ 来記它在边 AB 的値。首先考察 $f(x)\equiv 0$ 的情形。依据公式(17)，我們可以把解 $u(x, t)$ 写成形式：

$$
(90)\qquad u(x, t)=\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\,x e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+
+\int_0^t \frac{\psi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\,(x-l)\,e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau,
$$

式中的連續函数 $\varphi(\tau)$ 与 $\psi(\tau)$ 是由积分方程(18)所确定的。这时必須記起方程(89)的解的唯一性定理。

設点 (x_0, t_0) 在 $ABCD$ 的內部。例如，我們考察在公式(90)的右边的第一个积分。如果我們把其中的 x_0 改为 $x'+x''i$，于此 x' 与 x_0 相当接近，x'' 是与零相当接近，那末 $(x'+x''i)^2$ 的实数部分是正的，从此可見，所提到的积分在 $\tau=t$ 的上限处关于参数 $x=$ $=x'+x''i$ 对与 x_0 充分接近的所有的复变数 x 为一致收斂。而另一面，这个积分的被积函数是 $0\leqslant\tau<t$ 的整函数。从此推出，积分的值是在矩形 $ABCD$ 內每点 (x, t) 的近旁为 x 的解析函数[III_2; 70]，特別在点 M 为解析。对公式(90)右边的第二个积分我們也可以作出同样的論断。

因而，方程(89)的解是变量 x 的解析函数。

这一論断对变量 t 是不成立的。事实上，如果方程(89)的每一个解都是 t 的解析函数，那末函数在任一与 t 軸平行而屬于半帶域的直綫(見圖 19)上的数值，由于解析延拓，就可以由这函数在所提到的直綫上屬于 $ABCD$ 的一个綫段的数值所完全决定。但这不会成立，因为 u 的数值显然依賴于我們將 $\omega_1(t)$ 与 $\omega_2(t)$ 的延拓的方法，这兩个函数本来只在直綫 $x=0$ 与 $x=l$ 的綫段 AD 与 BC 上給定的。

直到現在我們假設在区間$(0, l)$中$f(x_0)\equiv 0$，如果不是这样，我們把这函数延拓到較广泛的一个区間$[a, b]$，使得它在这一区間的端点等于0，然后再延拓它，使它在这一区間外为零。作起差式：

$$u-\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_a^b f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\,d\xi。$$

这一差式在綫段AB取零值，对于它，以上所示的論述是适用的。所余下来的是考察解：

$$u_0(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_a^b f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\,d\xi。$$

应用依賴于参数的积分的一个定理[$\mathbf{III_2}$; **70**]，我們見到在x軸之上的任一点(即$t>0$)的近旁，$u_0(x, t)$是(x, t)的正則函数。我們还指出，从公式(90)可直接推出函数u在$0<x<l$有关于t的任何阶导数。

可以給出对方程(89)的解关于t的导数的估計，我們考察方程(89)的解u，它在坐标原点及其近旁有連續的导数u_x及u_t，并假設，它是x的奇函数。我們就有麦克劳林級数展开式

$$u=u_1(t)\,x+\frac{u_3(t)}{3!}x^3+\cdots+\frac{u_{2n+1}(t)}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots, \tag{91}$$

于此

$$u_{2n+1}(t)=\left.\frac{\partial^{2n+1}u}{\partial x^{2n+1}}\right|_{x=0}\quad (n=0, 1, 2, \cdots)。$$

利用方程(89)，我們可以写出：

$$u_{2n+1}(t)=\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}=\frac{d^n u_1(t)}{dt^n}。 \tag{92}$$

如果ρ是比級数(91)的收斂半徑小的正数，那末我們就有不等式[$\mathbf{III_2}$; **83**]：

$$\left|\frac{u_{2n+1}(t)}{(2n+1)!}\right|\leqslant\frac{M}{\rho^{2n+1}},$$

于此M是某一正数。从(92)式推出对函数$u_1(t)$的导数的如下的

估值：

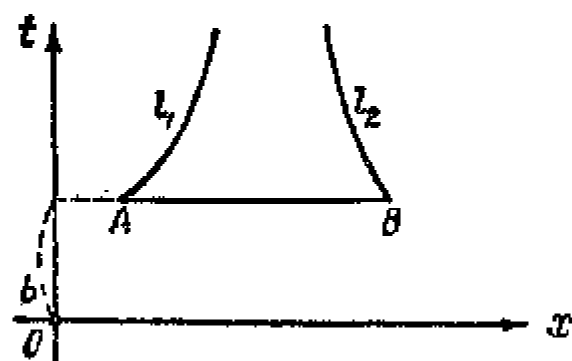
$$\left|\frac{d^n u_1(t)}{dt^n}\right| \leqslant \frac{M(2n+1)!}{\rho^{2n+1}}。$$

这一估值并不保証函数 $u_1(t)$ 的解析性。如果我們有更强的估值：

$$\left|\frac{d^n u_1(t)}{dt^n}\right| \leqslant \frac{M \cdot n!}{\rho^n},$$

那末函数 $u_1(t)$ 的麦克劳林級数就收斂，而这函数在原点近旁就会正則。

251. 在一維情形下的广义單層势函数与双層势函数 在[243]中我們敘述过在半帶域中的边值問題，这半帶域的下界是方程（5）的特征綫 $t=0$，其兩側是直綫 $x=0$ 与 $x=l$。現考察在 (x,t) 平面上的一个区域，其下界为特征綫 $x=b$，而其兩側为兩条曲綫 l_i，它們的显式方程为(圖 20)。



(圖二十)

$$(93)\qquad x=\sigma_1(t);\quad x=\sigma_2(t)\quad [\sigma_1(t)<\sigma_2(t)],$$

并且 $\sigma_i(t)$ 在 $t\geqslant b$ 时有連續的导数。为了解在这样的区域中的边值問題，我們必須作起广义的單層势函数与双層势函数，在 $\sigma_i(t)=$ 常数时，它們化为在[243]中所指出的势函数。这些广义的势函数具有形狀：

$$(94)\qquad u_i(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_b^t \frac{\varphi_i(t')}{\sqrt{t-t'}} e^{-\frac{[\sigma_i(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}} dt',$$

$$(95)\qquad v_i(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_b^t \frac{\psi_i(t')}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}[x-\sigma_i(t')] e^{-\frac{[\sigma_i(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}} dt',$$

这里 $\varphi_i(t')$ 及 $\psi_i(t')$ 是連續函数。

函数 $u_i(x,t)$ 及 $v_i(x,t)$ 在 l_i 之外处处有連續的導数，并滿足

方程(5)。当点(x,t)在曲綫l_i上的情形，兩个勢函数都有意义。对勢函数$u_i(x, t)$这一点是直接而显然的，因为被积函数有估値$C(t-t')^{-\frac{1}{2}}$，于此C是常数。对勢函数$v_i(x, t)$，如果点(x, t)在l_i上，我們可以写出：

$$\frac{|x-\sigma_i(t')|}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\sigma_i(t)-\sigma_i(t')|}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\sigma'(t_0)|}{(t-t')^{\frac{1}{2}}}\quad (t'<t_0<t),$$

从此也推出积分(95)的收斂性。

积分(94)当(x, t)为任意位置时沿一小段$t-\delta\leqslant t'\leqslant t$的値当$\delta\to 0$时趋向于零，从此直接推出，$u_i(x, t)$直到$l_i$为連續。对积分(95)，当$(x, t)$趋向于在$l_i$上的点$(x_0, t_0)$时，却有存在着不同的極限値，即

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} v_i(x, t)=\pm\psi_i(t_0)+v_i(x_0, t_0), \tag{96}$$

于此，$v_i(x_0, t_0)$为积分(95)在点(x_0, t_0)的値，如果(x, t)从l_i的右边趋向于(x_0, t_0)，那就必須取(+)号，如果(x, t)从l_i的左边趋向于(x_0, t_0)，就必須取(−)号。如果$\sigma_i(t)=$常数。那末显然，$v_i(x_0,t_0)=0$，我們就得到[243]中的結果。在証明公式(96)时，我們將不写指标i。

在$\psi(t')=1$时来考察积分(95)

$$v_0(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_b^t\frac{1}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}[x-\sigma(t')]\,e^{-\frac{[\sigma(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}dt', \tag{97}$$

及函数

$$w_0(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_b^t\frac{-2\sigma'(t')}{\sqrt{t-t'}}e^{-\frac{[\sigma(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}dt'。 \tag{98}$$

引入新的积分变量

$$z=\frac{x-\sigma(t')}{2a\sqrt{t-t'}}$$

以代替t'，我們得到：

(99) $$v_0(x,t)+w_0(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-\sigma(b)}{2a\sqrt{t-b}}}^{\pm\infty}e^{-z^2}dz,$$

于此，如 $x-\sigma(t)>0$，則积分上限取(+)号，如 $x-\sigma(t)<0$，則积分上限取(−)号。如果点 (x_0, t_0) 在 l 上，即 $x_0-\sigma(t_0)=0$，那末

(100) $$v_0(x_0,t_0)+w_0(x_0,t_0)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x_0-\sigma(b)}{2a\sqrt{t_0-b}}}^{0}e^{-z^2}dz,$$

如前，从 $w_0(x,t)$ 的定义直接推出，$w_0(x,t)$ 直到 l 为連續。从(99)推出。

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)}[v_0(x,t)+w_0(x,t)]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x_0-\sigma(b)}{2a\sqrt{t_0-b}}}^{\pm\infty}e^{-z^2}dz,$$

把最后一式与公式(100)逐項相減，我們得到：

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)}v_0(x,t)=v_0(x_0,t_0)+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pm\infty}e^{-z^2}dz$$

即 $$\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)}v_0(x,t)=v_0(x_0,t_0)\pm 1。$$

而我們就得到在 $\psi(t')\equiv 1$ 时的公式(96)。

轉到一般情形。把 $v(x,t)$ 的表达式改写为形狀：

(101) $$v(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_b^t[\psi(t')-\psi(t_0)]\frac{x-\sigma(t')}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[\sigma(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}dt'+$$
$$+\frac{\psi(t_0)}{2a\sqrt{\pi}}\int_b^t\frac{1}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}[x-\sigma(t')]e^{-\frac{[\sigma(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}dt'。$$

与[193]中完全一样，只要証明当点 (x,t) 在点 (x_0,t_0) 穿过 l 时，第一項保持为連續就够了。設 ε 是一已給的正数，选取适当小的正数 δ，使当 $|t'-t_0|\leqslant\delta$ 时成立不等式：

$$|\psi(t')-\psi(t_0)|\leqslant\varepsilon,$$

我們又把区間 $b\leqslant t'\leqslant t$ 分为兩部分 $b\leqslant t'\leqslant t_0-\delta$ 及 $t_0-\delta\leqslant t'\leqslant t$。沿第一个区間积分所表达的函数，它在点 (x_0,t_0) 連續，而只要証明积分

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{t_0-\delta}^{t}[\psi(t')-\psi(t_0)]\frac{x-\sigma(t')}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[\sigma(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}dt',$$

对所有的与点(x_0, t_0)充分接近的点(x, t)或对(x_0, t_0)自身是充分的小就够了。所示积分的絕对值不超过

$$\frac{\varepsilon}{2a\sqrt{\pi}}\int_{t_0-\delta}^{t}\frac{|x-\sigma(t')|}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[\sigma(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}dt'。$$

現設差式$x-\sigma(t')$在$t_0-\delta\leqslant t'\leqslant t$内变号的次数不超过一个确定的正整数$k$，而$(x, t)$是在$(x_0, t_0)$的某一鄰域中的任意位置。这时积分

$$\int_{t_0-\delta}^{t}\frac{|x-\sigma(t')|}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[\sigma(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}dt'$$

可以表示为不超过k个具如下形狀的积分：

$$\pm\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{x-\sigma(t')}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[\sigma(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}dt'\quad (t_0-\delta\leqslant t_i\leqslant t_{i+1}\leqslant t)$$

的和，它們与积分

$$\pm 4a\int_{-\frac{x-\sigma(t_i)}{2a\sqrt{t-t_i}}}^{\frac{x-\sigma(t_{i+1})}{2a\sqrt{t-t_{i+1}}}}e^{-z^2}dz$$

的差是
$$\pm\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{-2\sigma'(t')}{\sqrt{t-t'}}e^{-\frac{[\sigma(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}dt',$$

其絕对值不超过某一常数。因而当(x, t)在(x_0, t_0)的某一鄰域之中时，上述积分保持有界。这一积分曾乘以ε，因而就可完全依在[**193**]中步驟，証明了公式(101)的右端的第一項当(x, t)在点(x_0, t_0)穿过l时为連續的。利用上面所指出的勢函数，可以把在圖20所示的区域中的边値問題引向积分方程，如同我們在[**243**]中所作一样。我們所設的条件是在特征綫$t=b$上$u=0$，且在l_i上$u=\omega_i(t)$。我們將寻求具形式

$$(102)\quad u(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{2}\int_{b}^{t}\frac{\psi_i(t')}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}[x-\sigma_i(t')]e^{-\frac{[\sigma_i(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}dt'$$

的解。这时，对每一組函数 $\psi_i(t')$，方程(5)以及在特征綫 $t=b$ 上的边值条件是满足的，而从在 l_i 上的边值条件就会得出对 $\psi_i(t)$ 的渥尔特拉积分方程組：

$$\omega_1(t)=\psi_1(t)+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{2}\int_b^t\frac{\psi_i(t')}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}[\sigma_1(t)-$$

$$-\sigma_i(t')]e^{-\frac{[\sigma_i(t')-\sigma_1(t)]^2}{4a^2(t-t')}}dt';$$

(103)

$$\omega_2(t)=-\psi_2(t)+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{2}\int_b^t\frac{\psi_i(t')}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}[\sigma_2(t)-$$

$$-\sigma_i(t')]e^{-\frac{[\sigma_i(t')-\sigma_2(t)]^2}{4a^2(t-t')}}dt'。$$

我們来考察在第一方程中的积分：

$$\int_b^t\frac{\psi_1(t')}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}[\sigma_1(t)-\sigma_1(t')]e^{-\frac{[\sigma_1(t)-\sigma_1(t')]^2}{4a^2(t-t')}}dt' \tag{104}$$

$$\int_b^t\frac{\psi_2(t')}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}[\sigma_1(t)-\sigma_2(t')]e^{-\frac{[\sigma_1(t)-\sigma_2(t')]^2}{4a^2(t-t')}}dt'。 \tag{105}$$

在积分(104)中，在 $t'=t$ 时的極性由于比

$$\frac{\sigma_1(t)-\sigma_1(t')}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}$$

的分子而降低一次，这完全与我們以前所指出的一样。在第二积分中，当 $t'\to t$ 时，e 的指数趋向于 $(-\infty)$，这就可以完全地消灭極性。对(103)中第二式里的积分也可类似地考察。因而方程組(103)有唯一的解，并可以用逐次逼近法解出。

也可以求以上边值問題的解，使它具两个單層势函数和的形式：

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{2}\int_b^t\frac{\varphi_j(t')}{\sqrt{t-t'}}e^{-\frac{[\sigma_j(t')-x]^2}{4a^2(t-t')}}dt'。 \tag{106}$$

这时我們引导到第一类的积分方程組：

$$
(107)\quad
\begin{aligned}
\omega_1(t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{2} \int_b^t \frac{\varphi_j(t')}{\sqrt{t-t'}} e^{-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_1(t)]^2}{4a^2(t-t')}} dt' \\
\omega_2(t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{2} \int_b^t \frac{\varphi_j(t')}{\sqrt{t-t'}} e^{-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_2(t)]^2}{4a^2(t-t')}} dt'。
\end{aligned}
$$

把兩边乘以 $(y-t)^{-\frac{1}{2}}$ 并关于 t 从 $t=b$ 积分到 $t=y$:

$$
(108)\quad
\begin{cases}
f_1(y) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\sum_{j=1}^{2} \int_b^y \varphi_j(t') K_{1j}(t', y) dt'; \\
f_2(y) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\sum_{j=1}^{2} \int_b^y \varphi_j(t') K_{2j}(t', y) dt',
\end{cases}
$$

式中

$$
(109)\quad
\begin{cases}
f_i(y) = \displaystyle\int_b^y \frac{\omega_i(t)}{\sqrt{y-t}} dt; \\
K_{ij}(t', y) = \displaystyle\int_{t'}^y \frac{1}{\sqrt{(y-t)(t-t')}} e^{-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_i(t)]^2}{4a^2(t-t')}} dt,
\end{cases}
$$

这时我們已在右边变更了积分的次序并曾利用过狄义赫利公式[II;79]。方程組(108)等价于(107)[見 II;79]。显然,我們有:

$$
\lim_{t\to t'+0} e^{-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_i(t)]^2}{4a^2(t-t')}} = \begin{cases} 0 & i\neq j \text{ 时} \\ 1 & i=j \text{ 时} \end{cases}
$$

又注意到公式[II;79]:

$$
\int_{t'}^y \frac{dt}{\sqrt{(y-t)(t-t')}} = \pi,
$$

我們就得到:

$$
K_{11}(y, y) = K_{22}(y, y) = \pi; \quad K_{12}(y, y) = K_{21}(y, y) = 0。
$$

把方程組 (108) 关于 y 微分,并且我們假設 $\omega_i(t)$ 有連續的导数,这时函数 $f_i(y)$ 也有連續导数[II;85]:

$$
(110)\quad
\begin{cases}
f_1'(y) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2a} \varphi_1(y) + \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\sum_{j=1}^{2} \int_b^y \varphi_j(t') \frac{\partial K_{1j}(t', y)}{\partial y} dt'; \\
f_2'(y) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2a} \varphi_2(y) + \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\sum_{j=1}^{2} \int_b^y \varphi_j(t') \frac{\partial K_{2j}(t', y)}{\partial y} dt'。
\end{cases}
$$

为了計算导数,我們把 $K_{ij}(t', y)$ 表示为形狀:

$$
K_{ij}(t', y) = \int_{t'}^y e^{-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_i(t)]^2}{4a^2(t-t')}} d\left[\arcsin\left(2\frac{t-t'}{y-t'} - 1\right)\right]。
$$

分部积分，并关于 y 微分，我們得到：

$$\frac{\partial K_{ij}(t', y)}{\partial y} = -\frac{2}{(y-t')}\int_{t'}^{y}\frac{1}{\sqrt{(y-t)(t-t')}}e^{-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_i(t)]^2}{4a^2(t-t')}}\left\{[\sigma_i(t)-\right.$$

$$\left.-\sigma_j(t')]\sigma_i'(t)-\frac{[\sigma_j(t')-\sigma_i(t)]^2}{2(t-t')}\right\}dt。$$

当 $i\neq j$ 时，指数函数保証了积分在 $t=t'$ 的收斂性，而在 $i=j$ 时，在尖括弧中的分式并無極性，而整个尖括弧随同 $(t-t')$ 趋向于零。考虑到所有这些事项并在 $i=j$ 与 $i\neq j$ 情形下对被积函数进行簡易的估值，在兩种情形下我們都引导到形狀为

$$C\int_{t'}^{y}\frac{dt}{\sqrt{y-t}}$$

的积分，这里 C 是某一常数。从此可見，

$$\frac{\partial K_{ij}(t', y)}{\partial y} = \frac{L_{ij}(t', y)}{\sqrt{y-t'}},$$

于此 $L_{ij}(t', y)$ 为 (t', y) 的連續函数，而对方程組(110)逐次逼近法[43]是适用的。

252. 次抛物函数与优抛物函数 在解热傳导方程边値問題时，也可以用一种方法，它类似于我們在[217]中叙述过的上函数与下函数法。我們考察在 (x, t) 平面上的区域 B，它的上下兩端是用特征綫 $t=0$ 及 $t=b$ 所界定，其左右兩側的境界是具方程 (93) 的曲綫，于此我們对函数 $\sigma_i(t)$ 的性質，除掉要求它們是單値連續函数及 $\sigma_1(t)<\sigma_2(t)$ 之外暫不作任何假定。在定义次抛物函数与优抛物函数时，我們应当选定一个基本区域，对于它，我們能够在任意的連續的边値条件下会解出方程

$$u_t - u_{xx} = 0 \tag{111}$$

的边値問題。对拉普拉斯方程，这区域是圓。对方程(111)的这样的区域，例如，我們可以取等边三角形 β，它的底边平行于軸 $t=0$，它的側边指向于 t 增加的一側。这样的三角形的边値問題的解可以依[251]中所示的方法来求得，并且它是唯一的。这个解在三角形的边上取到最大値与最小値[II; 209]。在閉区域 $\overline{B}$ 为連續的一个函数 $\varphi(M)=\varphi(x, t)$，如果对 B 內任一点 M_0 的函数値 $\varphi(M_0)$ 不大于方程 (111) 的一个解在这一点的数値，这个解是在包含 M_0 在內的充分小的三角形 β 中所作，而在 β 的边上有与 $\varphi(M)$ 相同的数値，那末这个函数就称为次抛物函数。优抛物函数也可类似地来定义，但只要 $\psi(M_0)$ 不小于方程(111)在 β 中的这个解的数値。

优抛物函数在 B 的边界上取到最小值。次抛物函数也具有关于最大值的类似的性質。

不难看出，如果 $\psi(x, t)$ 在 B 中有連續的导数 ψ_t, ψ_x 及 ψ_{xx}，且 $\psi_t-\psi_{xx}\geqslant 0$，那末 $\psi(x, t)$ 为优抛物函数。事实上設 u 为满足方程 (111) 的一解，在 β 的边上与 ψ 取相同的值。这时差式 $w=\psi-u$ 在 β 的边上等于零，且在 β 内 $w_t-w_{xx}\geqslant 0$。但在这时，函数 w 应当在 β 的边界上达到最小值 [242]，在边界上，它的数値却是零，所以在整个三角形中 $w\geqslant 0$，即在 β 中 $\psi\geqslant u$，这就是所要証的。

同样地，如果在 B 内 $\varphi_t-\varphi_{xx}\leqslant 0$，那末 φ 就是次抛物函数。方程 (111) 的每一解是同时为次抛物函数，又为优抛物函数。完全与 [216] 中一样地可以証明，如果 $f_1(M)$, …, $f_m(M)$ 是优抛物函数，那末 $\psi(M)=\min[f_1(M),\cdots,f_m(M)]$ 也是优抛物函数。用 $f_\beta(M)$ 来記一个函数，它在三角形 β 之外及边上重合于 $f(M)$，在 β 内它等于方程 (111) 的在 β 的边界上取値 $f(M)$ 的解。如同在 [216] 中一样，可以証明，如果 $f(M)$ 是优抛物函数，那末 $f_\beta(M)$ 也肯定是优抛物函数，且在 B 中 $f_\beta(M)\leqslant f(M)$。

在 B 中的边値是在下底 $t=0$ 及側边 l_i 上給定的。把 B 的週道的这一部分記为 l'。上函数与下函数的定义也同对拉普拉斯方程所做的一样。特别，上函数是指每一优抛物函数，它在 l' 上取値 $\geqslant$ 所給的边値。

然后，在 B 中定义函数 $u(x, t)$，它是所有的上函数的下确界之值。可以証明，这一函数满足方程 (111) [見 217]。它是上述的方程 (111) 的边値問題的广义解。函数 $u(x, t)$ 与 l' 相迫近时的性态的研究可以在 И. Г. 彼得罗夫斯基的著作“論热傳导方程的第一边値問題”(“О первой предельной задаче для уравнения теплопроводности” Compositio Mathematica; t. 1, fasc. 3; 1935) 中找到。

253. 波动方程解的基本不等式 在前一章中，我們已研究过用初始条件及系数来估計綫性双曲型方程的解的数值的問題。在那时，我們曾假設，所研究的过程或者是發生于全空間，或者發生于空間的一部分以及时間的一定范圍，在这个范圍中边界上的扰动还来不及到来。現在我們要建立对边値問題的一些类似的不等式，但限于波动方程。为了直观上的明显起見，所有論述將对有兩

个空間坐标的波动方程进行。在这时我們將有三个坐标 (x, y, t) 而可以利用三維空間的圖象。所有的論述也可移置到有三个空間的坐标的情形。

設波动方程

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy} \tag{112}$$

在以 l 为週道的区域 B 中有一解 $u(P;t)=u(x,y,t)$，它滿足某些初始条件：

$$u|_{t=0}=f_0(x, y);\quad u_t|_{t=0}=f_1(x, y)\quad [(x, y)\text{在 } B \text{ 中}] \tag{113}$$

及齐次边值条件

$$u|_l=0。 \tag{114}$$

我們的目标是要弄清楚解对初始条件 (113) 的依賴性。設 D 是空間 (x, y, t) 的三維区域，它是由平面 $t=0$, $t=T$ 及一柱面 S_1 为側面所圍成的，S_1 为从 l 出發，平行于 t 軸的母綫所構成。我們假設上述解本身为連續，在閉区域 $\overline{D}$ 中有一阶的連續导数，又在 D 內有二阶的連續导数。我們將从在証明唯一性定理时曾經利用过的如下的初等的恒等式出發：

$$2u_t(u_{tt}-u_{xx}-u_{yy})=\frac{\partial}{\partial t}(u_x^2+u_y^2+u_t^2)-\\-2(u_tu_x)_x-2(u_tu_y)_y。 \tag{115}$$

把兩边沿区域 D 积分，利用方程(112)，又利用奧斯特洛格拉得斯基公式把右边的积分改变形式，我們就得到：

$$\iint_S[(u_x^2+u_y^2+u_t^2)\cos(n, t)-2u_tu_x\cos(n, x)-\\-2u_tu_y\cos(n, y)]dS=0, \tag{116}$$

这里 S 是 D 的全表面而 n 是 S 的外法綫方向。严格地說，在对于 u 的所作的假設下，我們应当把奧斯特洛格拉得斯基公式首先应用在 D 內的柱面，然后取極限，并利用第一阶导数直到 S 的連

續性。在物体 D 的侧面，卽在 S_1 我們有 $\cos(n, t)=0$ 及 $u_t=0$。后一式子是由于 S_1 上的点是在不同的瞬間的迴道 l 上的点，而在 l 上我們有条件 (114)，卽在 S_1 上 $u=0$。在这时还必須指出[162]中的引理。在柱体的上底及下底，我們有 $\cos(n,x)=\cos(n,y)=0$。此外在上底我們有 $\cos(n, t)=1$，在下底有 $\cos(n, t)=-1$。因而公式(116)給我們导来了以下的基本的等式：

$$\iint_B (u_x^2+u_y^2+u_t^2)\,dS\bigg|_{t=T}=\iint_B (u_x^2+u_y^2+u_t^2)\,dS\bigg|_{t=0},$$

或者，注意到(113)式，这就是：

$$\iint_B (u_x^2+u_y^2+u_t^2)\,dS=\iint_B\left[\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_0}{\partial y}\right)^2+f_1^2\right]dS, \tag{117}$$

在积分的左側也可以取区間 $[0, T]$ 中的任一 t 值。我們設具有上述性質的解在以上所定义的柱体 D 内是存在的。从(117)式直接推出，(117)的左边是与 t 無关的。現要給出 u^2 沿区域 B 的积分的估值。我們設与軸平行的直綫与迴道 l 的交点不超过兩个，且設 $y=\varphi_1(x)$ 与 $y=\varphi_2(x)$ 是这迴道的上面部分与下面部分的方程，并且，显然 $0\leqslant\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\leqslant M$，$M$ 是某一常数。我們可写出：

$$u^2(x, y, t)=\int_{\varphi_1(x)}^{y}\frac{\partial}{\partial y_1}u^2(x, y_1, t)\,dy_1$$

或者

$$u^2(x, y, t)=\int_{\varphi_1(x)}^{y}2u(x, y_1, t)\frac{\partial u(x, y_1, t)}{\partial y_1}dy_1,$$

由此

$$\iint_B u^2(x, y, t)\,dx\,dy=$$

$$=\iint_B\left[\int_{\varphi_1(x)}^{y}2u(x, y_1, t)\frac{\partial u(x, y_1, t)}{\partial y_1}dy_1\right]dx\,dy。$$

以 a 与 b 来記迴道 l 的最左面的点与最右面的点的横坐标，我們可以写出：

$$\iint_B u^2(x, y, t)\,dx\,dy=$$

$$=\int_a^b\left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left[\int_{\varphi_1(x)}^{y} 2u(x, y_1, t)\frac{\partial u(x, y_1, t)}{\partial y_1}dy_1\right]dy\right\}dx。$$

交換对 y_1 与 y 的积分順序，应用狄义赫利公式[II;79]，就有

$$\iint_B u^2(x, y, t)\,dx\,dy=$$

$$=\int_a^b\left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left[\int_{y_1}^{\varphi_2(x)} 2u(x, y_1, t)\frac{\partial u(x, y_1, t)}{\partial y_1}dy\right]dy_1\right\}dx,$$

再注意到被积函数与 y 無关，这就是

$$\iint_B u^2(x, y, t)\,dx\,dy=$$

$$=\iint_B 2u(x, y_1, t)\frac{\partial u(x, y_1, t)}{\partial y_1}[\varphi_2(x)-y_1]\,dx\,dy_1。$$

我們有 $\varphi_1(x)\leqslant y_1\leqslant\varphi_2(x)$，因而 $0\leqslant\varphi_2(x)-y_1\leqslant M$。以 y 来記 y_1，就可写出：

$$\iint_B u^2(x, y, t)\,dx\,dy\leqslant$$

$$\leqslant 2M\iint_B |u(x, y, t)|\left|\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}\right|dx\,dy。$$

对最后一个积分用布单亞柯夫斯基不等式，有

$$\iint_B u^2(x, y, t)\,dx\,dy\leqslant$$

$$\leqslant 2M\left[\iint_B u^2(x, y, t)\,dx\,dy\right]^{\frac{1}{2}}\left[\iint_B\left(\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}\right)^2dx\,dy\right]^{\frac{1}{2}}。$$

把兩边平方起来，約去一个 $u^2(x, y, t)$ 的积分，就得到：

$$\iint_B u^2(x, y, t)\,dx\,dy\leqslant 4M^2\iint_B\left(\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}\right)^2dx\,dy, \tag{118}$$

并且，注意到(117)式，我們就有借助初始条件对 $u^2(x, y, t)$ 的积

分的最終的估值：

$$\iint_B u^2(x, y, t)\,dx\,dy \leqslant \tag{119}$$

$$\leqslant 4M^2 \iint_B \left[\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_0}{\partial y}\right)^2 + f_1^2\right] dx\,dy。$$

利用这一公式可以按初始条件的均方誤差来估計解的均方誤差。設我們已求到方程(112)的一解 $u_1(x, y, t)$，它满足齐次边値条件(114)，但它满足另外的初始条件

$$u_1\Big|_{t=0} = \varphi_0(x, y)；\quad \frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x, y)$$

以代替初始条件(113)。差式$(u-u_1)$满足方程(112)，也满足齐次的边値条件(114)以及初始条件：

$$(u-u_1)\big|_{t=0} = f_0(x, y) - \varphi_0(x, y)；$$

$$\frac{\partial(u-u_1)}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_1(x, y) - \varphi_1(x, y)。$$

对这差式应用估計式(119)，我們得到用初始条件的均方誤差来表示解的均方誤差的估計：

$$\iint_B [u(x, y, t) - u_1(x, y, t)]^2 dx\,dy \leqslant \tag{120}$$

$$\leqslant 4M^2 \iint_B \left[\left(\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right)^2 + (f_1 - \varphi_1)^2\right] d\sigma。$$

从此推出，如果右边趋向于零，那末解的均方誤差也趋向于零。

254. 非齐次方程的情形 現考察非齐次方程

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + \pi(x, y, t), \tag{121}$$

并具齐次的边値条件(117)及初始条件(113)。如果边値条件是非齐次的：

$$u\big|_l = \omega(x, y, t), \tag{122}$$

那末，我們引进新的未知函数 $v = u - u_0$ 以代替 u，于此 u_0 是满足

边值条件(122)的任一函数，就会得到对于 v 的齐次边值条件。我們指出，如果对 u 已有齐次方程(112)，那末对于 v 我們所得到的是非齐次方程。因而，利用初始条件(113)及自由項 $\pi(x, y, t)$ 对方程(121)的解的估值，使我們会与以前一样地，当初始条件与边值条件变动时能够估計解的均方誤差。

公式(115)中左边沿 D 所作的三重积分，由于(121)，归結为乘积 $2u_t\pi$ 的积分，而代替(117)，我們得有公式：

$$(123)\qquad \iint_B (u_x^2+u_y^2+u_t^2)\,dS\,\Big|_{t=T} =$$

$$=\iint_B \left[\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_0}{\partial y}\right)^2+f_1^2\right]dS+2\iiint_D u_t\pi\,d\tau.$$

置：

$$(124)\qquad K(t)=\iint_B (u_x^2+u_y^2+u_t^2)\,dS;\qquad A(t)=\iint_B \pi^2\,dS.$$

前一公式可写成形狀：

$$(125)\qquad K(T)-K(0)=2\iiint_D u_t\pi\,d\tau=2\int_0^T\left[\iint_B u_t\pi\,dS\right]dt.$$

把它关于 T 微分，并把 T 改为 t:

$$\frac{dK(t)}{dt}=2\iint_B u_t\pi\,dS,$$

从此，利用不等式 $2|ab|\leqslant a^2+b^2$，我們得到

$$\frac{dK(t)}{dt}\leqslant A(t)+\iint_B u_t^2\,dS,$$

或者，注意到

$$(126)\qquad \iint_B u_t^2 dS\leqslant K(t),$$

我們可以写出：

$$\frac{dK(t)}{dt}\leqslant A(t)+K(t),$$

或者

$$\frac{d[e^{-t}K(t)]}{dt}\leqslant e^{-t}A(t),$$

积分这一不等式，我們得到：

$$K(t)\leqslant e^{t}K(0)+\int_{0}^{t}e^{t-t'}A(t')\,dt'。\tag{127}$$

如果置：

$$L(t)=\iint_{B}u^{2}\,dS,$$

那末我們就有：

$$\frac{dL(t)}{dt}=2\iint_{B}uu_{t}\,dS\leqslant\iint_{B}u^{2}\,dS+\tag{128}$$

$$+\iint_{B}u_{t}^{2}\,dS\leqslant L(t)+K(t)。$$

在这一不等式的左边，我們可以放入絕对值的符号。从(128)推出：

$$\frac{d[e^{-t}L(t)]}{dt}\leqslant e^{-t}K(t),$$

如前，我們引出不等式

$$L(t)\leqslant e^{t}L(0)+\int_{0}^{t}e^{t-t'}K(t')\,dt'。\tag{129}$$

除了这些不等式以外，在边值条件与初始条件都是齐次的情形下，还可以得到对 $K(t)$ 与 $L(t)$ 的簡單的估值。在这时 $K(0)=0$，又对公式(125)的右边应用布尼亞柯夫斯基不等式，我們得到：

$$K(T)\leqslant 2\int_{0}^{T}\left[\iint_{B}u_{t}^{2}\,dS\right]^{\frac{1}{2}}\left[\iint_{B}\pi^{2}\,dS\right]^{\frac{1}{2}}dt,$$

由于(126)，这就是：

$$K(T)\leqslant\int_{0}^{T}[K(t)]^{\frac{1}{2}}[4A(t)]^{\frac{1}{2}}\,dt。\tag{130}$$

在区間 $0\leqslant t\leqslant T$，設 $K=\max K(t)$，$A=\max 4A(t)$。上面的不等式給出：

$$K(T)\leqslant K^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}T。$$

把 t 代入这公式以代替 T，式中 $0\leqslant t\leqslant T$：

$$K(t)\leqslant K^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}t\quad(0\leqslant t\leqslant T)。\tag{131}$$

把 $K(t)$ 的这个估計代入积分(130)，我們得到：

$$K(t)\leqslant K^{\frac{1}{4}}A^{\frac{3}{4}}t^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\quad(0\leqslant t\leqslant T)。$$

再把这个估計代入积分(130)，就有

$$K(t)\leqslant K^{\frac{1}{8}}A^{\frac{7}{8}}t^{\frac{7}{4}}\cdot\frac{4}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}。$$

把这些估計一直繼續下去，經过 n 次代入后，就得到：

$$K(t)\leqslant K^{\frac{1}{2^n}}A^{\frac{2^n-1}{2^n}}t^{\frac{2^n-1}{2^{n-1}}}\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\left(\frac{2^{n-2}}{2^{n-1}-1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdots$$
$$\cdots\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}。\tag{132}$$

考察正数的序列：

$$\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\cdot\left(\frac{2^{n-2}}{2^{n-1}-1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdots\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}。\tag{133}$$

当 n 增加时，因为

$$\frac{2^n}{2^{n+1}-1}:\frac{2^{n-1}}{2^n-1}=\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}<1,$$

所以所写的每一分数当 n 增加时是遞減的。

因而，当 n 增加 1 时，乘积(133)中每一相应的因子是减少的，并且还乘以一个小于 1 的因子 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2n-1}}$，这就是序列 (133) 是减小的，因而有極限，我們用字母 C 来記它。把 (132) 式过渡到極限，我們得到：

$$K(t) \leqslant CAt^2 \quad (0 \leqslant t \leqslant T)。$$

把这个估計代入公式(130)，我們得到：

$$K(t) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{C}\,At^2。$$

再一次地代入，得到：

$$K(t) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{C}}{2}}\,At^2 = \frac{C^{\frac{1}{4}}}{2^{1+\frac{1}{2}}}At^2;$$

繼續代入，得

$$K(t) \leqslant \frac{C^{\frac{1}{2^n}}}{2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}}At^2,$$

而过渡到極限，我們就得到不包含 C 的估計式：

$$K(t) \leqslant \frac{1}{4}At^2 \quad (0 \leqslant t \leqslant T)。 \tag{134}$$

我們記起，这里的 A 是在区間 $0 \leqslant t \leqslant T$ 中的 $\max 4A(t)$。有了对 $K(t)$ 的估計 (134)，依据 (118)，我們就能够估計函数 $u(x, y, t)$ 的平方的积分：

$$L(t) \leqslant AM^2t^2 \quad (0 \leqslant t \leqslant T)。 \tag{135}$$

設我們有齐次方程(112)，并具有初始条件及边值条件。利用方程(112)在無界平面上的解 [**II**; **172**]，可以把初始条件化为齐次的。我們又設，經过这样的化約之后，在边值条件中的函数 $\omega(x, y, t)$ 使我們能够找出在本段开始时說过的輔助函数 u_0，它并能满足齐次的初始条件。这时变换 $v = u - u_0$ 把边值条件化为齐次又并不妨害初始条件的齐次性，但它把方程化为形狀 (121)。就在这个情形下，我們有估計(135)。在实用上，这个估計可以应用于估計有不同边値条件的两个解的差。

利用所得到的估计，可以証明波动方程的解是在一定意义下連續地依賴于初始条件，边値条件以及自由項。

首先研究对自由项的依賴性。設 u_1 与 u_2 是具有不同自由項 $\pi_1(x, y, t)$ 与 $\pi_2(x, y, t)$ 的非齐次方程的解，并且这些解满足齐次的初始条件与边值条件。差式 (u_2-u_1) 满足以 $(\pi_2-\pi_1)$ 为自由項的非齐次方程及齐次的初始条件与边值条件。如果在这时有

$$\iint_B (\pi_2-\pi_1)^2\, dS \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \quad (0\leqslant t\leqslant T),$$

那末，应用(134)与(135)就得出：

$$\iint_B (u_2-u_1)^2\, dS \leqslant \varepsilon M^2 t^2 \quad (0\leqslant t\leqslant T);$$

(136)

$$\iint_B \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y}-\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 \right] dS \leqslant \frac{\varepsilon}{4} t^2 \quad (0\leqslant t\leqslant T)。$$

因而，我們就得到在均方誤差的意义下，解对于自由项的連續性。

現設，我們有齐次方程的兩个解 v_1 与 v_2，它們满足齐次的初始条件与不同的边值条件：

$$v_1\big|_l=\psi_1(x, y, t);\quad v_2\big|_l=\psi_2(x, y, t),$$

并且函数 ψ_i 在閉区域 $\overline{B}$ 中定义，当 $t\geqslant 0$ 时在 $\overline{B}$ 并有到二阶的連續导数，还满足条件：

$$\psi_1(x, y, 0)=\psi_2(x, y, 0)=\frac{\partial \psi_1(x, y, t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=$$

$$=\frac{\partial \psi_2(x, y, t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0。$$

引入新的未知函数 $u_1=v_1-\psi_1$；$u_2=v_2-\psi_2$，我們就得到它們的非齐次方程：

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\Delta u_i+\left(\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2}-\Delta \psi_i\right),$$

其初始条件与边值条件均为齐次的。

現在我們可以对(u_2-u_1)应用(134)与(135)，这时

$$A=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\iint\limits_B\left[\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}-\Delta\psi_2\right)-\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}-\Delta\psi_1\right)\right]^2 dS。$$

注意到一个显然的不等式$(a+b+c)^2\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$，我們得出：

$$A\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant T}3\iint\limits_B\left[\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right)^2\right]dS,$$

并且，如果在右边的积分在$0\leqslant t\leqslant T$时小于$\frac{\varepsilon}{4}$，那末我們就可以写出估計式(136)。

讓我們記起公式(120)給出了在齐次边值条件下，齐次波动方程解的均方誤差对初始条件的均方誤差的依賴性。在这时，除了(120)外，我們还利用(117)而得出：

$$\iint\limits_B\left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}-\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2\right]dS=\iint\limits_B\left[\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial f_0}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^2+(f_1-\varphi_1)^2\right]dS。\tag{137}$$

255．富里埃方法与广义解 考察平面上的波动方程

$$\Box u=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}-u_{tt}=0\tag{138}$$

的边值問題。設在以l为迴道的区域B内部可以求得方程(138)的解，它满足齐次边值条件：

$$u|_l=0\tag{139}$$

及初始条件：

$$u|_{t=0}=\varphi_0(x_1,x_2);\quad u_t|_{t=0}=\varphi_1(x_1,x_2)。\tag{140}$$

形式地应用富里埃方法，我們得到如下形狀的問題的解：

(141) $$u(P;t)=\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos\sqrt{\lambda_m}t+b_m\sin\sqrt{\lambda_m}t)v_m(P),$$

于此 λ_m 与 $v_m(P)$ 是方程

(142) $$\Delta v+\lambda v=0$$

对于 v 的在边值条件(139)下的特征值与特征函数，且

(143) $$\sum_{m=1}^{\infty}a_m v_m(P);$$

(144) $$\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sqrt{\lambda_m}v_m(P)$$

为函数 $\varphi_0(P)$ 与 $\varphi_1(P)$ 的富里埃級数，这就是

(145) $$a_m=\iint_B\varphi_0(P)v_m(P)dS;\quad b_m=\frac{1}{\sqrt{\lambda_m}}\iint_B\varphi_1(P)v_m(P)dS。$$

对波动方程的富里埃方法的驗証与对热傳导方程的这个方法的驗証比較起来，是引来了实質上的困难。在 С. Л. 索伯列夫(Соболев)的書"数学物理方程"("Уравнения математической физики"1950，323 及 365 頁)从波动方程广义解的观点进行了对富里埃方法的上述的驗証。并且他主要地利用了著名的李斯-費蕭尔定理及平均收斂性。我們現在也从广义解的观点在对 $\varphi_0(P)$与 $\varphi_1(P)$ 有較强的假設之下来叙述对富里埃方法的驗証，但所用的工具却比較初等。

我們將假設級数

(146) $$\sum_{m=1}^{\infty}a_m\sqrt{\lambda_m}v_m(P);$$

(147) $$\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sqrt{\lambda_m}v_m(P)$$

在閉区域 $\overline{B}$ 上正則收斂。这时，級数

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_m v_m(P);\quad \sum_{m=1}^{\infty}b_m v_m(P)$$

在 $\overline{B}$ 内更其为正則收斂的。因而，对任何实数 t，公式(141)决定

了一个在 $\bar{B}$ 中的連續函数，而从級数(146)与(147)的正則收斂性推出，这一函数有关于 t 的在 $\bar{B}$ 中为連續的偏导数：

$$u_t(P;t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(-a_m\sqrt{\lambda_m}\sin\sqrt{\lambda_m}t+\right.$$
$$\left.+b_m\sqrt{\lambda_m}\cos\sqrt{\lambda_m}t\right)v_m(P), \tag{148}$$

并且所写的級数对每一 t 在 $\bar{B}$ 中正則收斂。从(141)与(148)可以得出結論：函数 $u(P;t)$ 满足初始条件(140)。因所有的函数 $v_m(P)$ 都满足边值条件(139)，从此推出函数 $u(P;t)$ 也能满足这个条件。

現要决定方程(138)在边值条件(139)与初始条件(140)下的广义解。接着我們要証明，在所作的假設下公式(141)就給出这广义解，并且这种解是唯一的。

設 D' 是空間 (x,y,t) 中的一个柱形区域，其底为 B，母綫为平行于 t 軸的直綫，且 $-\infty<t<+\infty$，設 S' 为这一柱形区域的边界。

設函数 $\sigma(P;t)$ 在 D' 中直到 S' 为連續，在 S' 上化为零，在 D' 中有到二阶的連續导数。此外，我們假設 $\sigma(P;t)$ 在 S' 上有正常法綫导数，又当 t 的絕对值充分大时，$\sigma(P;t)$ 等于零。

設 $u(P;t)$ 是方程(138)的某一二次連續可微分的解，但它在 D' 的 $t>0$ 部分所定义，且满足边值条件(139)，有正常的法綫导数。此外，設 $u(P;t)$ 还满足初始条件(140)。在区域 D' 的 $t>0$ 的部分，对函数 $u(P;t)$ 与 $\sigma(P;t)$ 应用格林公式。我們注意到 $\Box u=0$，且由于在 S' 上 $u=\sigma=0$ 而在 S' 上的积分是消失了，就得出：

$$\iiint\limits_{D';t>0} u\Box\sigma d\tau=\iint\limits_{B}\left[\varphi_0\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{t=0}-\varphi_1(\sigma)_{t=0}\right]dS, \tag{149}$$

并且在(149)左边的积分事实上只展布在有界区域中，这是由于 σ

而因之 $\square\sigma$ 对充分大的 t 都等于零。

等式 (149) 自然地引导到广义解的如下的定义：定义在 D' 的 $t>0$ 部分的函数 $u(P;t)$，如果它本身及 $u_t(P;t)$ 直到 S' 及 $t=0$ 上連續，满足边值条件 (139)，如果对任意选擇的满足上述性質的函数 $\sigma(P;t)$ 成立等式(149)，我們就称它为在初始条件(140)下的边值問題的解。

公式(141)給出問題的在剛才所指出的意义下的解。事实上，注意到函数 $v_m(P)$ 在区域的邊道 l 上有正常法綫导数，我們就能作出結論，如果我們取級数(141)的部分和 $s_n(P;t)$ 作为 $u(P;t)$，那末公式(149)成立，这就是：

$$\iiint\limits_{D';\, t\geqslant 0} s_n(P;t)\square\sigma(P;t)\,d\tau=$$

$$=\iint\limits_{B}\left[s_n^{(0)}(P)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{t=0}-s_n^{(1)}(P)\,(\sigma)_{t=0}\right]dS,$$

式中 $s_n^{(0)}(P)$ 与 $s_n^{(1)}(P)$ 为 $\varphi_0(P)$ 及 $\varphi_1(P)$ 的富里埃級数的部分和。因为 $n\to\infty$ 时，$s_n(P;t)\to u(P;t)$，$s_n^{(0)}(P)\to\varphi_0(P)$，$s_n^{(1)}(P)\to\to\varphi_1(P)$ 在区域 D' 中直到 S' 一致地成立，那末在这个等式中取 $n\to\infty$ 的極限，我們就証明公式(141)所定义的 $u(P;t)$ 是初始条件为(140)的問題的广义解。

現証，在新的提法上的边值問題的解由初始条件所唯一地确定。为此，只要証明满足齐次的初始条件

$$u^{(0)}(P;0)=u_t^{(0)}(P;0)=0$$

的广义解在 D' $(t\geqslant 0)$ 中恒等于零也就够了。

根据广义解的定义，对任意选擇的函数 $\sigma(P;t)$，我們有

$$\iiint\limits_{D';\, t\geqslant 0} u^{(0)}(P;t)\square\sigma(P;t)\,d\tau=0。$$

在 $t<0$ 时置 $u^{(0)}(P;t)=0$。这时 $u^{(0)}(P;t)$ 与 $u_t^{(0)}(P;t)$ 在整个

D' 中連續，且

$$\iiint_{D'} u^{(0)}(P;\ t)\Box\sigma(P;\ t)d\tau=0_{\circ} \tag{150}$$

置 $\sigma(P;\ t)=v_m(P)f(t+\xi)$，这里 $f(t)$ 是任意的对所有的 t 为二阶連續可微分的函数，在 t 值的某一有限区間之外，它化为零，而 ξ 是某一定数。

因为所选擇的函数 $\sigma(P;\ t)$ 具有以上所示的性質。我們有

$$\Box\sigma(P;\ t)=f(t+\xi)\Delta v_m(P)-v_m(P)f''(t+\xi)=$$
$$=-[f''(t+\xi)+\lambda_m f(t+\xi)]v_m(P),$$

因而等式(150)取形狀：

$$\iiint_{D'} u^{(0)}(P;\ t)[f''(t+\xi)+\lambda_m f(t+\xi)]v_m(P)d\tau=0_{\circ} \tag{151}$$

置

$$\psi_m(\xi)=\iiint_{D'} u^{(0)}(P;\ t)f(t+\xi)v_m(P)d\tau_{\circ} \tag{152}$$

我們有

$$\psi''_m(\xi)=\iiint_{D'} u^{(0)}(P;\ t)f''(t+\xi)v_m(P)d\tau,$$

而等式(151)給出：

$$\psi''_m(\xi)+\lambda_m\psi_m(\xi)=0,$$

即

$$\psi_m(\xi)=C_1\cos\sqrt{\lambda_m}\xi+C_2\sin\sqrt{\lambda_m}\xi_{\circ} \tag{153}$$

現証 $\psi_m(\xi)\equiv 0$。設 $[t_1,\ t_2]$ 是这样的区間，在其外，$f(t)$ 等于零。設 $\xi>t_2$。这时对公式(152)的被积函数来說，在 $t\geqslant 0$ 时，$f(t+\xi)=0$，而在 $t<0$ 时 $u^{(0)}(P;t)=0$，从此推出 $\xi>t_2$ 时 $\psi_m(\xi)=0$，因而在(153)中 $C_1=C_2=0$ 即 $\psi_m(\xi)\equiv 0$。現已不难証明 $u^{(0)}(P;t)\equiv\equiv 0$。作起函数：

$$\omega(P;\ \xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} u^{(0)}(P;\ t)f(t+\xi)dt_{\circ}$$

对任意固定的 ξ，它是 P 在 $\overline{B}$ 中的連續函数，而由于 (152) 及 $\psi_m(\xi)\equiv 0$，它与所有的 $v_m(P)$ 正交。

函数 $v_m(P)$ 構成一个封閉系統，从所述直接推出 $\omega(P;\xi)\equiv 0$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^{(0)}(P;\, t) f(t+\xi)\, dt = 0$$

对任意选擇的滿足上述性質的函数 $f(t)$ 成立。利用变分法的基本引理[62]，我們得到 $u^{(0)}(P;t)\equiv 0$，这就証明了在所給条件下問題的广义解的唯一性。

唯一性的这一証明取自 Х. Л. 斯穆棱茨基的学位論文"波动方程的边值問題"("Предельная задача для волнового уравнения")。本段的全部叙述也都屬于他的。不难指出对 $\varphi_0(P)$ 与 $\varphi_1(P)$ 的条件，它能使級数 (146) 与 (147) 在 B 中正則收斂。例如，如果 $\varphi_0(P)$ 在 $\overline{B}$ 有到四阶的連續导数并滿足条件：

$$\varphi_0|_l = \Delta\varphi_0|_l = 0,$$

而 $\varphi_1(P)$ 有到二阶的連續导数且滿足条件：

$$\varphi_1|_l = 0。$$

这时級数 (147) 的正則收斂性可直接由函数 $\varphi_1(P)$ 的富里埃級数的正則收斂性推出，而級数 (146) 的正則收斂性由如下公式推知。

$$a_m = \iint\limits_B \varphi_0(P)\, v_m(P)\, dS = -\frac{1}{\lambda_m}\iint\limits_B \varphi_0(P)\, \Delta v_m(P)\, dS =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_m}\iint\limits_B v_m(P)\, \Delta\varphi_0(P)\, dS。$$

256. 富里埃級数的研究 現在我們在对初始条件 (140) [255] 中的函数 $\varphi_0(P)$ 和 $\varphi_1(P)$ 作某些假設下，来着手研究級数 (141) 的逐項微分的可能性。这个研究的基础是在于現在要举出来的不等式，我們要在下面几段中証明它。預先要引入某些記号：

即我們置

$$I_k(u, v) = I_k(v, u) = \iint_B \sum_{i_1, \cdots, i_k=1}^{2} \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \frac{\partial^k v}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} dS$$

$$H_k(u) = \sum_{j=1}^{k} I_j(u, u) \tag{154}$$

$$I_0(u, v) = \iint_B uv\, dS。$$

假設 $u(P)$ 与 $v(P)$ 在 $\bar{B}$ 連續，并有直到 l 为連續的所写出公式中所含的各阶导数。現来叙述基本不等式：如果函数 $u(P)$ 在 $\bar{B}$ 連續，且有直到 l 为連續的到五阶的导数，并滿足条件：

$$u|_l = \Delta u|_l = 0, \tag{155}$$

那末成立不等式：

$$H_4(u) \leqslant A[I_0(\Delta^2 u, \Delta^2 u) + I_1(\Delta u, \Delta u) + \\ + I_0(\Delta u, \Delta u) + I_1(u, u)], \tag{156}$$

式中 A 是仅与区域 B 有关的常数，Δu 是拉普拉斯算子且 $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$。对迴道 l 的假設將在对(156)的証明时再来叙述。

对于这个不等式作一个注解。在这个不等式中只有 u 到四阶的导数，但为了推出它，我們要假設直到 l 为連續的第五阶导数的存在，如同这不等式的条件中所說的一样。不难去掉这一最后的条件。事实上，如果 $u(P)$ 是在 $\bar{B}$ 中四阶連續可微的，那末对充分平滑的迴道 l，函数 $u(P)$ 可以延拓到全平面，使得延拓后的函数在全平面为四阶連續可微。于是对延拓后的函数 $u(P)$ 的平均函数在 $\bar{B}$ 中有任意阶的連續导数，因而，对平均函数成立不等式(156)。但平均函数及其到四阶的导数在 $\bar{B}$ 中一致收斂于 $u(P)$ 及其相应的导数。对平均函数的不等式(156)施行極限的过程，我們就得到結論，(156) 对于函数 $u(P)$ 本身也有效。利用这一注解，我們能够降低对迴道 l 的要求。

我們將假設 $\varphi_0(P)$ 与 $\varphi_1(P)$ 在 $\overline{B}$ 中連續，$\varphi_0(P)$ 有直到 l 为連續的到四阶的导数，$\varphi_1(P)$ 有直到 l 为連續的到三阶的导数，此外，还滿足条件：

(157) $$\varphi_0\big|_l=\Delta\varphi_0\big|_l=\varphi_1\big|_l=\Delta\varphi_1\big|_l=0。$$

我們写出級数(141)：

(158) $$u(P;t)=\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos\sqrt{\lambda_m}t+b_m\sin\sqrt{\lambda_m}t)v_m(P)=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}c_m(t)v_m(P)$$

而利用(156)来估計 $H_4(u_{p,q})$，于此

$$u_{p,q}=\sum_{m=p+1}^{p+q}c_m(t)v_m(P)。$$

我們已証，函数 $v_m(P)$ 有在 l 上的正常法綫导数。如对週道 l 的平滑性作了某些假定，那末 $v_m(P)$ 就会有直到 l 为連續的到一定阶数的导数[見 226]。在后文中，我們將假設 $v_m(P)$ 有到五阶的直到 l 为連續的导数。这时，我們可以在(156)中置 $u=u_{p,q}$。例如，如果 l 是圓，直到 l 的这样的連續性是成立的。在这时函数 $v_m(P)$ 可以用貝塞尔函数来表示[II; 178]，并有任何阶的直到 l 为連續的导数。在將来，我們將說出某些对週道 l 的充分条件，在这些条件下 $v_m(P)$ 有到五阶的直到 l 为連續的导数。轉向計算当 $u=$ $=u_{p,q}$ 时在(156)右边的积分，我們有：

$$\Delta^2u_{p,q}=\sum_{m=p+1}^{p+q}c_m(t)\lambda_m^2v_m(P),$$

从此 $$I_0(\Delta^2u_{p,q},\ \Delta^2u_{p,q})=\iint_B\Big[\sum_{m=p+1}^{p+q}c_m(t)\lambda_m^2v_m(P)\Big]^2dS=$$

$$=\sum_{m=p+1}^{p+q}c_m^2(t)\lambda_m^4,$$

而完全类似地有：

$$I_0(\Delta u_{p,q},\ \Delta u_{p,q})=\sum_{m=p+1}^{p+q}c_m^2(t)\lambda_m^2。$$

为了計算 $I_1(\Delta u_{p,q},\ \Delta u_{p,q})$ 及 $I_1(u_{p,q},\ u_{p,q})$，我們注意到，如果应用格林公式[II; 193]，就得到：

$$\iint_B \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial v_j}{\partial x_1}+\frac{\partial v_i}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial v_j}{\partial x_2}\right)dS=\begin{cases}0 & i\neq j\ \text{时}\\ \lambda_m & i=j\ \text{时},\end{cases}\tag{159}$$

从此直接推出：

$$I_1(\Delta u_{p,q},\ \Delta u_{p,q})=\iint_B\left(\sum_{m=p+1}^{p+q}c_m(t)\lambda_m\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2 dS=$$

$$=\sum_{m=p+1}^{p+q}c_m^2(t)\lambda_m^3,$$

$$I_1(u_{p,q},\ u_{p,q})=\iint_B\left(\sum_{m=p+1}^{p+q}c_m(t)\ \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2 dS=$$

$$=\sum_{m=p+1}^{p+q}c_m^2(t)\lambda_m\text{。}$$

把所有这些代入到(156)的右边，我們得出：

$$H_4(u_{p,q})\leqslant A\sum_{m=p+1}^{p+q}c_m^2(t)\ (\lambda_m^4+\lambda_m^3+\lambda_m^2+\lambda_m)\text{。}$$

設 p 相当大，使得当 $m>p$ 时 $\lambda_m>1$。这时 $\lambda_m<\lambda_m^2<\lambda_m^3<\lambda_m^4$。此外，我們有

$$c_m^2(t)=(a_m\cos\sqrt{\lambda_m}t+b_m\sin\sqrt{\lambda_m}t)^2\leqslant$$

$$\leqslant(a_m^2+b_m^2)\ (\cos^2\sqrt{\lambda_m}t+\sin^2\sqrt{\lambda_m}t)=a_m^2+b_m^2,$$

而因此

$$H_4(u_{p,q})\leqslant 4A\sum_{m=p+1}^{p+q}(a_m^2+b_m^2)\lambda_m^4\text{。}\tag{160}$$

現証，在 $\varphi_0(P)$ 与 $\varphi_1(P)$ 的所作过的假設下，級数

$$\sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2+b_m^2)\lambda_m^4\tag{161}$$

收斂。考虑到对于 $v_m(P)$ 的方程，我們有：

$$a_m=\iint_B\varphi_0 v_m\,dS=\frac{1}{\lambda_m^2}\iint_B\varphi_0\Delta^2 v_m\,dS\text{。}$$

注意到加在 φ_0 上的条件，并应用兩次格林公式，就得出：

$$a_m=\frac{1}{\lambda_m^2}\iint_B \Delta^2\varphi_0\cdot v_m\,dS=\frac{\alpha_m}{\lambda_m^2}.$$

于此

$$\alpha_m=\iint_B \Delta^2\varphi_0\cdot v_m\,dS。$$

从 $\Delta^2\varphi_0$ 的封閉性方程推出級数

$$\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m^2=\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2\lambda_m^4$$

收斂。現証級数

$$\sum_{m=1}^{\infty}b_m^2\lambda_m^4 \tag{162}$$

的收斂性。利用 $\varphi_1(P)$ 的性質，$v_m(P)$ 的方程及格林公式，就得出：

$$b_m=\frac{1}{\sqrt{\lambda_m}}\iint_B \varphi_1 v_m\,dS=\frac{1}{\lambda_m^{\frac{5}{2}}}\iint_B \varphi_1\Delta^2 v_m\,dS=$$

$$=\frac{1}{\lambda_m^{\frac{5}{2}}}\iint_B \Delta\varphi_1\Delta v_m\,dS=-\frac{1}{\lambda_m^{\frac{5}{2}}}\iint_B\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\Delta\varphi_1}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v_m}{\partial x_i}dS,$$

即

$$b_m=\frac{\beta_m}{\lambda_m^2}, \tag{163}$$

于此

$$\beta_m=-\frac{1}{\sqrt{\lambda_m}}\iint_B\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\Delta\varphi_1}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v_m}{\partial x_i}dS。 \tag{164}$$

我們看出，注意到(163)，要証明級数(162)收斂，我們必須証明級数

$$\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m^2 \tag{165}$$

收斂。我們有明显的不等式：

$$\iint_B\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Delta\varphi_1+\sum_{m=1}^{N}\frac{\beta_m}{\sqrt{\lambda_m}}v_m\right)\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\Delta\varphi_1+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sum_{m=1}^{N}\frac{\beta_m}{\sqrt{\lambda_m}}v_m\right)\right]^2\right\}dS=\iint_B\left[\left(\frac{\partial\Delta\varphi_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Delta\varphi_1}{\partial x_2}\right)^2\right]dS+$$

$$+2\sum_{m=1}^{N}\frac{\beta_m}{\sqrt{\lambda_m}}\iint_B\left(\frac{\partial\Delta\varphi_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial v_m}{\partial x_1}+\frac{\partial\Delta\varphi_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial v_m}{\partial x_2}\right)dS+$$

$$+\sum_{m,n=1}^{N}\frac{\beta_m\beta_n}{\sqrt{\lambda_m\lambda_n}}\iint_B\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x_1}+\frac{\partial v_m}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x_2}\right)dS\geqslant 0。$$

利用(159)及(164),从此得出:

$$\iint_B\left[\left(\frac{\partial\Delta\varphi_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Delta\varphi_1}{\partial x_2}\right)^2\right]dS-2\sum_{m=1}^{N}\beta_m^2+\sum_{m=1}^{N}\beta_m^2\geqslant 0,$$

这就是,对所有的 N:

$$\sum_{m=1}^{N}\beta_m^2\leqslant\iint_B\left[\left(\frac{\partial\Delta\varphi_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Delta\varphi_1}{\partial x_2}\right)^2\right]dS,$$

从此就推出級数(165)的收斂性。这样,級数(161)的收斂性証畢。此后,从(160)推得,当 $p\to\infty$, $q\to\infty$ 时

(166) $$H_4(u_p, u_q)\to 0。$$

此外,从明显的不等式

$$\iint_B u_{p,q}^2\,dS=\sum_{m=p+1}^{p+q}c_m^2(t)\leqslant\sum_{m=p+1}^{p+q}(a_m^2+b_m^2)$$

直接可推出,当 $p\to\infty$ 时

(167) $$\iint_B u_{p,q}^2 dS\to 0。$$

但 $H_4(u_{p,q})$ 是 $u_{p,q}$ 关于 x_1, x_2 到四阶为止的所有的导数的平方和在 B 中的积分,我們注意到(166)与(167),就可作如下的断言:对任意的正数 ε,存在正数 $M(\varepsilon)$,它使得,当 $p\geqslant M(\varepsilon)$, $q>0$ 时

(168) $$\iint_B\left(\frac{\partial^k u_{p,q}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right)^2 dS\leqslant\varepsilon\quad(k=0,1,2,3,4)。$$

如果积分并非沿 B 所作,而是沿包含在 B 内的任一圓 D 所作,那末这一不等式更能成立。

那末,我們应用[156]中的定理,在这时 $l=4$, $n=2$, 即

$l-\left[\frac{n}{2}\right]-1=2$，就可以断定，在任一与 D 同心而半徑較小的任意圓 D_1 中，成立不等式

$$(169)\qquad \left|\frac{\partial^k u_{p,q}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right|\leqslant C_8\quad (k=0,1,2),$$

这里 C 与 D_1 的选擇有关。但包含在 B 中的任一閉区域 E 总可以用有限个包含在 B 中的圓 D_1 来遮蓋，如果选擇 C 为对于这些圓 D_1 的这些常数中的最大者，我們就能断言，不等式在整个区域 E 成立，这里常数 C 与 E 的选擇有关。从 (169) 直接推出，級数 (158) 及关于 x_1 与 x_2 逐項微分一次或二次后所得的級数在 E 中一致收斂。

如果把級数(158)关于 t 逐項微分二次，那末就可做出它們的兩个具如下形狀的优級数

$$(170)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m|a_m v_m(P)|\quad 及\quad \sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m|b_m v_m(P)|。$$

例如我們証明，第一个級数在 $\overline{B}$ 中一致收斂。它的一般項可写为形狀：

$$\lambda_m|a_m v_m(P)|=|a_m|\lambda_m^2\frac{|v_m(P)|}{\lambda_m}。$$

应用不等式 $\alpha\beta\leqslant\frac{1}{2}(\alpha_m^2+\beta_m^2)$，我們就把問題化为級数

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2\lambda_m^4\quad 及\quad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{v_m^2(P)}{\lambda_m^2}$$

的收斂性去。而它們的收斂性是已經証好的，并且对第二个級数有[**235**]

$$(171)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{v_m^2(P)}{\lambda_m^2}=\iint_B G^2(P;Q)dS。$$

但不难証明，右边的函数是 P 在 $\overline{B}$ 的連續函数，它在 l 等于零[見 **235** 及 **224**]，从此，由狄尼定理[**23**]推出，在公式(171)左边的

級数在 $\overline{B}$ 中一致收斂。因而更能断定級数 (170) 及由級数 (158) 关于 t 逐項微分一次或二次所得級数在 B 中一致收斂。这些也証明了，公式(158)所定义的函数 $u(P;t)$ 滿足方程 (138) 及条件 (139)与(140)。我們現在轉向于証明不等式 (156)。这証明將分为若干步驟。我們从闡明加在迴道 l 上的条件开始。

257. 关于迴道的假設 設迴道 l 是可化直的簡單閉曲綫，其方程可表示为形狀：

(172) $$x_1 = x_1(s); \quad x_2 = x_2(s),$$

这里 s 是从 l 上某定点量起的弧長，它的方向我們馬上就要固定它，而周期函数 $x_1(s)$ 与 $x_2(s)$ 有到四阶的連續的导数。再假設在某一包含閉区域 $\overline{B}$ 的区域 D 中，存在一有到四阶的連續导数的函数 $\Phi(x_1, x_2)$，它使得 l 的方程可以写成形狀：

(173) $$\Phi(x_1, x_2) = 0,$$

并且在 l 上

(174) $$(\text{grad}\ \Phi)^2 = \Phi_{x_1}^2 + \Phi_{x_2}^2 > 0。$$

例如，現設在 l 內部 $\Phi(x_1, x_2) > 0$。而 (y_1, y_2) 为以 N 为原点的笛氏坐标，y_2 軸指向 l 在 N 点的外法綫方向，而 y_1 指向切綫方向。并且 (y_1, y_2) 軸的取向与軸 (x_1, x_2) 的取向相同，这些就决定了在 l 上量弧長 s 的方向。y_2 的方向与 grad $\Phi(x_1, x_2)$ 的方向相反。

設 $c_i^{(j)}$ 是 x_i 軸与 y_j 軸交角的余弦，$(x_1^{(N)}, x_2^{(N)})$ 是点 N 的坐标。我們有

(175) $$x_i = c_i^{(1)} y_1 + c_i^{(2)} y_2 + x_i^{(N)} \quad (i=1, 2),$$

在 (y_1, y_2) 坐标下，l 的方程就是：

(176) $$\Phi(c_1^{(1)} y_1 + c_1^{(2)} y_2 + x_1^{(N)}, \quad c_2^{(1)} y_1 + c_2^{(2)} y_2 + x_2^{(N)}) = \overline{\Phi}(y_1, y_2) = 0,$$

并且

$$\left(\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial y_2}\right)_N = -|\text{grad}\ \Phi| \neq 0; \quad \left(\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial y_1}\right)_N = 0。$$

利用隐函数定理[I; 159]，我們可把迴道 l 在点 N 近旁的部分写为显式的形狀：

(177) $$y_2 = \omega_N(y_1)。$$

这一不等式在 $|y_1| < h_N$ 时成立，这里 h_N 是一与 N 有关的正常数，函数 $\omega_N(y_1)$ 有到四阶的連續的导数[見 I; 159]，且 $\omega_N(0) = 0$。

用字母 m 来記 |grad Φ| 在 l 上的最大値 $(m > 0)$。

設 B_γ 为 $\overline{B}$ 中由满足 $|\mathrm{grad}\Phi|\geqslant\gamma m$ 的点構成的閉集，而 B'_γ 为 $\overline{B}$ 中的由满足 $|\mathrm{grad}\ \Phi|\leqslant\gamma m$ 的点所構成的閉集。作一函数，使它在 $B_{\frac{1}{3}}$ 及在 $\overline{B}$ 外等于1，而在 $B'_{\frac{1}{4}}$ 等于零。我們把它連續地拓广到全平面，并作超后一函数的平均函数[157]。选取充分小的平均化的半徑，我們就能作出一个定义在全平面上的函数 $\eta(x_1, x_2)$，它在 $B_{\frac{3}{4}}$ 及在 $\overline{B}$ 外等于1，而在 $B'_{\frac{1}{3}}$ 等于零，且有任意阶的偏导数。这时函数：

$$a_1(x_1, x_2) = -\frac{\Phi_{x_1}}{|\mathrm{grad}\ \Phi|}\eta(x_1,x_2);$$

(178)

$$a_2(x_1,x_2) = -\frac{\Phi_{x_2}}{|\mathrm{grad}\ \Phi|}\eta(x_1, x_2)$$

在 $\overline{B}$ 中三阶連續可微，而在 l 上化为 $\cos(n, x_1)$ 与 $\cos(n, x_2)$，这里 n 是 l 的外法綫方向。在 $|y_1|<h_N$ 时我們有恒等式：

$$\tilde{\Phi}(y_1, \omega_N(y_1))=0。$$

关于 y_1 微分四次，然后置 $y_1=0$，并注意到 $\omega'_N(0)=0$，我們就得到在点 N 的等式：

$$\tilde{\Phi}_{y_1}=0$$

$$\tilde{\Phi}_{y_1^2}+\tilde{\Phi}_{y_2}\omega''_N(0)=0$$

(179)

$$\tilde{\Phi}_{y_1^3}+3\tilde{\Phi}_{y_1y_2}\omega''_N(0)+\tilde{\Phi}_{y_2}\omega'''_N(0)=0$$

$$\tilde{\Phi}_{y_1^4}+6\tilde{\Phi}_{y_1^2y_2}\omega''_N(0)+4\tilde{\Phi}_{y_1y_2}\omega'''_N(0)+3\tilde{\Phi}_{y_2^2}[\omega''_N(0)]^2+\tilde{\Phi}_{y_2}\omega^{(4)}_N(0)=0。$$

因为 $|\tilde{\Phi}_{y_2}|\geqslant m$，所以从这些等式中可以决定 $\omega^{(k)}_N(0)$ $(k=2, 3, 4)$，并成立不等式：

(180) $$|\omega^{(k)}_N(0)|\leqslant C \quad (k=2, 3, 4),$$

这里常数 C 与 N 無关。

258. 輔助的命題 設函数 $u(x_1, x_2)$ 为已定的，它在 $\overline{B}$ 中为連續且有直到 l 連續的到四阶导数。如果在公式(175)中把(x_1, x_2)改为 (y_1, y_2)，那末把所得的函数記为 $\tilde{u}(y_1, y_2)$。

如在 l 上 $u=0$，那末成立公式(179)，在其中須把 $\tilde{\Phi}$ 改为 $\tilde{u}$。实際上 $u[y_1, \omega_N(y_1)]=0$，而所提到的公式完全与以前一样地可推出。从这些公式直接推出：

引理 1. 如果在 l 上 $u=0$，那末 $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_1}=0$，且 $\frac{\partial^k\tilde{u}}{\partial y_1^k}(k=2, 3, 4)$是 $\tilde{u}$ 的到 $k-1$ 阶为止的导数的綫性組合，其系数具有形狀 $a[\omega^{(k)}_N(0)]^m$, $(k=2, 3,$

4; $m=1, 2$), 于此 a 是数。

在轉向于表述第二个引理之前，我們引进一些記号与条件。設 $\varphi(x_1, x_2)$ 与 $\psi(x_1, x_2)$ 是在 $\overline{B}$ 的連續函数，在 B 中 φ 有到 $(p+1)$ 阶导数，ψ 有到 $(q+1)$ 阶导数，它們直到 l 为連續。

如前，我們用 $\tilde{\varphi}$ 及 $\tilde{\psi}$ 来記在坐标 (y_1, y_2) 下所表达的函数 $\varphi(x_1, x_2)$ 与 $\psi(x_1, x_2)$。考察表达式：

$$
\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\left[\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_2^\alpha\,\partial y_1^\gamma}\cdot\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_2^\beta\,\partial y_1^\delta}\right]\right\}_{y_1=y_2=0}. \tag{181}
$$

它在迴道 l 上的每点 N 有确定的数值，因而是弧長 s 的函数。用 $m(s)$ 来記这个函数，并且还引入如下的記号：

$$
l(s)=\left\{\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_2^\alpha\,\partial y_1^\gamma}\cdot\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_2^\beta\,\partial y_1^\delta}\right\}_{y_1=y_2=0}. \tag{182}
$$

再設 $K(s)$ 为迴道 l 的曲率，它等于 $\omega_N''(0)$。

引理 2. 在所作的假設下，成立等式：

$$
\begin{aligned}
m(s)=\frac{dl(s)}{ds}+K(s)\Bigg\{&\alpha\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_2^{\alpha-1}\,\partial y_1^{\gamma+1}}\cdot\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_2^\beta\,\partial y_1^\delta}+\\
&+\beta\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_2^\alpha\,\partial y_1^\gamma}\cdot\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_2^{\beta-1}\partial y_1^{\delta+1}}-\gamma\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_2^{\alpha+1}\,\partial y_1^{\gamma-1}}\cdot\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_2^\beta\,\partial y_1^\delta}-\\
&-\delta\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_2^\alpha\,\partial y_1^\gamma}\cdot\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_2^{\beta+1}\,\partial y_1^{\delta-1}}\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{183}
$$

不失一般性，我們可以在对应 $s=0$ 的点 N_0 来証明 (183) 式。其次，我們用 (y_1, y_2) 来記在点 N_0 的局部坐标。設 N_1 为 l 上的另一点，它对应于数值 $s=s_1$，并設 (z_1, z_2) 为点 N_1 的局部坐标。設 $\theta(s_1)$ 为 y_1 方向轉到 z_1 方向所必須轉过的角度，并且轉动的方向决定于軸的取向。我們有：

$$
y_1=z_1\cos\theta-z_2\sin\theta+y_1^{(0)}=c_{11}z_1+c_{12}z_2+y_1^{(0)}
$$

$$
y_2=z_1\sin\theta+z_2\cos\theta+y_2^{(0)}=c_{21}z_1+c_{22}z_2+y_2^{(0)},
$$

式中 $(y_1^{(0)}, y_2^{(0)})$ 是在坐标系 (y_1, y_2) 下点 N_1 的坐标，且当 $s_1\to 0$ 时 $\theta(s_1)\to 0$。以 $\tilde{\tilde{\varphi}}$ 及 $\tilde{\tilde{\psi}}$ 来記用 z_1 及 z_2 所表达的函数 φ 与 ψ，我們可以写出：

$$
\frac{\partial^p\tilde{\tilde{\varphi}}}{\partial z_2^\alpha\,\partial z_1^\gamma}=\sum_{g_1,\cdots,g_\alpha,h_1,\cdots,h_\gamma=1}^{2}\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_{g_1}\cdots\partial y_{g_\alpha}\partial y_{h_1}\cdots\partial y_{h_\gamma}}c_{g_12}\cdots c_{g_\alpha 2}c_{h_11}\cdots c_{h_\gamma 1}
$$

$$
\frac{\partial^q\tilde{\tilde{\psi}}}{\partial z_2^\beta\,\partial z_1^\delta}=\sum_{l_1,\cdots,l_\beta,m_1,\cdots,m_\delta=1}^{2}\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_{l_1}\cdots\partial y_{l_\beta}\partial y_{m_1}\cdots\partial y_{m_\delta}}c_{l_12}\cdots c_{l_\beta 2}c_{m_11}\cdots c_{m_\delta 1},
$$

而因此

(184)
$$l(s_1)=\sum\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_{g_1}\cdots\partial y_{g_\alpha}\partial y_{h_1}\cdots\partial y_{h_\gamma}}\times$$
$$\times\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_{l_1}\cdots\partial y_{l_\beta}\partial y_{m_1}\cdots\partial y_{m_\delta}}c_{g_12}\cdots c_{g_\alpha2}c_{l_12}\cdots c_{l_\beta2}c_{h_11}\cdots c_{h_\gamma1}c_{m_11}\cdots c_{m_\delta1},$$

这里的和式是按 $g_1,\cdots,g_\alpha,h_1,\cdots,h_\gamma,l_1,\cdots,l_\beta,m_1,\cdots,m_\delta$ 取1及2所作。当 $s_1\to0$ 时我們有：

$$c_{g_n2}\to\begin{cases}1 & \text{当 } g_n=2\\ 0 & \text{当 } g_n=1;\end{cases}\qquad c_{g_n1}\to\begin{cases}1 & \text{当 } g_n=1\\ 0 & \text{当 } g_n=2\end{cases}$$

$$\frac{d}{ds}c_{g_n2}=\begin{cases}-\theta'(s_1)\cos\theta(s_1)\to-K_0 & \text{当 } g_n=1\\ \theta'(s_1)\sin\theta(s_1)\to0 & \text{当 } g_n=2\end{cases}$$

$$\frac{d}{ds}c_{g_n1}=\begin{cases}-\theta'(s_1)\sin\theta(s_1)\to0 & \text{当 } g_n=1\\ \theta'(s_1)\cos\theta(s_1)\to K_0 & \text{当 } g_n=2,\end{cases}$$

这里 $K_0=\left.\frac{d\theta(s_1)}{ds_1}\right|_{s_1=0}$。把 (184) 的两边关于 s_1 微分，并注意到 $\frac{dl(s_1)}{ds_1}$ 的連續性，(它是直接由定义 (182) 及上面所作的假定推出的)，我們得出：

(185)
$$\left.\frac{dl(s_1)}{ds_1}\right|_{s_1=0}=\lim_{s_1\to0}\left[\frac{d}{ds_1}\left(\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_2^\alpha\partial y_1^\gamma}\cdot\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_2^\beta\partial y_1^\delta}\right)\right]-$$
$$-K_0\alpha\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_2^{\alpha-1}\partial y_1^{\gamma+1}}\cdot\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_2^\beta\partial y_1^\delta}-K_0\beta\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_2^\alpha\partial y_1^\gamma}\cdot\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_2^{\beta-1}\partial y_1^{\delta+1}}+$$
$$+K_0\gamma\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_2^{\alpha+1}\partial y_1^{\gamma-1}}\cdot\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_2^\beta\partial y_1^\delta}+K_0\delta\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_2^\alpha\partial y_1^\gamma}\cdot\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_2^{\beta+1}\partial y_1^{\delta-1}}。$$

設 $y_1=y_1(s)$，$y_2=y_2(s)$ 为迴道 l 在坐标系統 (y_1,y_2) 下的方程。我們有：

$$\frac{d}{ds_1}=\frac{\partial}{\partial y_1}y_1'(s_1)+\frac{\partial}{\partial y_2}y_2'(s_1),$$

并且当 $s_1\to0$ 时 $y_1'(s_1)\to1$，$y_2'(s_1)\to0$。从此推出：

$$\lim_{s_1\to0}\left[\frac{d}{ds_1}\left(\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_2^\alpha\partial y_1^\gamma}\cdot\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_2^\beta\partial y_1^\delta}\right)\right]=\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_2^\alpha\partial y_1^\gamma}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_2^\beta\partial y_1^\delta}\right)\right\}_{s_1=0}=m(0)。$$

把它代入(185)，就得到(183)。

推論 把(183)的兩边沿 l 积分，我們得到一个在將来要用到的公式：

$$(186)\qquad \int_l \frac{\partial}{\partial y_1}\left\{\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_2^\alpha\,\partial y_1^\gamma}\cdot\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_2^\beta\,\partial y_1^\delta}\right\}_{y_1=y_2=0} ds=$$

$$=\int_l K(s)\left\{\alpha\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_2^{\alpha-1}\,\partial y_1^{\gamma+1}}\cdot\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_2^\beta\,\partial y_1^\delta}+\beta\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_2^\alpha\,\partial y_1^\gamma}\cdot\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_2^{\beta-1}\,\partial y_1^{\delta+1}}-\right.$$

$$\left.-\gamma\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_2^{\alpha+1}\,\partial y_1^{\gamma-1}}\cdot\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_2^\beta\,\partial y_1^\delta}-\delta\frac{\partial^p\tilde{\varphi}}{\partial y_2^\alpha\,\partial y_1^\gamma}\cdot\frac{\partial^q\tilde{\psi}}{\partial y_2^{\beta+1}\,\partial y_1^{\delta-1}}\right\}_{y_1=y_2=0} ds。$$

259. 迴道积分的变换 設 $u(x_1, x_2)$ 及 $v(x_1, x_2)$ 为在 B 中連續的函数，且 u 在 $\overline{B}$ 有到五阶的直到 l 为連續的导数，v 在 $\overline{B}$ 有到四阶的直到 l 为連續的导数。除了我們已在 [256] 中引入的記号 $I_k(u, v)$ 与 $H_k(u)$ 外，我們还設

$$(187)\qquad \Phi_k(u, v)=\int_l \sum_{i_1,\cdots,i_{k-1}=1}^{2}\frac{\partial^k u}{\partial n\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{k-1}}}\cdot\frac{\partial^{k-1}v}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{k-1}}}ds。$$

式中 n 是 l 的外法綫方向。我們指出，在积分 $I_k(u, v)$ 及 $\Phi_k(u, v)$ 中的被积函数在坐标 (x_1, x_2) 的正交变换下为不变式。如果利用公式 (175) 及以 $c_i^{(k)}$ 为元素的矩陣的正交性条件，就容易驗証这一点。

从明显的恒等式

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{i_1,\cdots,i_{k-1}=1}^{2}\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{k-1}}\partial x_i}\cdot\frac{\partial^{k-1}v}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{k-1}}}=$$

$$=\sum_{i_1,\cdots,i_{k-1}=1}^{2}\frac{\partial^{k-1}\Delta u}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{k-1}}}\cdot\frac{\partial^{k-1}v}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{k-1}}}+$$

$$+\sum_{i_1,\cdots,i_{k-1},i=1}^{2}\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{k-1}}\partial x_i}\cdot\frac{\partial^k v}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{k-1}}\partial x_i}$$

利用沿 B 的积分并对左边应用奥斯特洛格拉得斯基公式，我們得出：

$$(188)\qquad I_k(u, v)+I_{k-1}(\Delta u, v)=\Phi_k(u, v)。$$

把这公式应用几回，就有：

$$(189)\qquad \begin{aligned} I_2(u, u)&=\Psi_2(u)+I_0(\Delta u, \Delta u)\\ I_3(u, u)&=\Psi_3(u)+I_1(\Delta u, \Delta u)\\ I_4(u, u)&=\Psi_4(u)+I_0(\Delta^2 u, \Delta^2 u),\end{aligned}$$

于此 $\Psi_k(u)$ 为沿 l 的积分，它由公式

$$(190)\qquad \begin{aligned} \Psi_2(u)&=\Phi_2(u, u)-\Phi_1(u, \Delta u)\\ \Psi_3(u)&=\Phi_3(u, u)-\Phi_2(u, \Delta u)\\ \Psi_4(u)&=\Phi_4(u, u)-\Phi_3(u, \Delta u)+\Phi_2(\Delta u, \Delta u)-\Phi_1(\Delta u, \Delta^2 u)\end{aligned}$$

所定义。現表述一个定理，在証明基本不等式 (156) 时我們需要它。

定理 *如果 $u(x_1, x_2)$ 在 $\overline{B}$ 中連續，有到五阶的直到 l 为連續的导数。*

且滿足条件：

(191) $$u|_l=\Delta u|_l=0,$$

那末 $\Psi_2(u)$, $\Psi_3(u)$, $\Psi_4(u)$ 可以經过变换，使得在沿 l 的积分号下的被积函数是分别由不超过一阶，二阶与三阶的导数的乘积所組成。

因为在积分 $\Phi_k(u, v)$ 中的被积函数关于直交变换是不变的，我們可以把这些被积函数用在迴道上点的局部坐标来表示，且注意到，方向 n 重合于方向 y_2，我們得出

(192) $$\Phi_k(u, v)=\int_l \sum_{i_1,\cdots,i_{k-1}=1}^{2} \frac{\partial^k \tilde{u}}{\partial y_2 \partial y_{i_1}\cdots\partial y_{i_{k-1}}}\cdot\frac{\partial^{k-1}\tilde{v}}{\partial y_{i_1}\cdots\partial y_{i_{k-1}}}\,ds.$$

把在这一积分中的被积函数記为 $\overline{\Phi}_k(\tilde{u}, \tilde{v})$，即

(193) $$\Phi_k(u, v)=\int_l \overline{\Phi}_k(\tilde{u}, \tilde{v})\,ds,$$

为了写法簡便計，还引进如下的記号：

$$\frac{\partial^s \tilde{u}}{\partial y_1^s}=\tilde{u}_s;\quad \frac{\partial^s \tilde{u}}{\partial y_2^s}=\tilde{u}^{(s)};\quad \frac{\partial^n \tilde{u}}{\partial y_1^k\,\partial y_2^l}=\tilde{u}_k^{(l)}.$$

如果我們在积分(192)的被积函数中聚集那些 $i_{k-1}=1$ 的項与那些 $i_{k-1}=2$ 的項，那末就会得出恒等式：

(194) $$\overline{\Phi}_k(\tilde{u}, \tilde{v})=\overline{\Phi}_{k-1}(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1)+\overline{\Phi}_{k-1}(\tilde{v}, \tilde{u}^{(2)}).$$

其次，注意到 $\Delta\tilde{u}=\tilde{u}_2+\tilde{u}^{(2)}$，我們还会有：

(195) $$\overline{\Phi}_k(\tilde{u}, \tilde{v})-\overline{\Phi}_{k-1}(\tilde{v}, \Delta\tilde{u})=\overline{\Phi}_{k-1}(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1)-\overline{\Phi}_{k-1}(\tilde{v}, \tilde{u}_2).$$

利用(194)及(195)，我們得出：

(196) $$\Psi_2(u)=\int_l \overline{\Phi}_1(\tilde{u}_1, \tilde{u}_1)\,ds-\int_l \overline{\Phi}_1(\tilde{u}, \tilde{u}_2)\,ds$$

(197) $$\Psi_3(u)=\int_l [\overline{\Phi}_1(\tilde{u}_2, \tilde{u}_2)-\overline{\Phi}_1(\tilde{u}_2, \tilde{u}^{(2)})]\,ds+\int_l [\overline{\Phi}_1(\tilde{u}_1, \tilde{u}_1^{(2)})-\overline{\Phi}_1(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3)]\,ds$$

(198) $$\Psi_4(u)=\int_l [\overline{\Phi}_1(\tilde{u}_3, \tilde{u}_3)+\overline{\Phi}_1(\tilde{u}_1^{(2)}, \tilde{u}_1^{(2)})-2\overline{\Phi}_1(\tilde{u}_3, \tilde{u}_1^{(2)})+\overline{\Phi}_1(\Delta\tilde{u}_1, \Delta\tilde{u}_1)]\,ds+\int_l [2\overline{\Phi}_1(\tilde{u}_2, \tilde{u}_2^{(2)})-\overline{\Phi}_1(\tilde{u}_2, \tilde{u}_4)-\overline{\Phi}_1(\tilde{u}^{(2)}, \tilde{u}_2^{(2)})-\overline{\Phi}_1(\Delta\tilde{u}, \Delta\tilde{u}_2)]\,ds.$$

这些公式右边的第一个积分是形狀为

(199) $$\int_l \frac{\partial^k \tilde{u}}{\partial y_2^{2\alpha+1}\,\partial y_1^{k-2\alpha-1}}\cdot\frac{\partial^{k-1}\tilde{u}}{\partial y_2^{2\beta}\,\partial y_1^{k-1-2\beta}}\,ds$$

的积分之和，于此

$$k=2,\ 3,\ 4;\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\left[\frac{k-2}{2}\right];\quad 0\leqslant\beta\leqslant\left[\frac{k-1}{2}\right]。$$

这时，$k-2\alpha-1\geqslant1$，且在积分 (199) 被积函数的第一个因子中我們有关于 y_1 的微分。积分显然的恒等式：

$$\frac{\partial^k\tilde{u}}{\partial y_2^{2\alpha+1}\partial y_1^{k-2\alpha-1}}\cdot\frac{\partial^{k-1}\tilde{u}}{\partial y_2^{2\beta}\partial y_1^{k-1-2\beta}}=\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial^{k-1}\tilde{u}}{\partial y_2^{2\alpha+1}\partial y_1^{k-2\alpha-2}}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial^{k-1}\tilde{u}}{\partial y_2^{2\beta}\partial y_1^{k-1-2\beta}}\right)-\frac{\partial^{k-1}\tilde{u}}{\partial y_2^{2\alpha+1}\partial y_1^{k-2\alpha-2}}\cdot\frac{\partial^k\tilde{u}}{\partial y_2^{2\beta}\partial y_1^{k-2\beta}},$$

并把(186)的右边应用到左边来，我們見到，积分(199)与形状为

$$\int_l\frac{\partial^k\tilde{u}}{\partial y_2^{2\beta}\partial y_1^{k-2\beta}}\cdot\frac{\partial^{k-1}\tilde{u}}{\partial y_2^{2\alpha+1}\partial y_1^{k-2\alpha-2}}ds\tag{200}$$

的积分之差为$(k-1)$阶导数与 $K(s)$ 的乘积的积分。此外公式(196)，(197)与(198)右边的第二积分与积分(200)有相同的結構。为了將来需要，我們着重指出，导数

$$\left(\frac{\partial^m\tilde{u}}{\partial y_1^{m_1}\partial y_2^{m_2}}\right)_N$$

是 $u(x_1,\ x_2)$的 m 阶导数的綫性組合，其系数是 $\cos(n_1,\ x_1)$与 $\cos(n_1,\ x_2)$的幂的乘积。如果后者用公式 (178) 所定义的 $a_1(x_1,\ x_2)$，$a_2(x_1,\ x_2)$ 所代替，那末我們就得出 $u(x_1,\ x_2)$ 的 m 阶导数的綫性組合，其系数在 $\overline{B}$ 中为平滑的，而在边界 l 上的每点 N，它化为 $\dfrac{\partial^m\tilde{u}}{\partial y_1^{m_1}\partial y_2^{m_2}}$。

所余下来要証明的是，形状为 (200) 的积分可以由 $u(x_1,\ x_2)$ 的最初的$(k-1)$阶的导数的乘积的积分所表示，只要这个函数滿足条件(191)。

如果 $\beta=0$，那末这就直接从引理1推出。設 $\beta=1$。我們有

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y_2^2}=\Delta\tilde{u}-\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y_1^2},$$

而因此

$$\frac{\partial^k u}{\partial y_2^2\partial y_1^{k-2}}=\frac{\partial^{k-2}\Delta\tilde{u}}{\partial y_1^{k-2}}-\frac{\partial^k\tilde{u}}{\partial y_1^k},$$

再一次应用引理1（由于(191)，它是能用的)，我們見到，最后一公式的右边可以用 $\Delta\tilde{u}$ 到$(k-3)$阶的导数及 $\tilde{u}$ 的到$(k-1)$阶导数来表示。因为 β 之值只可能为0或1，定理証畢。

260. 基本不等式的証明 从所証的定理推出，$\Psi(u)$为具有形状为

$$\int_l[\omega_N^{(p)}(0)]^r\frac{\partial^{k-1}\tilde{u}}{\partial y_2^{\alpha}\partial y_1^{k-1-\alpha}}\cdot\frac{\partial^m\tilde{u}}{\partial y_2^{\beta}\partial y_1^{m-\beta}}ds$$

的积分之和，于此 $1\leqslant m\leqslant k-1$，$2\leqslant s\leqslant k$。但，如我們从前所指出的，$\tilde{u}$ 关于 (y_1, y_2) 的导数可以由 $u(x_1, x_2)$ 关于 (x_1, x_2) 的导数的綫性組合来表示，其系数为有界的。再注意到 $\omega_N^{(s)}(0)$ 的有界性，我們就見到，$\Psi_k(u)$ 不超过有限个形狀为

(201)
$$C\int_l \left|\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_1^{\mu}\partial x_2^{k-1-\mu}}\right|\cdot\left|\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\nu}\partial x_2^{m-\nu}}\right|ds\leqslant$$
$$\leqslant\frac{C}{2}\int_l\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_1^{\mu}\partial x_2^{k-1-\mu}}\right)^2ds+\frac{C}{2}\int_l\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\nu}\partial x_1^{m-\nu}}\right)^2ds$$

的項之和，于此 C 为常数。現估計在右边的积分。为此，我們回到由公式(178)所定义的函数 $a_1(x_1, x_2)$ 与 $a_2(x_1, x_2)$。在 l 上的点它們等于 $\cos(n, x_1)$ 与 $\cos(n, x_2)$，因而在 l 上

$$a_1\cos(n, x_1)+a_2\cos(n, x_2)=1。$$

应用奥斯特洛格拉得斯基公式，我們就得出：

$$\int_l\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_1^{\mu}\partial x_2^{k-1-\mu}}\right)^2ds=\int_l\left[\cos(n, x_1)a_1\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_1^{\mu}\partial x_2^{k-1-\mu}}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\cos(n, x_2)a_2\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_1^{\mu}\partial x_2^{k-1-\mu}}\right)^2\right]ds=\iint_B\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left[a_1\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_1^{\mu}\partial x_2^{k-1-\mu}}\right)^2\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[a_2\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_1^{\mu}\partial x_2^{k-1-\mu}}\right)^2\right]\right\}dS=\iint_B\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_1^{\mu}\partial x_2^{k-1-\mu}}\right)^2\times$$
$$\times\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\right)dS+2\iint_B\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_1^{\mu}\partial x_2^{k-1-\mu}}\left(a_1\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\mu+1}\partial x_2^{k-1-\mu}}+\right.$$
$$\left.+a_2\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\mu}\partial x_2^{k-\mu}}\right)dS。$$

引入記号：

$$M=\max_B\left\{|a_1|, |a_2|, \left|\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\right|\right\},$$

并利用明显的不等式

$$2|ab|\leqslant2\left|a\sqrt{\varepsilon_k}\cdot\frac{b}{\sqrt{\varepsilon_k}}\right|\leqslant(a\sqrt{\varepsilon_k})^2+\left(\frac{b}{\sqrt{\varepsilon_k}}\right)^2=\varepsilon_k a^2+\frac{b_2}{\varepsilon_k},$$

于此 $\varepsilon_k>0$，我們得出估計：

$$\left|\iint_B\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_1^{\mu}\partial x_2^{k-1-\mu}}\right)^2\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\right)dS\right|\leqslant MI_{k-1}(u, u)$$

$$\left|2\iint_B\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_1^{\mu}\partial x_2^{k-1-\mu}}\left(a_1\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\mu+1}\partial x_2^{k-1-\mu}}+a_2\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\mu}\partial x_2^{k-\mu}}\right)dS\right|\leqslant$$
$$\leqslant2M\left[\varepsilon_k I_k(u, u)+\frac{1}{\varepsilon_k}I_{k-1}(u, u)\right],$$

从此

$$\int_l \left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_1^{\mu}\partial x_2^{k-1-\mu}}\right)^2 ds \leqslant MI_{k-1}(u,\ u)+2M\left[\varepsilon_k I_k(u,\ u)+\right. \tag{202}$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon_k}I_{k-1}(u,\ u)\right].$$

如果 $m<k-1$，那末取 $\varepsilon=1$，就得到估計：

$$\int_l \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\nu}\partial x_2^{m-\nu}}\right)^2 ds \leqslant 2MI_{m+1}(u,\ u)+3MI_m(u,\ u)。 \tag{203}$$

如我們見过的，$\Psi_k(u)$ 不超过出現于(201)中的常数 $\frac{C}{2}$ 与有限个积分之和的乘积，对这些积分我們已得到估計(202)与(203)。因而

$$|\Psi_k(u)| \leqslant A_1^{(k)}\varepsilon_k I_k(u,\ u)+\frac{A_2^{(k)}}{\varepsilon_k}I_{k-1}(u,\ u)+ \tag{204}$$

$$+A_3^{(k)}\sum_{r=1}^{k-1}I_r(u,\ u),$$

这里 $A_s^{(k)}(s=1,\ 2,\ 3)$ 是与 k、C、及項数有关的常数。然后利用公式 (189)，我們得出：

$$I_2(u,\ u)\leqslant A_1^{(2)}\varepsilon_2 I_2(u,\ u)+\left(\frac{A_2^{(2)}}{\varepsilon_2}+A_3^{(2)}\right)I_1(u,\ u)+I_0(\Delta u,\ \Delta u),$$

且选擇 ε_2，使得 $1-\varepsilon_2 A_1^{(2)}\geqslant\frac{1}{2}$，我們就得到：

$$I_2(u,\ u)\leqslant 2\left(\frac{A_2^{(2)}}{\varepsilon_2}+A_3^{(2)}\right)I_1(u,\ u)+2I_0(\Delta u,\ \Delta u)= \tag{205}$$

$$=2I_0(\Delta u,\ \Delta u)+B_2 I_1(u,\ u)。$$

类似地，我們选擇 ε_3 与 ε_4，使得 $1-\varepsilon_k A_1^{(k)}\geqslant\frac{1}{2}$，利用(189)与(204)得出：

$$I_3(u,\ u)\leqslant 2I_1(\Delta u,\ \Delta u)+B_3[I_2(u,\ u)+I_1(u,\ u)] \tag{206}$$

$$I_4(u,\ u)\leqslant 2I_0(\Delta^2 u,\ \Delta^2 u)+B_4[I_3(u,\ u)+ \tag{207}$$

$$+I_2(u,\ u)+I_1(u,\ u)],$$

于此 B_s 是常数。

如果用(205)的右边代替 $I_2(u,\ u)$，代入(206)的右边，那末就得到

$$I_3(u,\ u)\leqslant 2I_1(\Delta u,\ \Delta u)+2B_3 I_0(\Delta u,\ \Delta u)+B_3(B_2+ \tag{208}$$

$$+1)I_1(u,\ u)。$$

又如果用(205)与(208)的右边代替 $I_2(u,\ u)$ 与 $I_3(u,\ u)$，代入(207)的右边，那末就得到：

$$(209)\qquad I_4(u,u)\leqslant 2I_0(\Delta^2u,\Delta^2u)+C_1I_1(\Delta u,\Delta u)+ \\ +C_2I_0(\Delta u,\Delta u)+C_3I_1(u,u),$$

于此 C_s 是常数。

把(205)，(208)与(209)相加起来，我們也就得到基本不等式：

$$H_4(u)\leqslant A[I_0(\Delta^2u,\Delta^2u)+I_1(\Delta u,\Delta u)+I_0(\Delta u,\Delta u)+I_1(u,u)],$$

于此 A 是常数。

我們前面所进行的关于級数(158)可以关于 x_1, x_2, t 逐項微分的証明（因而它就給出問題(138)，(139)与(140)的解）实質上是以不等式(156)为基础的。从[256]开始到本段为止的全部材料都是 O. A. 拉迪任斯卡婭（Ладыженская）的著作"論波动方程的富里埃方法"（"О методе Фурье для волнового уравнения", Доклады Академии Наук СССР, т. 75, №6, 1950）对兩个变量的情形所进行的叙述。这叙述是由 O. A. 拉迪任斯卡婭与 X. Л. 斯穆棱斯基所完成的。

231. 特征函数的导数　在驗証富里埃方法时，我們曾利用以下的事实，方程

$$(210)\qquad \Delta v_m+\lambda_m v_m=0$$

在边值条件

$$(211)\qquad v_m|_l=0$$

下的任一特征函数 $v_m(P)$ 有到五阶的直到 l 为連續的导数。在三維空間的情形，我們已在[226]中表述过它的一个充分条件。現在，我們利用圓到單連通区域 B 的保角变换，我們对实現保角变换的函数作了某些假設下，来証明上面所指出的特征函数的性質。設

$$(212)\qquad z=f(\zeta)\quad (z=x+iy;\quad \zeta=\xi+i\eta)$$

是实現由圓 $|\zeta|\leqslant 1$ 到單連通区域 B 的保角变换的函数。我們假設在閉圓 $|\zeta|\leqslant 1$，$f(\zeta)$ 以及它的到五阶的导数为連續，且 $f'(\zeta)\neq 0$。为了使这事实成立，迴道 l 須滿足一些充分条件，例如可以在 B. И.

斯米尔諾夫的著作："論保角变换时的边界上的对应"（"О соответствии границ при конформном преобразовании" Mathem. Annal. т. 107, 1932）中找到它們。由变量(x, y)过渡到变量(ξ, η)，我們得到函数 $\tilde{v}_m(\xi, \eta)=v_m(x, y)$，我們还得出方程

$$\Delta\tilde{v}_m=-\lambda_m|f'(\zeta)|^2\tilde{v}_m \tag{213}$$

以代替(210)。以后的論述的基础在于如下的兩个引理，我們在下一段中引出它們的証明。

引理1. 如果函数 $\psi(x, y)$ 在閉圓 $\beta(x^2+y^2\leqslant 1)$ 中連續，且在 β 内有連續的一阶导数，那末在圓周 $\lambda(x^2+y^2=1)$ 上滿足条件 $u=0$，在 β 内滿足方程 $\Delta u=\psi$ 的解有直到 λ 上为連續的一阶导数。

引理2. 如果 $\psi(x, y)$ 有直到 λ 为連續的到 p 阶导数。那末 $u(x, y)$ 有直到 λ 为連續的到$(p+1)$阶的导数。

应用引理1再应用引理2到等式(213)，并且令 $-\lambda_m|f'(\zeta)|^2\tilde{v}_m$ 取 ψ 的地位，并注意到 $|f'(\zeta)|^2$ 有到四阶的直到 λ 为連續的导数，我們就看到，函数 $\tilde{v}_m(\xi, \eta)$ 有到五阶的直到 λ 为連續的导数，而因此，$v_m(x, y)$ 有到五阶的直到 l 为連續的导数。

262. 輔助命題的証明 为証明引理2，我們必須証明关于具可微分密度的單層对数势函数的一个定理。

定理 如果在單層势函数

$$V(\mu)=\int_\lambda \mu(s)\lg\frac{1}{r}ds \quad \left(r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\right) \tag{214}$$

中密度 $\mu(s)$ 具有到某 k 阶的連續导数，那末势函数 $V(\mu)$ 本身在 β 内也有到 k 阶的直到 λ 为連續的导数。

下面所进行的証明对任何曲綫 $\xi=\xi(s)$，$\eta=\eta(s)$ 都适合，但 $\xi(s)$，$\eta(s)$ 为具$(k+1)$阶連續导数的周期函数。

除了势函数(214)外，我們还引入双層势函数：

(215)
$$W(\mu)=\int_\lambda \mu(s)\frac{\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})}{r}ds=$$
$$=\int_\lambda \mu(s)\frac{\eta'(\xi-x)-\xi'(\eta-y)}{r^2}ds,$$

于此 ξ' 与 η' 是 $\xi(s)$ 与 $\eta(s)$ 关于 s 的导数。注意到 $\xi'^2+\eta'^2=1$ 并对 x 求导数，我們得出：

$$\frac{\partial V(\mu)}{\partial x}=-\int_\lambda \mu(s)\frac{x-\xi}{r^2}ds=$$
$$=\int_\lambda \mu(s)\xi'\frac{\xi'(\xi-x)+\eta'(\eta-y)}{r^2}ds+$$
$$+\int_\lambda \mu(s)\eta'\frac{\eta'(\xi-x)-\xi'(\eta-y)}{r^2}ds。$$

利用公式：

$$\frac{\xi'(\xi-x)+\eta'(\eta-y)}{r^2}=-\frac{d}{ds}\lg\frac{1}{r}$$

并对第一个积分用分部积分，我們得出：

(216)
$$\frac{\partial V(\mu)}{\partial x}=V[(\mu\xi')']+W(\mu\eta'),$$

这里一撇表示关于 s 的导数。完全相类似地有：

(217)
$$\frac{\partial V(\mu)}{\partial y}=V[(\mu\eta')']-W(\mu\xi')。$$

現微分双層势函数：

$$\frac{\partial W(\mu)}{\partial x}=\int_\lambda \mu(s)\frac{-\eta' r^2-2(x-\xi)[\eta'(\xi-x)-\xi'(\eta-y)]}{r^4}ds=$$
$$=\int_\lambda \mu(s)\frac{-\eta' r^2+(y-\eta)[\xi'(x-\xi)+2\eta'(y-\eta)]}{r^4}ds=$$
$$=\int_\lambda \mu(s)\frac{d}{ds}\frac{y-\eta}{r^2}ds=-\int_\lambda \mu'(s)\frac{y-\eta}{r^2}ds=\frac{\partial V(\mu')}{\partial y}。$$

因而：

(218)
$$\frac{\partial W(\mu)}{\partial x}=\frac{\partial V(\mu')}{\partial y},$$

类似地有：

$$\frac{\partial W(\mu)}{\partial y}=-\frac{\partial V(\mu')}{\partial x}。\tag{219}$$

如果 $\mu'(s)$ 是連續函数，那末从(216)与(217)推出 $V(\mu)$有直到 λ 为連續的一阶导数，即定理当 $k=1$ 时已証畢。如果 $\mu'(s)$, $\mu''(s)$为連續，那末由上所述，$V(\mu')$有直到 λ 为連續的一阶导数。但这时 $W(\mu\eta')$ 与 $W(\mu\xi')$，而同样 $V[(\mu\xi')']$ 与 $V[(\mu\eta')']$都有直到 λ 为連續的一阶导数，而从(216)与(217)推出，$V(\mu)$有二阶的直到 λ 为連續的导数，即定理当 $k=2$ 时已証畢。現对任意的 $k\geqslant 3$ 来証明定理，設定理对$(k-1)$成立。設 $\mu(s)$有 k 阶的連續的导数，即 $\mu'(s)$有 $(k-1)$ 阶的連續的导数。从我們的关于定理在$(k-1)$时为正确的假設推出，$V(\mu')$ 有到 $(k-1)$阶的直到 λ 为連續的导数。这时从(218)与(219)推出，$W(\mu)$ 也有到 $(k-1)$ 阶的直到 λ 的連續的导数。由此，我們可以断言，$W(\mu\xi')$与 $W(\mu\eta')$有直到 λ 为連續的到$(k-1)$阶的导数。并且，由于以上所示的假設，$V[(\mu\xi')']$ 与 $V[(\mu\eta')']$有直到 λ 为連續的到$(k-1)$阶导数，而从(216)与(217) 就推出，$V(\mu)$有直到 λ 为連續的到 k 阶导数。因而，定理完全証畢。

現轉向于上段中所表述过的引理的証明。引入点(x, y)关于圓 λ 的共軛点(x_1, y_1)

$$x_1=\frac{x}{x^2+y^2};\quad y_1=\frac{y}{x^2+y^2}。\tag{220}$$

并記

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2};\quad r_1=\sqrt{(\xi-x_1)^2+(\eta-y_1)^2}。\tag{221}$$

对于圓 β 的格林函数在边値条件 $u=0$ 下在 λ 上有形狀[**222**]:

$$G(\xi,\eta;x,y)=\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{r}-\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{r_1}-\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\tag{222}$$

注意到格林函数的对称性，我們并可写出：

$$(223)\qquad u(x, y) = -\iint_{B} G(\xi, \eta; x, y)\psi(\xi, \eta)d\xi\, d\eta。$$

这一公式可改写为形狀：

$$(224)\qquad u(x, y) = -\iint_{\xi^2+\eta^2<\frac{1}{4}} G(\xi, \eta; x, y)\psi(\xi, \eta)d\xi\, d\eta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint_{\frac{1}{4}<\xi^2+\eta^2<1} \psi(\xi, \eta)\lg\frac{1}{r_1}d\xi\, d\eta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\iint_{\frac{1}{4}<\xi^2+\eta^2<1} \psi(\xi, \eta)\lg\frac{1}{r}d\xi\, d\eta +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\lg(x^2+y^2)\iint_{\frac{1}{4}<\xi^2+\eta^2<1} \psi(\xi, \eta)d\xi\, d\eta。$$

如果点(x,y)在圓周λ的某一近旁內，例如$\frac{3}{4}\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1$，那末右边的第一項与最后一項有任何阶的連續的导数。对于最后一項，这一点是很明显的，而对于第一項，还必須利用公式(222)。因而在証明这兩个引理时只必須考察右边的第二項与第三項。这些項是以$\psi(\xi,\eta)$为密度的对数势函数，它們分布在区域$\frac{1}{4}\leqslant\xi^2+\eta^2\leqslant 1$，并且第二項是这势函数在点$(x_1, y_1)$的数值，第三項是它在点$(x, y)$的数值。从公式(220)直接推出，$(x_1, y_1)$在圓周$\lambda$內有关于$(x, y)$的任何阶的导数，并且$(x, y)$与$(x_1, y_1)$同时趋向于$\lambda$。因而，只要証明下述事实就够了，当$(x_1, y_1)$趋向于$\lambda$时，第二項有关于$(x_1, y_1)$的相应的直到$\lambda$为連續的导数，以及第三項的关于$(x, y)$的导数当$(x, y)$趋向于$\lambda$时的同样的事实。轉向于証明引理1。我們知道，$u(x, y)$在$B$內有到二阶的直到$\lambda$为連續的导数。必須証明，它的第一阶的导数直到$\lambda$为連續。但这直接地可由下述事实推出，具連續密度的單層势函数在全平面有連續的

第一阶导数[II;200, 201]。轉向于証明引理2，这时只討論(224)右边的第三項。对第二項的研究是完全类似的。应用格林公式[II;69]，我們有：

(225)
$$\frac{\partial}{\partial x}\iint\limits_{\frac{1}{4}<\xi^2+\eta^2\leqslant 1}\psi(\xi,\eta)\lg\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta=$$
$$=\iint\limits_{\frac{1}{4}<\xi^2+\eta^2\leqslant 1}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\lg\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta+\int_\lambda\psi\cos(n,\xi)\lg\frac{1}{r}\,ds-$$
$$-\int_{\xi^2+\eta^2=\frac{1}{4}}\psi\cos(n,\xi)\lg\frac{1}{r}\,ds_{\circ}$$

最后一个积分除在圓周 $\xi^2+\eta^2=\frac{1}{4}$ 之上外，处处有到一切阶的連續导数，我們只要研究右边第一項与第二項就够了。如果 ψ 有直到 λ 为連續的第一阶导数，那末由于上面所証的定理，右边的第二項也具有同样的性質，而第一項，它是具連續密度 $\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$ 在环域 $\frac{1}{4}\leqslant\xi^2+\eta^2\leqslant 1$ 的对数勢函数，它有在全平面为連續的第一阶导数。因而，公式(225)的左边有第一阶的直到 λ 为連續的导数，而 $k=1$ 时的引理2就得到証明。

轉入 $k=2$ 的情形。設 ψ 有直到 λ 为連續的到二阶的导数。我們微分(225)的兩边，例如关于 y 来微分，再一次地应用格林公式：

(226)
$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\iint\limits_{\frac{1}{4}<\xi^2+\eta^2\leqslant 1}\psi(\xi,\eta)\lg\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta=$$
$$=\iint\limits_{\frac{1}{4}<\xi^2+\eta^2\leqslant 1}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}\lg\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta+\int_\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\cos(n,\eta)\lg\frac{1}{r}\,ds+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\int_\lambda\psi\cos(n,\xi)\lg\frac{1}{r}\,ds+\cdots,$$

这里，未写出的項包括沿圓周 $\xi^2+\eta^2=\frac{1}{4}$ 的积分，除在这圓周上

外，它們处处有任何阶的連續导数。注意到以上所証过的定理，我們就見到：包含沿圓周 λ 积分的那些項都有直到圓周为連續的第一阶导数，而二重积分有在全平面为連續的一阶导数。因而公式(226)的左边有直到 λ 为連續的一阶导数，而引理在 $k=2$ 时已証实。对后面的 k 值，这个引理也可以完全一样地証明。

以上最后兩段的証明是屬于 X. Л. 斯穆棱斯基的。

263. 球的边値問題 現在我們要考察波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{227}$$

对球域的边値問題。首先証明引理：如果 $u=\varphi(x, y, z, t)=\varphi(M, t)$ 为方程(227)的一解，它关于变量 (x, y, z, t) 为齐零次函数；又如果在球 $r=t$ 上它化为零 $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$，那末表达式

$$u=\int^{t-r}\omega(\tau)\varphi(M, t-\tau)d\tau \tag{228}$$

也是方程(227)的解，于此 $\omega(\tau)$ 为任意的連續函数，积分的下限可为任意的已給数。

微分表达式(228)，我們得到：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\int^{t-r}\omega(\tau)\frac{\partial\varphi(M, t-\tau)}{\partial x}d\tau-\omega(t-r)\varphi(M, r)\frac{x}{r}。$$

但依条件 $\varphi(M, r)=0$，因而有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\int^{t-r}\omega(\tau)\frac{\partial\varphi(M, t-\tau)}{\partial x}d\tau。$$

再微分一次：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\int^{t-r}\omega(\tau)\frac{\partial^2\varphi(M, t-\tau)}{dx^2}d\tau-\omega(t-r)\times$$

$$\times\left[\frac{\partial\varphi(M, t-\tau)}{\partial x}\right]_{\tau=t-r}\cdot\frac{x}{r}。$$

对关于 y 及 z 的二阶导数，我們可以得出完全相类似的表达

式。对关于 t 的二阶导数，我們將有：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\int^{t-r}\omega(\tau)\frac{\partial^2\varphi(M,t-\tau)}{\partial t^2}d\tau+$$
$$+\omega(t-r)\left[\frac{\partial\varphi(M,t-\tau)}{\partial t}\right]_{\tau=t-r}。$$

代入方程 (227)，并注意到 $\varphi(M, t-\tau)$ 按条件是滿足方程 (227) 的，我們就得到作为代入的結果的等式：

$$\frac{\omega(t-r)}{r}\left[\frac{\partial\varphi(M,t-\tau)}{\partial t}r+\frac{\partial\varphi(M,t-\tau)}{\partial x}x+\right.\tag{229}$$
$$\left.+\frac{\partial\varphi(M,t-\tau)}{\partial y}y+\frac{\partial\varphi(M,t-\tau)}{\partial z}z\right]_{\tau=t-r}=0。$$

但由于齐次函数的尤拉定理[I;148]，我們有：

$$\frac{\partial\varphi(M,t-\tau)}{\partial t}(t-\tau)+\frac{\partial\varphi(M,t-\tau)}{\partial x}x+\frac{\partial\varphi(M,t-\tau)}{\partial y}y+$$
$$+\frac{\partial\varphi(M,t-\tau)}{\partial z}z=0。$$

置 $\tau=t-r$，我們就能肯定，等式(229)是成立的，因而公式 (228) 实在地給出方程(227)的解。

現要求方程(227)的具特殊形狀的解，即形狀为

$$u=\psi\left(\frac{t}{r}\right)Y_n(\theta,\ \varphi)\tag{230}$$

的解，于此 $Y_n(\theta,\varphi)$ 为 n 阶的球函数，而 $\psi(x)$ 为未知函数。把方程(227)变換为球面坐标，我們得到[II;119]：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\right.\tag{231}$$
$$\left.+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]。$$

把表示式(230)代进去，注意到 $Y_n(\theta,\varphi)$ 滿足方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2}+n(n+1)Y_n=0,$$

我們引导到关于 $\psi\left(\frac{t}{r}\right)$ 的如下的方程

$$\psi''\left(\frac{t}{r}\right)=\frac{t^2}{r^2}\psi''\left(\frac{t}{r}\right)-n(n+1)\psi\left(\frac{t}{r}\right),$$

或者

(232) $$(1-x^2)\psi''(x)+n(n+1)\psi(x)=0。$$

为了求出 $\psi(x)$，讓我們来記起勒让特多項式所满足的微分方程[**III; 172**]：

$$[(1-x^2)P_n'(x)]'+n(n+1)P_n(x)=0,$$

我們引入 $(n+1)$ 次的多項式：

(233) $$Q_{n+1}(x)=\int_1^x P_n(x)dx。$$

把前面的一个方程的兩边沿区間 $(1, x)$ 积分，我們得到：

$$(1-x^2)P_n'(x)+n(n+1)Q_{n+1}(x)=0,$$

或者，由于(233)，得：

$$(1-x^2)Q_{n+1}''(x)+n(n+1)Q_{n+1}(x)=0,$$

而与(232)相比較，我們就見到函数

(234) $$u=Q_{n+1}\left(\frac{t}{r}\right)Y_n(\theta, \varphi)$$

就是方程(227)的一解。由于(233)，$Q_{n+1}(1)=0$，这就是解(234)当 $r=t$ 时化为零。此外，显然可見，解(234)为变量 (x, y, z, t) 的齐零次函数。利用引理，我們就能断言，对任何連續函数 $\omega(\tau)$，函数

(235) $$v(M, t)=Y_n(\theta, \varphi)\int_0^{t-r}\omega(\tau)Q_{n+1}\left(\frac{t-\tau}{r}\right)d\tau$$

也会是方程(227)的解。

进行了这些預备性的論述之后，我們轉向于解决具特殊形狀的边值条件的边值問題。讓我們来求方程(227)在球 $r=1$ 外面的

解，它满足齐次初始条件：

$$u\Big|_{t=0}=0;\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 \tag{236}$$

及具有形狀

$$u|_{r=1}=f(t)Y_n(\theta,\varphi) \tag{237}$$

的边值条件，于此 $f(t)$ 为已給函数。我們假設这个函数有到二阶的連續的导数，并且

$$f(0)=f'(0)=0。 \tag{238}$$

回到公式 (235)。如果我們把它的右边的 t 改为 $(t+1)$，那末我們又重新得到方程(227)的一解，因为这一方程的系数不包含 t。我們要求所提出的边值問題的具有形狀

$$u=\begin{cases} Y_n(\theta,\varphi)\displaystyle\int_0^{t+1-r}\omega(\tau)Q_{n+1}\left(\frac{t+1-\tau}{r}\right)d\tau & t\geqslant r-1 \\ 0 & t\leqslant r-1 \end{cases} \tag{239}$$

的解，于此 $\omega(\tau)$ 是在 $\tau\geqslant 0$ 的未知函数。从(239)直接推出(236)的第一个条件。在 $r=1$ 时关于 t 微分公式(239)，然后置 $t=0$ 由于 $Q_{n+1}(1)=0$，我們就得到(236)的第二个条件。边值条件(237)給出 $\omega(\tau)$的积分方程：

$$\int_0^t \omega(\tau)Q_{n+1}(t+1-\tau)d\tau=f(t)。$$

这一方程为渥尔特拉的第一类方程。微分兩边，我們得到方程：

$$\int_0^t \omega(\tau)P_n(t+1-\tau)d\tau=f'(t),$$

并且，由于 (238)，这一方程与前一方程相等价。再微分一次，由于(238)，我們得到等价的第二类方程：

$$\omega(t)+\int_0^t \omega(\tau)P_n'(t+1-\tau)d\tau=f''(t)。$$

所写出方程的核只与 $(t-\tau)$ 有关，我們应用在[46]中所指出的方法就得到具有形狀

$$\omega(t)=f''(t)-\int_0^t H(t-x)f''(x)dx$$

的解，于此 $H(z)$ 是函数

$$\frac{-s^n}{s^n+s^{n-1}P_n'(1)+s^{n-2}P_n''(1)+\cdots+P_n^{(n)}(1)}e^{sz}$$

的关于它的分母的根的留数之和。

边值条件(237)从时刻 $t=0$ 开始起作用。在这时刻之前，沒有扰动。扰动的前綫将以单位速度前进。在以原点为中心，$(t+1)$为半徑的球外，由于(239)，在时刻 t 以前为靜止。在波前本身，二阶导数的連續性可能遭到破坏。我們指出，对于任何的連續的边値条件，我們可以利用形狀为 (237) 的边値条件在球面上平均地迫近它。这是从球函数的封閉性推出来的。上述方法对平面上圓外的区域也可应用。(В. И. 斯米尔諾夫，Доклады Академии Наук СССР, т. XIV, № 1, 1937)。

264. 球内部的振动 我們現在要作方程 (227) 在条件(236)与(237)下，在球内部的解。如果 $n\geqslant 1$，那末如所易証，当$(n+1)$为偶数时，$Q_{n+1}(x)$为偶函数；当$(n+1)$为奇数时，$Q_{n+1}(x)$为奇函数。我們还可以把解(235)写成形狀：

$$(240)\qquad u_1(M,t)=Y_n(\theta,\varphi)\int_0^{t-r}\omega_1(\tau)Q_{n+1}\left(\frac{\tau-t}{r}\right)d\tau。$$

在这一公式的右边，把 t 改为 $t-1$，我們就得到具有形狀

$$(241)\qquad u_2(M,t)=Y_n(\theta,\varphi)\int_0^{t+r-1}\omega_2(\tau)Q_{n+1}\left(\frac{\tau+1-t}{r}\right)d\tau$$

的解，于此当 $\tau<0$ 时 $\omega_2(\tau)=0$。这一解对应于从球面向内部發出的波。当 $t>1$ 时，在球的中心，卽当 $r=0$ 时，它不再为有限的。当 $t=1$ 时，相应的波进行到球的原点，自然地就要把解(240)添加

到这个解里去，但在其中要把 t 改为 $t-1$ 以及适当选取 $\omega_1(\tau)$。这就帶給我們具有形狀

(242) $$u_3(M, t)=Y_n(\theta, \varphi)\int_{t-1-r}^{t-1+r}\omega_3(\tau)Q_{n+1}\left(\frac{\tau+1-t}{r}\right)d\tau$$

的解，于此当 $\tau<0$ 时 $\omega_3(\tau)=0$。在积分的兩限，我們有 $-r\leqslant\tau+1-t\leqslant r$，且解(242)当 $r=0$ 时也保持有限。并且它化为零。为了使得对边值条件中的函数 $f(t)$ 的导数所作的假設較少起見，我們把从(242)关于 t 微分后所得的解取为基础。注意到 $n\geqslant1$ 时，$Q_{n+1}(\pm1)=0$，就会得出解：

(243) $$u(M, t)=Y_n(\theta, \varphi)\varphi_n(r, t),$$

于此

(244)
$$\varphi_n(r, t)=\begin{cases}\dfrac{1}{r}\displaystyle\int_{t-1-r}^{t-1+r}\omega(\tau)P_n\left(\frac{\tau+1-t}{r}\right)d\tau & \text{当 } t>1-r \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } t\leqslant1-r \text{ 时},\end{cases}$$

且当 $\tau\leqslant0$ 时 $\omega(\tau)=0$。如同[263]一样，从这一表达式可以推出，对任何的 $\omega(\tau)$，条件(236)成立。容易直接地驗証，如果 $\omega(\tau)$ 有連續的导数，在 $n=0$ 时，公式(243)及(244)也給出方程(227)的解。我們指出，当 $n=0$ 时公式(242)并不給出方程(227)的解。

边值条件(237)引导到如下的方程：

(245) $$\int_{t-2}^{t}\omega(\tau)P_n(\tau+1-t)d\tau=f(t)。$$

我們假設 $f(t)$ 有連續的导数，且 $f(0)=f'(0)=0$。把方程(245)关于 t 微分，我們得到：

(246₁) $$\omega(t)+(-1)^{n+1}\omega(t-2)-\int_{t-2}^{t}\omega(\tau)P_n'(\tau+1-t)d\tau=f'(t)$$
$$(n\geqslant1),$$

且在 $n=0$ 时

(246₂) $$\omega(t)-\omega(t-2)=f'(t)。$$

方程 (246_1) 給出以逐步的方法制作 $\omega(t)$ 的可能性。首先从渥尔特拉方程

$$\omega(t)-\int_0^t \omega(\tau)P_n'(\tau+1-t)d\tau=f'(t)$$

来决定在区間 $0\leqslant t\leqslant 2$ 的 $\omega(t)$。然后从方程

$$\omega(t)-\int_2^t \omega(t)P_n'(\tau+1-t)d\tau=f'(t)+$$
$$+(-1)^n\omega(t-2)+\int_0^2 \omega(\tau)P_n'(\tau+1-t)d\tau$$

来决定在区間 $2<t\leqslant 4$ 的 $\omega(t)$，这方程的右边是巳知的，其余类推。我們就可把所得函数代到方程(244)的右边去。

为解方程(246_1)，我們可以利用單側的拉普拉斯变换。指出这一方法的大概。以后我們还会用另外的途徑来得到最終的公式。

在方程(246_1)中，把积分表达为兩个下限为零的积分之和；把它們的兩側乘以 e^{-st}，于此 $s=\sigma_1+\sigma_2 i$，而 σ_1 是充分大的正数；又关于 t 沿区間 $0\leqslant t<\infty$ 积分。引入記号：

(247) $$\Omega(s)=\int_0^\infty e^{-st}\omega(t)dt,\quad F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt;$$

利用卷积定理[**45**]及公式：

(248) $$\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}P_n(1-t)dt=\sqrt{\frac{\pi}{2s}}e^{i\frac{\pi}{4}(2n+1)}e^{-s}H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)\\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}P_n(-1-t)dt=\\ \displaystyle\qquad\qquad=(-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2s}}e^{i\frac{\pi}{4}(2n-1)}e^{s}H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)。\end{cases}$$

这些公式是易于直接地从分部积分而得出的。所示的方法引导到对 $\Omega(s)$ 的如下的方程：

$$\sqrt{\frac{2\pi}{s}}\,e^{i\frac{\pi}{4}(2n+1)}\,e^{-s}J_{n+\frac{1}{2}}(-is)\Omega(s)=F(s)。$$

利用拉普拉斯变换的还原公式，我們得到：

$$(249)\quad \omega(t)=\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}(2n+1)}}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\sqrt{\frac{s}{2\pi}}\,\frac{e^{(t+1)s}F(s)}{J_{n+\frac{1}{2}}(-is)}ds。$$

实数 σ_1 取得充分大，使得函数 $F(s)$ 的所有的奇异点都在积分直綫的左面。

应用拉普拉斯变换及其逆变换的可能性的検驗在这一情形下是較易进行的，这是由于借助于逐步的方法我們已建立起 $\omega(t)$ 的存在性，并且，如果对 t 的大的数值給 $f'(t)$ 添上了某些条件，我們就可以对 $\omega(t)$ 作出估計。把表示式(249)代入公式(244)，改变积分的次序，又利用易于証明的等式：

$$(250)\quad \int_{-1}^{+1}e^{px}P_n(x)dx=\sqrt{2\pi}\,e^{i\frac{\pi}{4}(2n+1)}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(-ip)}{\sqrt{p}},$$

我們得到：

$$(251)\qquad \varphi_n(r,t)=\frac{1}{\sqrt{r}\,2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{J_{n+\frac{1}{2}}(-is)}F(s)e^{st}ds$$
$$(n=0,1,2,\cdots)。$$

我們指出一个更簡單的途徑来导出这最后的公式。把表示式(243)代入方程(227)并利用 $Y_n(\theta,\varphi)$ 的方程，我們就得到对 $\varphi_n(r,t)$ 的如下的方程

$$(252)\qquad \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varphi_n}{\partial r}-\frac{n(n+1)}{r^2}\varphi_n。$$

对这一方程必須添上条件：

$$(253)\qquad \varphi_n\Big|_{t=0}=\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}\Big|_{t=0}=0;$$

$$(254)\qquad \varphi_n\Big|_{r=1}=f(t)。$$

把(252)的兩边乘以 e^{-st}，关于 t 沿区間 $0\leqslant t<\infty$ 积分，并考慮到(253)，我們就能得到函数

(255) $$X_n(r, s)=\int_0^\infty e^{-st}\varphi_n(r, t)dt$$

所满足的方程：

(256) $$\frac{d^2X_n}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dX_n}{dr}+\left(-s^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)X_n=0。$$

对(254)应用拉普拉斯变换，这就給出：

(257) $$X_n\big|_{r=1}=F(s)。$$

此外，函数 $X_n(r, s)$ 当 $r=0$ 时还应該为有限的。方程(256)可以化为貝塞尔方程，并注意到(257)及 X_n 在 $r=0$ 时为有限的，我們就得出：

$$X_n(r, s)=\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{J_{n+\frac{1}{2}}(-is)}F(s)。$$

然后，(255)的逆变换就引出公式(251)。

必須添加于 $f(t)$ 上以使拉普拉斯变换和公式(251)为有效的那些条件的闡述，可以在 Г. И. 彼得拉欣(Петрашень)的著作“各向同性球体的彈性动力学問題的理論”(“Динамические задачи теории упругости в случае изотропной сферы” Ученые Записки ЛГУ, серия Математических Наук, вып.21, 1950)中找到。本段及以下几段的材料都取自該文。

265. 解的研究 現在对我們所得到的解

(258) $$\varphi_n(r, t)=\frac{1}{\sqrt{r}\,2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{J_{n+\frac{1}{2}}(-is)}F(s)e^{st}\,ds。$$

进行研究。为确定起見，我們假設函数 $f(t)$ 仅仅在某一有限区間 $[0, T]$ 不为零，且有到二阶的連續导数，又

$$f(0)=f'(0)=f(T)=f'(T)=0。$$

并且，分部积分两次，我們就得到：

(259) $$F(s)=\int_0^T e^{-st}f(t)dt=\frac{1}{s^2}\int_0^T e^{-st}f''(t)dt。$$

我們要假設函数 $F(s)$ 具有形狀：

(260) $$F(s)=F_1(s)+F_2(s)e^{-sT},$$

这里 $F_1(s)$ 与 $F_2(s)$ 都是有理分数，它們的分母的次数至少要超过分子的次数兩次。容易驗証，例如在如下的情形：

$$f(t)=t^2(T-t)^2;\quad f(t)=\sin^2\frac{\pi t}{T}\quad (0\leqslant t\leqslant T),$$

函数 $F(s)$ 具有这样的性質。从公式(259)可見，函数 $F(s)$ 为整函数。

函数 $J_{n+\frac{1}{2}}(-is)$ 有純虛根，把它們記作 $\pm k_s i$ $(s=1,2,3,\cdots)$，于此 k_s 是方程 $J_{n+\frac{1}{2}}(k)=0$ 的根[III$_2$; 145]。

利用公式：

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z)=\frac{1}{2}\left[H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(z)+H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(z)\right]$$

及汉开尔函数的如下的表达式：

$$(261)\qquad \begin{cases} H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(z)=\left(\dfrac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}e^{i\left(z-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\left[1+\varphi_1\left(\dfrac{1}{z}\right)\right]\\ H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(z)=\left(\dfrac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-i\left(z-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\left[1+\varphi_2\left(\dfrac{1}{z}\right)\right], \end{cases}$$

于此 $\varphi_1\left(\frac{1}{z}\right)$ 与 $\varphi_2\left(\frac{1}{z}\right)$ 都是 $\frac{1}{z}$ 的帶自由項的多項式[III$_2$;148]。以 $z=-is$ 代入，我們不难肯定，对充分大的 σ，在积分直綫上的任意点，比

$$\frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)}$$

的模数不超过某一小于1的数。我們考虑到这一点，就可以写出：

$$\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{J_{n+\frac{1}{2}}(-is)}=\frac{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\left[\frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)}\right]^p+$$
$$+\frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\left[\frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)}\right]^p.$$

代入公式(258)并逐項积分，我們得到：

$$(262)\qquad \varphi_n(r,t)=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)}\times$$
$$\times\left[\frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)}\right]^p F(s)e^{st}ds+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)}\left[\frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(-is)}\right]^p F(s)e^{st}ds.$$

我們要証，在右边实际上只有有限項，并且項数与 t 同时增加。例如我們考察第一个和式。利用公式(261)，我們可以把在这和式里的积分写为形狀：

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(s)\left[1+O(|z|^{-1})\right]e^{s[t-(2p+1)+r]}ds。\tag{263}$$

現設数 p 充分大，使得

$$t-(2p+1)+r<0。\tag{264}$$

在积分路綫的右边，以 σ 为中心，以充分大的半徑 R 作一半圓周。考慮到 $F(s)$ 的公式(260)及上面所指出的 $F_1(s)$ 与 $F_2(s)$ 的性質，我們可以断言，在条件 (264) 下，积分 (263) 的被积函数沿这一半圓的积分当 R 无限增大时趋向于零。

另一面，沿由这一半圓周及直綫段 $-R\leqslant\tau_1\leqslant R$ 組成的迴道的积分等于零，这是由于被积函数在这一迴道的内部沒有奇点。由此推得，当条件(264)滿足时，积分(263)为零。完全一样地，只要成立条件：

$$t-(2p+1)-r<0,\tag{265}$$

公式(262)右边的第二个和式的一些項也等于零。所余下来的項描述了球面波，它們是从球 $r=1$ 的某一次的反射所产生的。利用(248)的第一个公式，不难証明在公式(262)右边的积分中的被积函数在有限距离内具有有限个奇点，它們是作为方程

$$z^n-P_n'(1)z^{n-1}+\cdots+(-1)^nP_n^{(n)}(1)=0$$

的根而确定下来，而积分的值就是在这些極点的留数的和，这就是，所提到的积分可以用初等函数表示。

这样，上面所示的对公式(258)的利用就引导到对在边值条件(237)下的球振动的边值問題的“达朗倍尔方法”。

現指出公式(258)的另一变换，它引导到“富里埃方法”，或者，更确切地說，它引导到問題的解关于球振动的特征函数展开为級数。把公式 (258) 代入对 $F(s)$ 的表示式(260)中去。在代入 F_2e^{-sT} 这一項时被积函数將会包含因子 $e^{s(t-T)}$，而且也完全同以前一样，可以証明，在 $t<T$ 时所对应的积分化为零，这就是，我們有：

$$\varphi_n(r,t)=\frac{1}{\sqrt{r}\,2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(-irs)}{J_{n+\frac{1}{2}}(-is)}F_1(s)e^{st}ds。\tag{266}$$

可以証明，这一积分的数值等于它的被积函数留数之和，而如果假設 $F_1(s)$ 的極点不重合于 $J_{n+\frac{1}{2}}(-is)$ 的根(無共振)，那末我們就得到：

$$\varphi_n(r, t) = \psi_n(r, t) - 2\sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p \sin(k_p t + \omega_p)}{J_{n-\frac{1}{2}}(k_p)} \cdot \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k_p r)}{\sqrt{r}}, \tag{267}$$

于此 $\psi_n(r, t)$ 对应于 $F_1(s)$ 的极点的留数之和，且引入記号：

$$F_1(k_p i) = A_p e^{i\omega_p}。$$

可以証明，在对 $F_1(s)$ 所作的假設下，所写的級数关于 t 及 r 一致收斂。它是系統的特征振动之和。从此推出，可以表示为有限形式的項 $\psi_p(r, t)$ 满足条件(227)及边値条件(237)。如果 $F_1(s)$ 在极点与 $J_{n+\frac{1}{2}}(-is)$的根重合，那末在(267)的右边出現了共振的項，它在三角函数符号之外还包含 t。

如果 $t > T$，那末我們只得到特征振动的級数，因为 $F(s)$ 是整函数。又在 $t>T$ 时我們可以把約当引理[III$_2$; 60] 应用到某些以 σ_1 为心的半圓周系統及包含整个函数 $F(s)$ 的被积函数。当 $t<T$ 时，我們还沒有对被积函数在所提到的半圓周上适用的估計。除了特征振动的級数而外，缺少补充的項是由于除去了进入于边値条件的外力的緣故。

266. 电报方程的边值問題 在解椭圆型方程或抛物型方程的边値問題时，我們利用了勢函数理論，并且，整个作法的基础在于对应的微分方程的某些奇解。对双曲型方程，这个勢函数理論的方法不能应用。对电报方程仅仅在一維的情形可以利用这个方法的基本思想，而把边值問題化为瀣尔特拉型积分方程。

在区間 $0\leqslant x\leqslant l$ 中考察方程[II; 185]：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2 u, \tag{268}$$

其初始条件为齐次的

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \tag{269}$$

边值条件为

$$u|_{x=0} = \omega_1(t); \quad u|_{x=l} = \omega_2(t)。 \tag{270}$$

我們指出，如果利用在无限区間里的解 [II; 185] 初始条件时常可以化为齐次的，这正象我們在 [243] 中对热傳导方程所作的一样。如同在 [II; 185] 的情形，引入函数 $I(z) = J_0(iz)$，我們不难相信，函数 $I(c\sqrt{t^2-x^2})$ 是方程(268)的一解。它可以作为基本解。把对应于这个解的連續地作用着的源泉放置于区間 $[0, l]$ 的两端，不难直接驗証，我們得到方程(268)的解：

$$\int_0^{t-x} \varphi(\tau) I(c\sqrt{(t-\tau)^2 - x^2})\, d\tau$$

及

$$\int_0^{t-(l-x)} \psi(\tau) I(c\sqrt{(t-\tau)^2-(l-x)^2})\,d\tau,$$

于此函数 $\varphi(\tau)$ 及 $\psi(\tau)$ 假設为可微的。把这些解关于 x 微分，我們仍然得到解，我們要求(268)，(269)，(270)的具有和式形狀

$$u=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{t-x} \varphi(\tau) I(c\sqrt{(t-\tau)^2-x^2})\,d\tau+ \tag{271}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{t-(l-x)} \psi(\tau) I(c\sqrt{(t-\tau)^2-(l-x)^2})\,d\tau$$

的解，并假設，当 $\tau<0$ 时 $\varphi(\tau)=\psi(\tau)=0$。

公式(271)可写为形式

$$u=-\varphi(t-x)-\int_0^{t-x} \varphi(\tau)\frac{cxI'(c\sqrt{(t-\tau)^2-x^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}}d\tau+ \tag{272}$$

$$+\psi(t-l+x)+\int_0^{t-(l-x)} \psi(\tau)\frac{c(l-x)I'(c\sqrt{(t-\tau)^2-(l-x)^2})}{\sqrt{(l-\tau)^2-(l-x)^2}}d\tau。$$

我們記起展开式：

$$I(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{(s!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2s}。$$

对任意选择的 $\varphi(\tau)$ 及 $\psi(\tau)$ 方程(268)及初始条件(269)滿足。边值条件(270)引导到如下的对 $\varphi(\tau)$ 及 $\psi(\tau)$ 的方程組：

$$\begin{cases} -\varphi(\tau)+\psi(t-l)+\int_0^{t-l} \psi(\tau)\dfrac{clI'(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}d\tau=\omega_1(t) \\ -\varphi(t-l)+\psi(t)-\int_0^{t-l} \varphi(\tau)\dfrac{clI'(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}d\tau=\omega_2(t). \end{cases} \tag{273}$$

函数 $\omega_1(t)$ 与 $\omega_2(t)$ 設为連續可微。置：

$$\psi(t)-\varphi(t)=\varphi_1(t);\quad \psi(t)+\varphi(t)=\psi_1(t)。$$

把方程(273)逐項相加及相減，我們就得到对 $\varphi_1(t)$ 与 $\varphi_2(t)$ 的分开来的方程：

$$\begin{cases} \varphi_1(t)+\varphi_1(t-l)+cl\int_0^{t-l} \varphi_1(\tau)\dfrac{I'(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}d\tau= \\ \qquad =\omega_1(t)+\omega_2(t) \\ -\psi_1(t)+\psi_1(t-l)+cl\int_0^{t-l} \psi_1(\tau)\dfrac{I'(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}d\tau= \\ \qquad =\omega_1(t)-\omega_2(t), \end{cases} \tag{274}$$

并且当 $\tau<0$ 时，$\varphi_1(\tau)=\psi_1(\tau)=0$。

从这些方程可以逐步地决定 $\varphi_1(t)$ 与 $\psi_1(t)$ 在区間 $[0, l]$, $[l, 2l]$ 等等的数值。我們有：

$$
(275)\quad \begin{cases}
\varphi_1(t)=\omega_1(t)+\omega_2(t); \quad \psi_1(t)=\omega_2(t)-\omega_1(t) \quad \text{当 } 0\leqslant t\leqslant l \text{ 时} \\
\left.\begin{aligned}
\varphi_1(t)=\omega_1(t)+\omega_2(t)-\varphi_1(t-l)- \\
-cl\int_0^{t-l}\varphi_1(\tau)\frac{I'(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}d\tau \\
\psi_1(t)=\omega_2(t)-\omega_1(t)+\psi_1(t-l)+ \\
+cl\int_0^{t-l}\psi_1(\tau)\frac{I'(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}d\tau
\end{aligned}\right\} \text{当 } l\leqslant t\leqslant 2l
\end{cases}
$$

等等。

也可以把拉普拉斯变换应用来解积分方程以代替逐步法。

本段材料取自 Д. А. 道諦洛亭 Добротин 的未發表的工作。

俄汉名詞索引

俄文	汉文	段
Адамара метод решения задачи Коши	解柯西問題的阿达馬方法	[147]
Бихарактеристики	双特征	[139]
Верхняя функция	上函数	[217]
Волновое уравнение, основное неравенство для решений	波动方程的解的基本不等式	[253]
— —, предельная задача для сферы	波动方程对于球的边值問題	[263]
Гармонических функций последовательность	調和函数序列	[201]
Гарнака неравенство	哈納克不等式	[201]
Гельмгольца уравнение	赫姆霍兹方程	[228]
Гидродинамики уравнение	流体动力学方程	[164]
Гиперболическая система	双曲型的方程組	[170]
Гиперболический тип уравнений	方程的双曲型	[123]
Грина тензор	格林張量	[240]
— формула	格林公式	[143]
— функция обыкновенного уравнения	常微分方程的格林函数	[172]
— — — — обобщенная	常微分方程的推广的格林函数	[178]
— — оператора Лапласа	拉普拉斯算子的格林函数	[220]
— — — — для круга	圓的拉普拉斯算子的格林函数	[223]
— — — — для прямоугольника	矩形的拉普拉斯算子的格林函数	[223]
— — — — и неоднородное уравнение	拉普拉斯算子的格林函数和非齐次方程	[224]
— — — —, симметрия	拉普拉斯算子的格林函数的对称性	[221]
— — предельной задачи, приводящей к полиномам Лежандра	引导到勒让特多項式的边值問題的格林函数	[179]
— — — — — к функциям Лагерра	引导到勒蓋尔多項式的边值問題的格林函数	[180]
— — — — — — Эрмита	引导到埃尔密特多項式的边値問題的格林函数	[180]

Грина функция уравнения Гельмгольца	赫姆荷兹方程的格林函数	[231]
— — — $\Delta v-\lambda v=0$	方程 $\Delta v-\lambda v=0$的格林函数	[235]
— — — теплопроводности	热傳导方程的格林函数	[245]
Дирихле задача внешняя в трехмерном пространстве	三維空間的狄义赫利外部問題	[204]
— — — на плоскости	平面上的狄义赫利外部問題	[208]
— — внутренняя в трехмерном пространстве	三維空間的狄义赫利内部問題	[202]
— —, единственность решения	狄义赫利問題解的唯一性	[234]
Дифракция электромагнитной волны	电磁波的繞射	[232]
Излучения принцип	輻射原理	[228]
Иррегулярные точки границы	境界的非正則点	[218]
Квазилинейное уравнение	准綫性方程	[99]
Кельвина преобразование	凱尔文变换	[204]
Ковалевской С. В. теорема	柯瓦列夫斯卡婭定理	[128]
Коноид интегральный	积分角錐	[100]
Конус T	錐面 T	[104]
Коши задача для линейного уравнения первого порядка	一阶綫性方程的柯西問題	[100, 101]
— — для нелинейного уравнения	非綫性方程的柯西問題	[107, 109]
— — — — —, единственность решения	非綫性方程柯西問題的解的唯一性	[108]
— — для уравнения второго порядка	二阶方程的柯西問題	[131]
— —, корректность	柯西問題的适定性	[107]
— метод интегрирования нелинейного уравнения первого порядка	非綫性的一阶方程求积分的柯西方法	[106]
— специальные данные	特殊的柯西条件	[181]
Куранта теорема	柯朗定理	[187]
Лагранжа—Шарпи метод	拉格朗日-夏比方法	[117]
Лапласа преобразование, применение к уравнению теплопроводности	拉普拉斯变换对热傳导方程的应用	[246]
Липшица условие	李普希兹条件	[107]
Лоренца оператор	劳倫茨算子	[142]
Ляпунова А. М. поверхности	А. М. 略普諾夫曲面	[192]
Мажорантных рядов метод	优級数方法	[195]

Майера скобка 梅耶括号 [117]
Монжа—Ампера уравнение 孟日-安培尔方程 [137]

Неймана задача внешняя в трехмерном пространстве 三維空間的諾伊曼外部問題 [204]
— — — на плоскости 平面上的諾伊曼外部問題 [208]
— — внутренняя в трехмерном пространстве 三維空間的諾伊曼內部問題 [202]
— — в трехмерном пространстве, решение 三維空間諾伊曼問題的解 [206]
— —, единственность решения 諾伊曼問題解的唯一性 [205]
— — на плоскости, решение 平面上諾伊曼問題的解 [209]
Нижняя функция 下函数 [217]

Обобщенное решение волнового уравнения 波动方程的广义解 [158]
— — уравнения Пуассона 普阿松方程的广义解 [160]
Общий интеграл 通积分，一般积分 [111, 114]
Особый интеграл 奇积分 [111]

Параболически вырожденная система 拋物型退化的方程組 [161]
Параболический тип уравнения 方程的拋物型 [128]
Поверхность, параллельная поверхность 曲面，平行曲面 [200]
Полный интеграл нелинейного уравнения 非綫性方程的全积分 [111, 114]
Потенциал двойного слоя 双層势函数 [193]
— логарифмический 对数势函数 [199]
— объемных масс 質体势函数 [192]
— простого слоя 單層势函数 [192]
— — —, нормальная производная 單層势函数的法綫导数 [195]
— — —, производная по любому направлению 單層势函数沿任意方向的导数 [193]
Правильная нормальная производная 正常法綫导数 [196]
Предельные задачи для уравнения Гельмгольца 赫姆霍茲方程的边值問題 [231]
Пуассона скобка 普阿松括号 [117, 118]

Разрыв слабый 弱性間断 [141]
Разрывы сильные 强性間断 [142]
— — в теории упругости 彈性理論中强性間断 [142]
Регулярная в бесконечно далекой точке гармоническая функция 在無穷远点为正則的調和函数 [203, 204]
Римана метод 黎曼方法 [143]

Римана функция	黎曼函数	[143]
Ритца метод	李茨方法	[190]
Самосопряженный дифференциальный оператор	自共軛微分算子	[147]
Система двух уравнений первого порядка	兩个一阶方程的方程組	[116]
— — — — — вполне интегрируемая	完全可积的兩个一阶方程的方程組	[116]
— полная	完全組	[119]
—уравнений первого порядка	一阶方程組	[161,170]
— — второго порядка	二阶方程組	[161]
— эквивалентная	等价組	[119]
— Якобиева	雅可比組	[119]
Соболева С. Л. формула	С. Л. 索伯列夫公式	[149]
Собственные значения внутренней задачи Дирихле	狄义赫利内部問題的特征值	[231]
— — предельной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения	常微分方程边值問題的特征值	[172]
— — — — — — — — —, асимптотическое выражение	常微分方程边值問題的特征值的渐近表示	[188]
— — — — — — — — —, знак	常微分方程边值問題的特征值的符号	[176]
— — — — — — — — —, экстремальные свойства	常微分方程边值問題的特征值的極值性質	[186]
— функции предельной задачи	边值問題的特征函数	[172]
— — — —, асимптотическое выражение	边值問題的特征函数的渐近表示	[189]
— — — —, экстремальные свойства	边值問題的特征函数的極值性質	[186]
Совместности динамические условия	动力学的相容条件	[142,163]
— кинематические условия	运动学的相容条件	[142,162]
Стеклова В. А. теоремы разложения	В. А. 斯捷克洛夫展开定理	[182]
Суб- и супергармонические функции	次調和函数与优調和函数	[215]
Суб- и суперпараболические функции	次拋物函数与优拋物函数	[252]
Сферических функций интегральное уравнение	球函数的积分方程	[210]
Теплопроводности уравнение неоднородное	非齐次的热傳导方程	[242]
— —, обобщенные потенциалы простого и двойного слоя	热傳导方程的广义單層勢函数与双層勢函数	[251]

Теплопроводности уравнение, потенциалы в двумерном случае	二維热傳导方程的势函数	[244]
— —, — в одномерном случае	一維热傳导方程的势函数	[243]
— —, применение конечных разностей	有限差分对热傳导方程的应用	[247]
— —, свойства решений	热傳导方程解的性質	[250]
Третья предельная задача для уравнения Лапласа	拉普拉斯方程的第三边值問題	[202]
— — — — — —, решение	拉普拉斯方程的第三边值問題的解	[211]
Упругое анизотропное тело	各向异性的彈性体	[166]
Упругости теории плоская статическая задача	彈性理論的平面靜力学問題	[241]
— — уравнения	彈性学方程	[165]
Фурье метод для уравнения волнового	波动方程的富里埃方法	[255]
— — — — колебаний	振动方程的富里埃方法	[184]
— — — — теплопроводности	热傳导方程的富里埃方法	[183,248]
Характеристики линейного уравнения первого порядка	綫性一阶方程的特征	[99,101]
— вещественные и мнимые	实的和虛的特征	[134]
Характеристическая кривая	特征曲綫	[105]
— поверхность уравнения второго порядка	二阶方程的特征曲面	[138]
— — для систем уравнений второго порядка	二阶方程組的特征曲面	[161]
— — — — — первого порядка	一阶方程組的特征曲面	[161]
— система	特征方程組	[104,110]
Характеристические начальные данные	特征的初始条件	[144]
Характеристический коноид	特征角錐	[139]
Характеристическое многообразие	特征流形	[101]
Шварца метод	許瓦茲方法	[212]
Электромагнитные волны	电磁波	[167]
Эллиптический тип уравнений	方程的橢圓型	[128]
Эллиптического типа система первого порядка	橢圓型的一阶方程組	[161]
Якоби метод нахождения полного интеграла	求全积分的雅可比方法	[122]
— теорема об интегрировании канонической системы	关于标准方程組积分法的雅可比定理	[115]

封面
书名
版权
目录
正文